



VERDADEIRA GRANDEZA POR MUDANÇA DE PLANO: SISTEMA DE VISTAS VERSUS PROJEÇÕES COTADAS

*True shape by auxiliary method: orthographic drawings versus topographic
projections*

Mariana Buarque Ribeiro de Gusmão

Doutora em Engenharia Civil
Universidade Federal de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
mariana.rgusmao@ufpe.br
<http://orcid.org/0000-0002-3172-9908>

Andiara Valentina de Freitas e Lopes

Doutora em Desenvolvimento Urbano
Universidade Federal de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
andiara.lopes@ufpe.br
<http://orcid.org/0000-0003-2949-5847>

Vinicius Albuquerque Fulgêncio

Doutor em Arquitetura e Urbanismo
Universidade Federal de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
vinicius.fulgencio@ufpe.br
<http://orcid.org/0000-0001-9178-4549>

Resumo

O conteúdo de Verdadeira Grandeza (VG) é fundamental para as áreas que envolvem o projeto de produtos, uma vez que é a partir dele que se calculam as áreas reais das superfícies dos objetos. Historicamente, tal conteúdo se apresenta na literatura de maneira abstrata o que dificulta o processo de ensino-aprendizagem. O presente trabalho tem como objetivo analisar o ensino de Verdadeira Grandeza através do método da Mudança de Plano comparando a utilização de duas bases possíveis: Sistema de Vistas (Mongeanas) e Projeções Cotadas. Além disso, o artigo apresenta uma Abordagem Sistemática, desenvolvida pelos autores, para o ensino de VG por Mudança de Plano com base no Sistema de Vistas. A metodologia dessa pesquisa foi baseada na realização de um experimento que consistiu na comparação das duas bases através de testes. A análise dos resultados mostrou que os estudantes obtiveram melhor desempenho no teste que tem como base o Sistema de Vistas.

Palavras-Chave: Verdadeira grandeza; Ensino da geometria gráfica; Sistema de vistas;

Projeções cotadas.

Abstract

The areas that work with the design of products find True Shape (TS) content crucial because calculating the TS of objects' surfaces is essential. Historically, the literature presents TS content in an abstract way; consequently, most students regard the teaching-learning process of the TS content as complex. The present work analyzes the Auxiliary Method and compares its use from two possible bases, the Orthographic Drawings and the Topographic Projection. In addition, the article presents a systematic approach developed by the authors for teaching TS by Auxiliary Method based on Orthographic Drawings. The methodology of this research is based on an experiment that consisted of comparing the bases used for teaching TS through the Auxiliary Method. The results showed that students obtained better performance in the test related to the Auxiliary Method based on the Orthographic Drawings.

Keywords: True shape; Teaching of graphic geometry; Orthographic drawings; Topographic projection.

INTRODUÇÃO

A Verdadeira Grandeza (VG) é a real medida, seja de planos ou de segmentos de reta. O estudo da VG é fundamental para o cálculo de áreas, sendo este último imprescindível para qualquer área do conhecimento que trabalhe com a criação de formas. Sendo assim, existe um campo específico na Geometria que, entre outros objetivos, se dedica ao seu estudo: a Geometria Descritiva (GD). Desenvolvida por Gaspar Monge (1746-1818), a Geometria Descritiva possui três operações gráficas a partir das quais é possível obter a VG de elementos que compõem a Forma: o Rebatimento, a Rotação e a Mudança de Plano. As duas primeiras são operações clássicas da Geometria e são limitadas à resolução de extração de VG quando o objeto se encontra em determinada posição em relação aos planos de projeção. Já a Mudança de Plano é uma operação gráfica mais moderna e consiste na extração da VG independentemente da posição que o objeto se encontra em relação aos planos de projeção.

A Mudança de Plano pode ser trabalhada utilizando como suporte alguns tipos de representação, entre os mais usados estão as Projeções Cotadas e o Sistema de Vistas Mongeanas. As Projeções Cotadas são um tipo de sistema de representação gráfica no qual existe um plano principal que contém as três grandezas, sendo duas dadas por via gráfica e a outra por via numérica. Já o Sistema de Vistas Mongeanas é um sistema de representação gráfica que se caracteriza por representar o objeto em no mínimo dois e

no máximo seis planos de projeção que estão ortogonais entre si. Embora necessite de uma pesquisa de aprofundamento, verifica-se empiricamente na bibliografia geral da área de Geometria Gráfica uma linguagem de difícil entendimento com poucas ilustrações. Imagina-se que essa ausência tenha relação com os custos da inserção de imagens à época. Outro aspecto que se pode apresentar como um dificultador dessa abordagem é a utilização de alguns teoremas da Geometria. Essa utilização pode aumentar o nível de abstração e, assim, dificultar o entendimento do conteúdo por parte dos que possuem pouco treinamento em Geometria.

Diante do exposto, entende-se que o estudo da Verdadeira Grandeza é complexo para os discentes e isso é corroborado pelo fato desse conteúdo requerer maior capacidade de abstração. Nesse sentido, Soares e Rêgo (2015) apontam que:

As concepções de concreto e de abstrato relativas ao conhecimento matemático têm consequências diretas na escolha das metodologias de ensino. O entendimento superficial desses conceitos pode conduzir a posturas didáticas limitadas e excludentes trazendo prejuízos para a aprendizagem. (...) Esse processo será legitimado a partir de metodologias que abarquem a dialética entre o concreto e o abstrato. Desse modo, o conhecimento matemático, que é abstrato, passa a fazer sentido para o aprendiz transformando-se num concreto cognitivo. (SOARES; RÊGO, 2015, p. 1).

O presente trabalho tem como escopo analisar qual seria a melhor opção de base para o ensino de VG pelo método da Mudança de Plano (Projeções Cotadas ou Sistema de Vistas Mongeanas). Além disso, também é objetivo deste artigo apresentar uma Abordagem Sistemática para o ensino de VG por Mudança de Plano utilizando como base o Sistema de Vistas Mongeanas; uma vez que, conforme trata Teixeira (2016), um dos desafios didáticos relativos às disciplinas de GD é a abstração com a qual os conteúdos são trabalhados. Sendo o conteúdo de VG parte da disciplina de GD é possível aferir que tal dificuldade também é extensiva ao processo de aprendizagem de VG.

A abordagem proposta tem como característica principal uma classificação prévia do problema, por meio da identificação do objeto segundo sua posição em relação aos planos de projeção, e então a partir dessa classificação procede-se para a resolução do problema. Essa abordagem está sendo trabalhada na disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional (GGT) que integra o ciclo básico dos cursos de Engenharia na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Essa disciplina tem como objetivo

desenvolver a capacidade de percepção viso-espacial através da comunicação e interpretação gráfica. Para isso, trabalha com os sistemas de projeção cilíndrica, uma vez que o público alvo são estudantes de Engenharia. O foco dessa disciplina não é o ensino dos Sistemas de Representação, mas o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial através de Representações Gráficas, já que há disciplinas, como Geometria Descritiva e Desenho Técnico, nas quais o estudo dos sistemas de representação é aplicado às especificidades da modalidade de engenharia escolhida pelo graduando.

Ao se trabalhar o ensino de VG pelo Método de Mudança de Plano, utilizando como base o Sistema de Vistas Mongeanas, propõe-se uma diminuição da abstração pelo fato de utilizar uma única linguagem (a linguagem gráfica e não a linguagem gráfica juntamente com a algébrica) para fornecer e solucionar o problema. A abordagem sistematizada aqui proposta, visa contribuir com o processo de diminuição da necessidade de abstração ao trabalhar com o objeto sempre atrelado a um sólido, tornando mais fácil a compreensão das faces das quais se quer extrair a VG. Além disso, a abordagem propõe que o discente realize um entendimento prévio do problema através da classificação da face da qual se quer extrair a VG de acordo com a sua posição com relação aos planos de projeção na qual está representada. Dessa maneira, foram classificadas três possibilidades de posição que o objeto pode adquirir com relação aos planos de projeção. A proposta de abordagem sistematizada será detalhada no item 3 deste trabalho.

Esse artigo mostra os resultados da realização de uma pesquisa sobre a melhor base para se realizar o ensino de VG pelo método da Mudança de Plano (Projeções Cotadas ou Sistema de Vistas Mongeanas). Para isso foi realizado um estudo comparativo em um universo de 158 estudantes, distribuídos em seis turmas. A metodologia foi baseada na realização de duas aulas equivalentes sobre o tema VG. Em ambas as aulas foi utilizado o Método da Mudança de Plano para o ensino de VG com a diferença de que em uma das aulas foi utilizada como base as Projeções Cotadas (BPC) e na outra foi utilizada como base o Sistema de Vistas Mongeanas (BSVM). O universo da pesquisa foi dividido em dois grupos, cada grupo com 3 turmas. O Grupo 1, teve a primeira aula com a BPC e a segunda aula com a BSVM. O Grupo 2, teve a primeira aula com a

BSVM e a segunda aula com a BPC. Ao final de cada aula foi feita a aplicação de um teste para os estudantes. Os testes eram equivalentes em termos de grau de dificuldade e quantidade de questões (três questões cada). Os resultados mostram que os estudantes obtiveram melhor desempenho nos segundos testes.

GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL: CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

De maneira sucinta e objetiva, a Geometria Gráfica pode ser entendida como a ciência que estuda a Forma (LOPES; CARNEIRO-DA-CUNHA; GUSMÃO, 2018). A representação da Forma é imprescindível para qualquer área que envolva o ato de projetar, uma vez que sem ela um projeto não passa de uma ideia no campo mental. Para representar essa Forma, é necessário uma série de normas e regras que precisam ser dominadas para que o entendimento seja universal. Nesse sentido, o projetista precisa saber as regras dos sistemas de representação para transformar a ideia em algo que possa ser executado (MONTENEGRO, 2007).

Os sistemas de representação costumam ser divididos em dois grandes grupos: as projeções cônicas, mais utilizadas na apresentação de projetos arquitetônicos (MONTENEGRO, 1983); e as projeções cilíndricas, mais utilizadas na execução de projetos nas mais diferentes áreas (Engenharias, Design, etc.), através das quais é possível retirar medidas exatas de partes e/ou do todo do objeto (CHING; JUROSZEK, 2012; MONTENEGRO, 2007).

Quando se estuda Geometria Gráfica se desenvolve a capacidade de visualizar objetos, compreendê-los e manipulá-los graficamente. Essa capacidade é chamada de Capacidade Visiográfica Tridimensional (CV3D) e é definida por Rêgo (2008) como sendo a:

habilidade cognitiva de perceber e compreender formas tridimensionais e expressá-las graficamente em representações bidimensionais (perspectivas e vistas ortográficas) e tridimensionais (maquetes e modelos geométricos), que podem incorporar ou não uma linguagem gráfica sistematizada. (RÊGO, 2008, p. 44).

Portanto, é possível afirmar que a manipulação da forma para a obtenção das medidas reais do objeto, conhecida como VG, está dentre as principais funções da Geometria Gráfica Tridimensional (FERREIRA, 2011). É de senso comum que se um projeto vai

ser executado é necessário saber suas medidas corretas e, portanto, conhecer os processos que envolvem encontrar a VG é fundamental. Nesse sentido, a Geometria Gráfica Tridimensional aporta ao projetista conhecimentos-chave na geração, manipulação e representação da forma sendo essencial a qualquer área que envolva a elaboração de objetos a serem executados.

O ensino da geometria gráfica tridimensional para engenharias: o caso da UFPE

A disciplina GGT na UFPE é ministrada na Área II, órgão de apoio do Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN), onde são disponibilizadas as disciplinas dos Ciclos Geral e Básico dos Cursos de Tecnologia e de Ciências Exatas. Conforme trata a resolução nº14/2013 da instituição, os alunos aprovados no vestibular para Engenharia devem cursar as disciplinas do ciclo básico (Engenharia – CTG) para então se candidatarem para as Engenharias específicas, tendo como critério o ranking referente às notas no boletim.

A representação de um objeto pode ser considerada como sendo um dos focos de interesse da Geometria Gráfica em geral. Muitos estudos mostram que a visualização do objeto interfere no próprio desenvolvimento cognitivo (DUVAL, 1995 e 2003; FISCHBEIN, 1993; VAN HIELE, 1986).

A dificuldade dos alunos em geral – e nesse caso específico os alunos da área II – com as disciplinas de Desenho Técnico é notória. Grande parte dessa dificuldade pode ser atribuída a não obrigatoriedade do ensino da geometria no ensino básico no Brasil (BRASIL, 1996). Dessa maneira é possível concluir que a maioria dos alunos não teve a oportunidade de vivenciar os conteúdos de Geometria que abordam as construções geométricas.

A disciplina GGT tem por objetivo desenvolver a capacidade de visualização espacial e a habilidade de expressão e de interpretação gráfica. Para atingir tal objetivo o enfoque utilizado na disciplina se justifica já que a prática profissional dos engenheiros exige o domínio do traçado de esboços perspectivos e da codificação e decodificação de representações de objetos tridimensionais no espaço bidimensional (empregando o Sistema de Vistas Mongeanas). O conteúdo de VG é associado ao Sistema de Vistas

Mongeanas e demanda uma capacidade de visualização espacial desenvolvida, uma vez que avança ainda mais no nível de abstração requerido pela disciplina.

A ausência dos conteúdos de Geometria Gráfica no currículo da Educação Básica deixam falho o desenvolvimento de habilidades importantes para um estudante que prestará exame para Engenharia. Esquece-se que a habilidade viso-espacial é importante tanto para a vida acadêmica como para a vida profissional do bacharel em Engenharia.

Verdadeira Grandeza: conceitos, aplicação e dificuldades

Para trabalhar a conceituação de VG propõe-se a divisão do termo em duas partes e o entendimento das mesmas em separado. Sendo assim, a primeira parte do termo a ser trabalhada é o conceito de “verdade” que, independentemente da área, é tido como controverso. Porém, para efeito da área da Geometria Gráfica é suficiente compreender “verdadeira” como real. Já o conceito de “grandeza” para a Geometria Gráfica se refere às medidas lineares e angulares de arestas ou de faces de um objeto. Em suma, Verdadeira Grandeza seria a medida real, seja de uma aresta ou de uma face de um determinado objeto.

Na área de conhecimento das Engenharias, geralmente, o uso das VGs de um objeto está atrelado ao cálculo de áreas. No entanto, saber “ler” ou, mais ainda, saber extrair as VGs de um objeto é importante não somente para a representação e execução de projetos, como também para outras atividades da prática profissional da Engenharia, como, por exemplo, análise de projetos e pareceres técnicos.

A necessidade da extração da VG ocorre porque nem sempre as representações do objeto (plantas, cortes, vistas, etc.) possibilitam a extração direta de suas VGs. Para lidar com situações dessa natureza, deve-se dominar o uso de operações gráficas da GD para determinar a VG de superfícies ou de arestas.

Como é amplamente discutido na literatura da área de GD (CHAPUT, 1954; COSTA; COSTA, 1988; PRÍNCIPE JÚNIOR, 1983), para se compreender o conceito de VG é imprescindível conhecer as três posições básicas de referência posicional entre os elementos geométricos que compõem um objeto e, sobretudo, entre esses elementos e os planos de projeção. São três as possíveis posições que um ente geométrico pode

assumir: paralela, perpendicular e oblíqua. Dessa maneira, dependendo da posição da aresta com relação aos planos de projeção, podemos tê-la: 1) em VG, quando o objeto está paralelo ao plano de projeção; 2) em vista básica (VB), quando o objeto está perpendicular ao plano de projeção e; 3) com suas dimensões reduzidas, quando o objeto está oblíquo ao plano de projeção.

Bases de representação para apoiar o método da Mudança de Plano

A Mudança de Plano pode ser trabalhada utilizando como suporte, ou base, alguns tipos de representação. Neste trabalho será feita uma comparação entre duas das bases mais utilizadas: as “Projeções Cotadas” e o “Sistema de Vistas Mongeanas”. A primeira base foi escolhida por ser uma forma de representação bastante utilizada nas engenharias, sobretudo nas engenharias que lidam com superfícies extensas. Já a segunda base foi escolhida por se tratar do sistema de representação mais difundido dentro e fora da Universidade.

Base Projeções Cotadas (BPC)

As Projeções Cotadas são um tipo de representação menos comuns em meios como arquitetura e design, tendo tido mais utilidade no campo das Engenharias. Vem do campo das Engenharias a nomenclatura na língua inglesa *Topographic Projections*. No Brasil, esse termo também pode ser encontrado com a nomenclatura Geometria Cotada. As Projeções Cotadas consistem numa representação, na qual é dada uma única projeção gráfica, onde constam duas grandezas do objeto (ex. largura e profundidade) e nessa mesma projeção é dada, algebricamente, a terceira grandeza (ex. altura). Na literatura, é utilizada por autores como Rangel (1979) e Costa e Costa (1988) para propor e resolver problemas de Verdadeira Grandeza. Chaput (1954) demonstra esse tipo de representação em um capítulo de seu livro *Elementos da Geometria Descritiva*, porém, utiliza o Sistema de Vistas Mongeanas para trabalhar conceitos e definições da área.

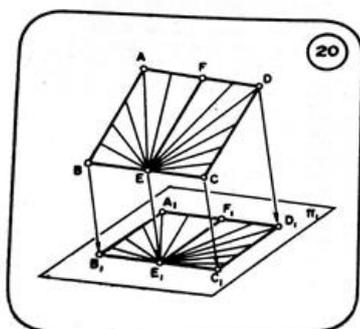
Para realizar a operação de extração de VG pelo método Mudança de Plano, tendo como base as Projeções Cotadas, é necessário ter a noção básica do que significam: “Reta de Cota Constante”, “Plano de Cota Constante” e “Reta de Máxima Declividade”. Com o

intuito de ilustrar esses conceitos e apresentar a lógica utilizada para a obtenção da VG empregando como base as Projeções Cotadas, é interessante observar a sequência de figuras abaixo.

A Figura 1 mostra o plano ABCD que contém várias retas e seus segmentos. Dentre eles os segmentos BC e AD que são paralelos ao plano π_1 , logo suas projeções estão em VG e por isso são chamados de Retas de Cota Constante. Já os segmentos AB, AE, FE, ED e DC são oblíquos ao plano π_1 , tendo suas projeções reduzidas em relação ao seu tamanho real. Os segmentos AB, FE e DC são perpendiculares às retas de cota constante, sendo chamados de Retas de Máxima Declividade (ou Máxima Inclinação).

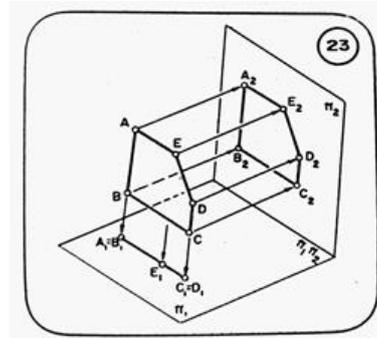
A Figura 2 mostra o polígono ABCDE, que está: em VB com relação ao plano π_1 ; e contido em um Plano de Cota Constante com relação ao plano auxiliar π_2 . Conseqüentemente, a sua projeção em VG no próprio plano auxiliar π_2 . Isso ocorre porque quando se insere um plano auxiliar paralelo à projeção do polígono ABCDE (que é uma reta no plano π_1), ele mostrará a projeção deste polígono em VG.

Figura 1 - Plano ABCD



Fonte: Costa; Costa (1988).

Figura 2 - Polígono ABCDE

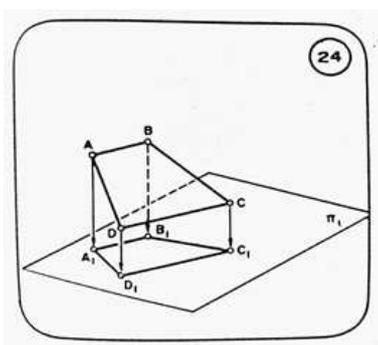


Fonte: Costa; Costa (1988).

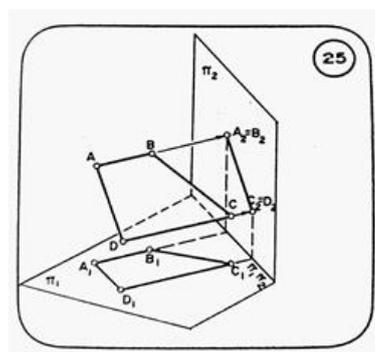
Já no caso de um polígono que tem como suporte um plano oblíquo como é o caso do polígono ABCD da Figura 3, sua projeção em π_1 não aparece nem em VG, nem reduzida a uma reta. Dessa maneira, para extrair a VG de ABCD tem-se que fazer duas projeções.

Figura 3 - Polígono ABCD

Figura 4 - Primeira projeção de ABCD



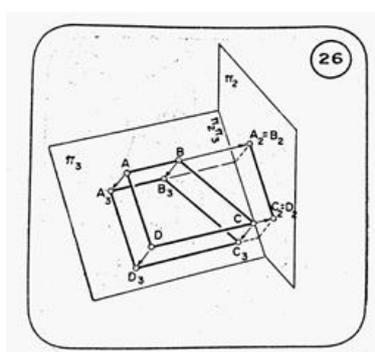
Fonte: Costa; Costa (1988).



Fonte: Costa; Costa (1988).

A primeira projeção tem como objetivo obter a projeção de ABCD reduzida a um segmento de reta. Para isso, é preciso inserir o plano auxiliar π_2 perpendicular às retas de cota constante, AB e DC. Conseqüentemente, todo o plano ABCD se projetará em π_2 como uma reta, ver Figura 4. Já a segunda projeção, ilustrada na Figura 5, tem como objetivo extrair a VG de ABCD. Para isso despreza-se π_1 e considera-se π_2 como projeção principal, assim as cotas do plano ABCD passam a ser medidas em relação a π_2 . O procedimento consiste em inserir um plano auxiliar (π_3) paralelo ao polígono ABCD, para garantir essa posição é necessário que o novo plano seja inserido de forma paralela à reta de máxima declividade do polígono ABCD. Tal reta coincide com a projeção do polígono em π_2 . Assim, quando o polígono for projetado em π_3 , ABCD estará em VG.

Figura 5 - Polígono ABCD em VG



Fonte: Costa; Costa (1988)

Base Sistema de Vistas Mongeanas (BSVM)

O Sistema de Vistas Mongeanas é amplamente utilizado tanto na literatura como na prática. Ele é conhecido por diversas nomenclaturas entre elas: Sistema Mongeano, Sistema da Dupla Projeção, Sistema de Projeção Cilíndrica Ortogonal. Este é um sistema de representação que serve de base para o que conhecemos como Desenho Técnico, portanto é base para todos os tipos de projeto que necessitam de representações gráficas. O Sistema de Vistas Mongeanas consiste em representar o objeto projetado em, no mínimo dois e no máximo seis, Planos de Projeção que estão ortogonais entre si. Na literatura é utilizado por muitos autores da área da Geometria Gráfica, a exemplo de Chaput (1954), Montenegro (2015), Príncipe Júnior (1983) e Machado (1976).

Como o procedimento para a utilização desta base foi acrescido da nossa proposta de uma Abordagem Sistematizada, será feita a demonstração da base “Sistema de Vistas Mongeanas” em conjunto com a nossa proposta no item a seguir.

Uma Abordagem Sistematizada para o ensino de Verdadeira Grandeza pelo método da Mudança de Plano

A abordagem sistematizada para o ensino de VG apresentada neste artigo se fundamenta teoricamente no Sistema de Vistas Mongeanas. Essa abordagem sistematiza o conteúdo subdividindo-o em função das três possíveis posições que um ente geométrico pode assumir com relação aos planos de projeção, objetivando obter a VG do ente geométrico.

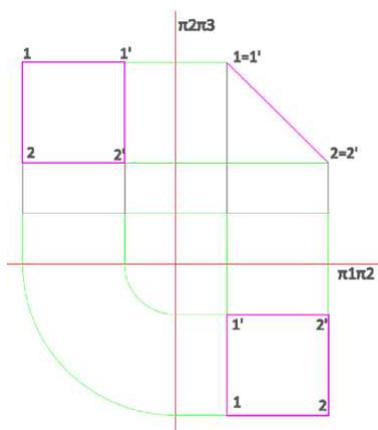
Primeiramente, é essencial entender que para se obter a VG de um ente geométrico (aresta ou face) a condição básica é que ele esteja paralelo a um dos planos de projeção. No caso da Figura 1, por exemplo, a face ABCD não está paralela a nenhum dos planos de projeção, ou seja, nenhuma das vistas dadas apresenta a face em questão em VG. Portanto, para se obter sua VG é necessário realizar uma operação gráfica, no caso, a Mudança de Plano.

Para realizar a operação de Mudança de Plano é necessário atender a uma condição: a criação de um novo diedro. Logo, esse novo diedro vai ser criado de forma que o novo plano, um Plano Auxiliar (PA) fique ao mesmo tempo paralelo à face da qual se quer obter a VG e perpendicular a um dos planos de projeção do diedro existente.

Assim, chega-se a uma conclusão importante, que vai levar à sistematização proposta neste artigo: para se obter a VG de um ente geométrico ele tem que estar em VB em pelo menos uma das vistas. Porém, como já foi discutido no item anterior, nem sempre essa é a situação que um objeto está em relação a um plano de projeção. Dessa maneira, partiu-se das três posições possíveis entre entes geométricos, as quais foram discutidas anteriormente e sistematizou-se uma abordagem para se obter a VG por Mudança de Plano usando como base o Sistema de Vistas Mongeanas. Nesta abordagem cada posição foi chamada de Caso, temos assim: Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

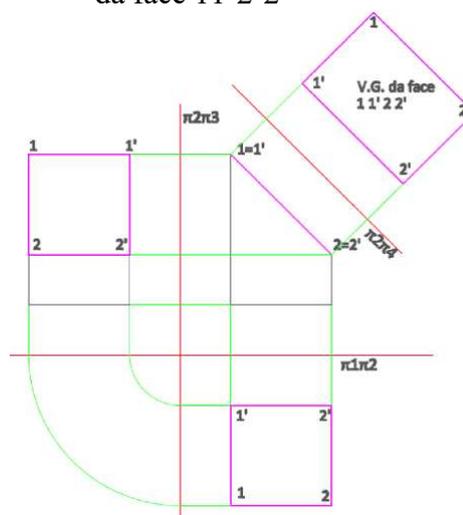
No Caso 1, a face da qual se quer a VG já aparece em VB em pelo menos uma das seis vistas mongeanas. A Figura 6 mostra um objeto que está numa posição que se enquadra no Caso 1, ou seja, a face $122'1'$ aparece em VB na vista frontal.

Figura 6 - Objeto na posição Caso 1



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Figura 7 - Procedimento obtenção da VG da face $11'2'2'$



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

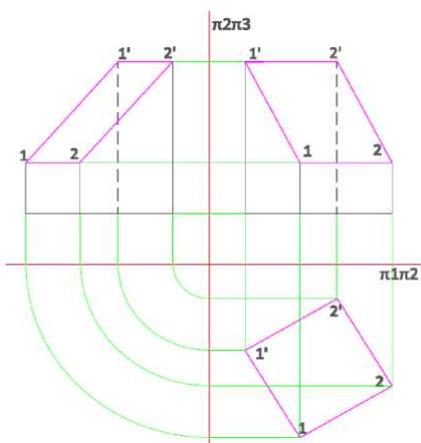
Quando o objeto se apresenta nessa situação é necessário realizar apenas um procedimento para extrair a VG da face. Tal procedimento, ilustrado na Figura 7, tem início com a inserção de um PA (π_4) em VB no plano π_2 de forma que ele fique paralelo à VB da face $122'1'$, criando, assim, um novo diedro ($\pi_2\pi_4$). Em seguida, no novo diedro projeta-se os vértices da face em estudo através das linhas de chamada. Esse procedimento levará as medidas das arestas 12 e $1'2'$ que estão em VG em π_2 para π_4 . Na sequência ocorre o transporte das medidas das arestas $11'$ e $22'$ que estão em VG no plano π_1 , a partir da linha de terra $\pi_1\pi_2$ até os pontos $1'$, 1 , 2 e $2'$. Finalmente, une-

se os pontos encontrados no plano π_4 , fechando a linha poligonal e formando a face $11'2'2$ em VG.

Já a posição que caracteriza o Caso 2 é tal que a face da qual se quer a VG ($122'1'$) não está em VB em nenhuma das seis vistas mongeanas, porém pelo menos uma de suas arestas está em VG em pelo menos uma das seis vistas mongeanas. Na figura 8 tem-se um objeto no Caso 2, pois a aresta 12 está paralela à linha de terra $\pi_1\pi_2$ e, portanto, em VG. É importante salientar que no caso em análise há outras arestas em VG, porém basta ter uma para enquadrar a situação no Caso 2.

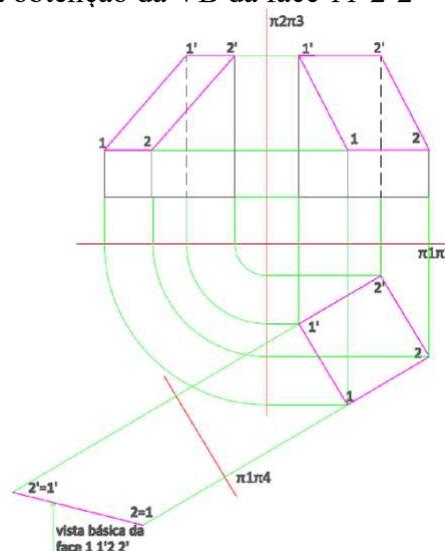
Diferente do Caso 1, no Caso 2, é necessário realizar dois procedimentos para extrair a VG da face. O primeiro, ilustrado na Figura 9, consiste na obtenção de uma vista auxiliar da face em estudo com o auxílio de um PA para se chegar numa situação semelhante a do Caso 1. Já o segundo procedimento, mostrado na Figura 10, é idêntico ao realizado no Caso 1, resultando na VG da face.

Figura 8 - Objeto na posição Caso 2



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Figura 9 - Primeiro (de dois) procedimento para obtenção da VB da face $11'2'2$



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

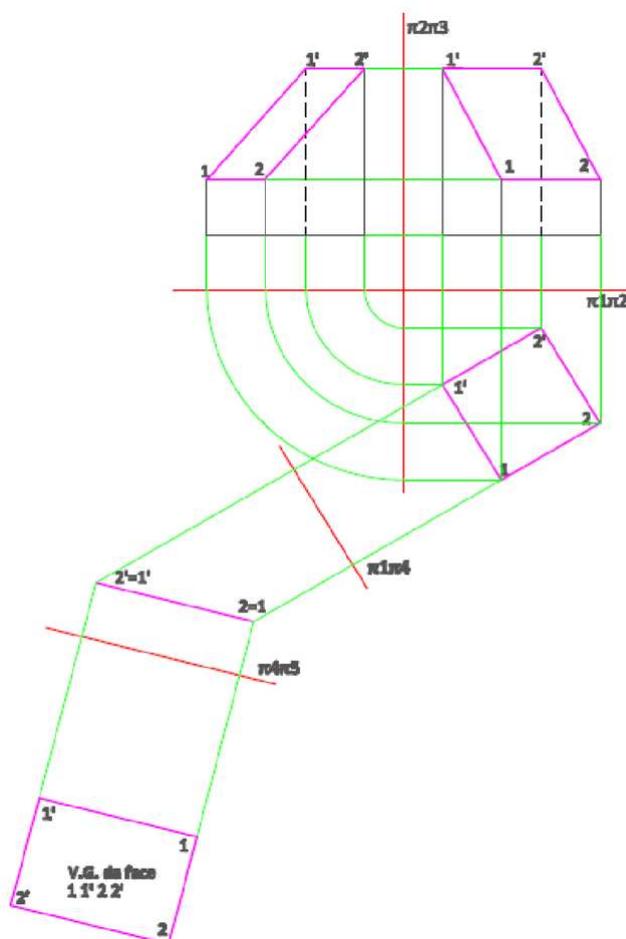
É preciso, então, criar um novo diedro, no qual a face $122'1'$ apareça em VB. Para isso se utiliza um dos teoremas da GD que diz que em um diedro, se uma reta é perpendicular a um dos planos de projeção, ela, obrigatoriamente, será paralela ao outro, e que qualquer plano que contiver essa reta também será perpendicular a esse plano (MILLAR, 1887). Voltando à situação em análise, tem-se que a aresta 12 está em VG.

Prolonga-se, então, a aresta 12 (ver Figura 9) e traça-se uma reta perpendicular a ela que será a linha de terra $\pi_1\pi_4$, criando, assim, um novo diedro.

Nesse ponto é possível concluir que no diedro $\pi_1\pi_4$ a aresta 12 vai funcionar como a reta do citado teorema; ou seja, a aresta 12 pertence à face da qual se quer obter a VG e ao mesmo tempo ela é perpendicular à π_4 , sendo assim, qualquer plano que a contiver (inclusive o plano que dá suporte à face 122'1) também será perpendicular ao plano π_4 , aparecendo, portanto, em VB depois de projetado.

Com a VB da face 122'1', chega-se à mesma situação do Caso 1, não sendo necessário, portanto, que se repita a explicação sobre a obtenção da VG da face (ver Figura 10).

Figura 10 - Segundo procedimento (de dois) para obtenção da VG da face 11'2'2

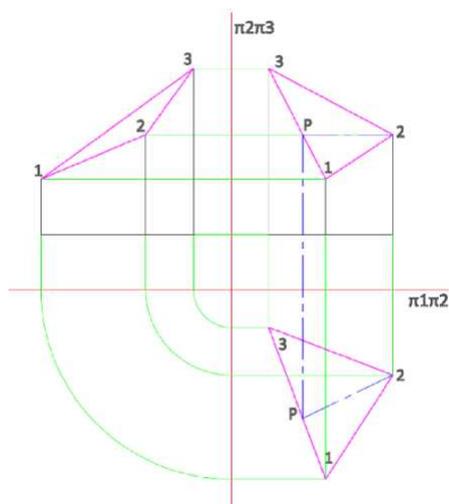


Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Por fim, no Caso 3, a face da qual se quer a VG não está em VB em nenhuma das vistas mongeanas, e, além disso, nenhuma de suas arestas aparece representada em VG em

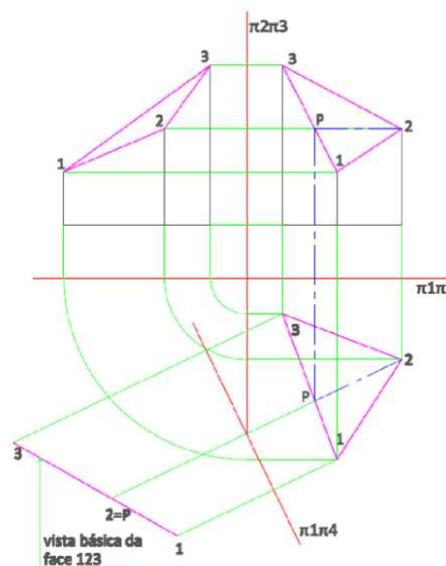
nenhuma das seis vistas mongeanas, como mostra a Figura 11. Para se obter a VG da face utiliza-se o citado teorema da GD, porém é preciso realizar um procedimento anterior para que assim se chegue à mesma situação que caracteriza o Caso 2. Tal procedimento vai “isolar” uma das infinitas retas pertencentes à face 123 da Figura 11, no caso, o segmento de reta isolado é o segmento 2P.

Figuras 11 - Objeto na posição do Caso 3



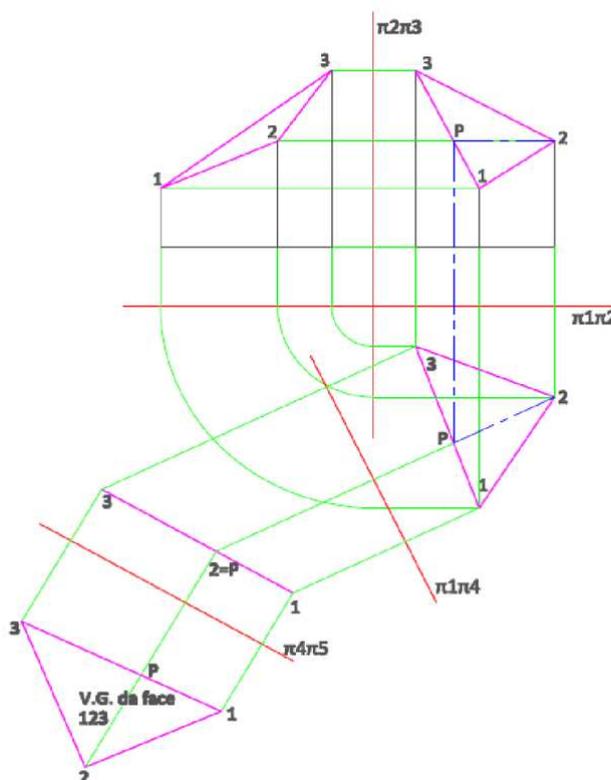
Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Figuras 12 - Primeiro (de três) Procedimento para obtenção da VB da face 123



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Figura 13 – Terceiro procedimento (de três) para obtenção da VG da face 123



Fonte: Lopes; Gusmão (2023).

Em seguida é realizado segundo procedimento do Caso 3, ver Figura 12, que consiste no prolongamento do segmento de reta 2P e a criação de um novo diedro, o diedro $\pi_1\pi_4$, justamente como ocorreu no Caso 2 (Figura 9). O resultado desse procedimento é a VB da face 123. Mais uma vez chega-se a uma situação semelhante ao Caso 1, ver Figura 13.

METODOLOGIA

O experimento didático teve como fundamento a preparação e subsequente exposição de duas aulas. Ambas as aulas tiveram como objetivo o ensino do conteúdo de VG através do método da Mudança de Plano, porém em cada aula foi utilizada uma base diferente: base das Projeções Cotadas (BPC) e base do Sistema de Vistas Mongeano (BSVM). Ao final de cada aula foi aplicado um teste para avaliar o aprendizado dos estudantes. Tendo em vista que os conteúdos e o método trabalhados na primeira aula poderiam influenciar o aprendizado e a percepção dos estudantes na segunda aula, o universo da pesquisa foi dividido em dois grupos que receberam uma sequência

diferente de aulas. O Grupo 1 teve a primeira aula com a BPC e a segunda aula com a BSVM, e o Grupo 2 teve a ordem das aulas invertida, ou seja, a primeira aula com a BSVM e a segunda aula com a BPC. É preciso salientar que a abordagem sistemática para a obtenção de VG utilizando Mudança de Plano apresentada neste artigo foi associada somente à aula cuja base foi a BSVM.

O universo da pesquisa teve como sujeitos 158 estudantes do Curso de Engenharia – UFPE e ocorreu durante o período letivo do segundo semestre do ano de 2019. Os estudantes estavam distribuídos em 6 turmas da disciplina GGT, e conforme foi explicado, essas foram divididos em 2 grupos, cada grupo com 3 turmas.

A pesquisa para esse artigo fez uso do método comparativo que, segundo Gil (1987), é o que permite a investigação de indivíduos, classes, fenômenos ou fatos, com objetivo de ressaltar as diferenças e as similaridades entre eles. Além disso, o método comparativo, por procurar explicações de fenômenos, permite analisar o dado concreto, deduzindo elementos constantes, abstratos ou gerais nele presentes (GIL, 1987).

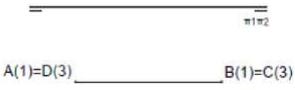
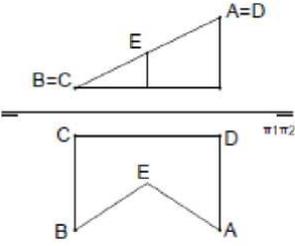
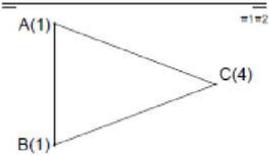
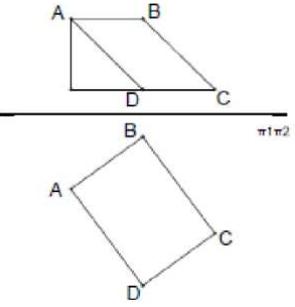
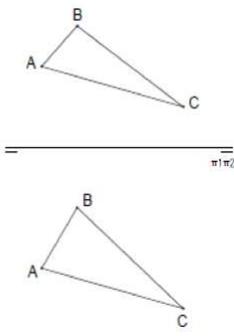
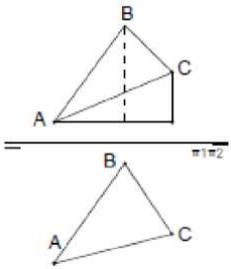
A pesquisa foi organizada e desenvolvida em cinco etapas que serão explicitadas a seguir:

- Etapa 1: foram preparadas duas aulas com duração de duas horas cada. Na primeira hora foi trabalhado o conteúdo de forma expositiva e na hora seguinte foi aplicado o teste para medir o desempenho do estudante sobre a aula assistida. Tanto as aulas como os testes tiveram níveis de dificuldade semelhantes. Cada teste foi composto por três questões, com um nível crescente de complexidade, como mostra a Figura 14;
- Etapa 2: realização da primeira aula com subsequente aplicação do teste;
- Etapa 3: realização da segunda aula com subsequente aplicação do teste;
- Etapa 4: correção do teste com subsequente tabulação e análise dos resultados do desempenho. Na correção dos testes foi atribuído um ponto para cada questão, de maneira que o cada teste possuía um valor total de três pontos. Os resultados foram inseridos em uma planilha (Excel) para serem trabalhados e analisados.

Foram realizadas comparações de desempenho entre os dois grupos para cada um dos dois testes;

- Etapa 5: interpretação e discussão sobre os dados totais.

Figura 14 – (a) Teste Método Mudança de Plano, base Projeções Cotadas (Teste BPC); (b) Teste Método Mudança de Plano, base Sistema de Vistas Mongeanas (Teste BSVM)

<p>(a)</p> <p>1ª Questão: Dada a projeção cotada do plano ABC em π_1, encontrar a VG do plano ABCD.</p> 	<p>(b)</p> <p>1ª Questão: Dadas as projeções em π_1 e em π_2 da peça ao lado, determinar a VG da face ABCDE.</p> 
<p>2ª Questão: Dada a projeção cotada do plano ABC em π_1, determinar a VG do plano ABC.</p> 	<p>2ª Questão: Dadas a projeções em π_1 e em π_2 da peça abaixo, determinar a VG do plano ABCD.</p> 
<p>3ª Questão: Dadas a projeções do plano ABC em π_1 e em π_2, determinar a VG do plano ABC.</p> 	<p>3ª Questão: Dadas a projeções da peça abaixo, determinar a VG do plano ABC.</p> 

Fonte: Autores (2022).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As análises e as discussões sobre os resultados da pesquisa foram divididas em duas partes. A primeira parte mostra a análise sobre as questões relativas ao desempenho dos

estudantes nos testes. Já a segunda parte mostra uma discussão sobre as principais características presentes na BSVM associado à Abordagem Sistemática.

Análise das Questões de Desempenho

A análise do desempenho dos estudantes foi feita após a correção dos testes que atribuiu notas que variaram de zero até três. Tal análise foi dividida em duas partes, a primeira analisou as médias das notas dos estudantes por grupo, enquanto a segunda parte analisou a média de cada um dos grupos por base ensinada (BPC e BSVM).

A Tabela 1 mostra numericamente as médias dos estudantes por turma em cada um dos testes, bem como a média geral por grupo. Com relação ao Grupo 1 (composto pelas turmas E1, E3 e P1) observou-se que ele teve maior desempenho no teste BSVM, com média geral igual a 1,28. Já a média geral no teste BPC foi igual a 0,92. Uma das razões para tal resultado pode ter sido o fato das turmas terem feito o teste BSVM depois do teste BPC. Porém é preciso ressaltar que a turma E3 não seguiu esse padrão tendo tido um desempenho maior no teste BPC. Já o Grupo 2 (composto pelas turmas E2, E4 e E6) teve melhor desempenho no teste BPC, com média geral igual a 1,58, enquanto a média geral no teste BSVM foi igual a 1,06.

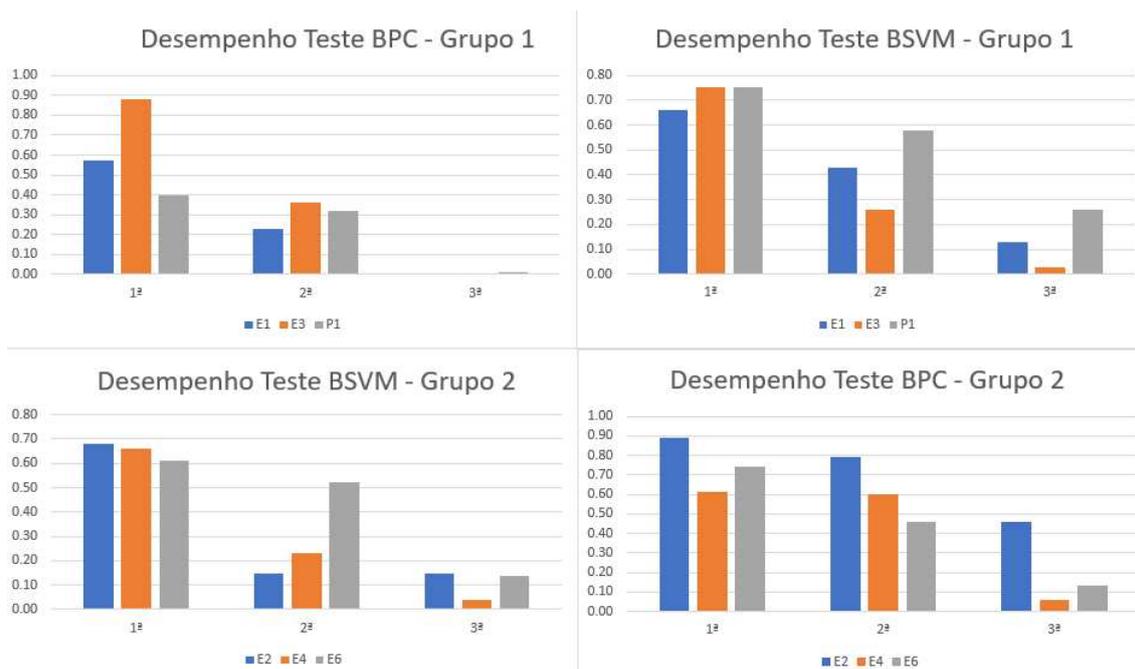
Tabela 1 - Desempenho por turma e grupo de acordo com a base utilizada

		Teste BPC	Teste BSVM			Teste BSVM	Teste BPC
Grupo 1	E1	0,80	1,22	Grupo 2	E2	2,13	2,14
	E3	1,24	1,04		E4	0,93	1,27
	P1	0,73	1,59		E6	1,27	1,33
	Média Geral	0,92	1,28		Média Geral	1,06	1,58

Fonte: Elaborada pelos autores

A Figura 15 mostra graficamente as médias dos estudantes por turma em cada um dos testes (BPC e BSVM). Uma leitura dos gráficos mostra um melhor desempenho dos estudantes nos segundos testes, independente do grupo analisado.

Figura 15 - Desempenho por turma e grupo de acordo com a base utilizada



Fonte: Elaborada pelos autores

A Tabela 2 traz uma síntese do desempenho de cada grupo por método ensinado. Nela observa-se que os estudantes, independente do grupo analisado, obtiveram maior desempenho no teste BPC média 1,25, enquanto a média no teste BSVM foi igual a 1,17. O grupo 1 teve melhor desempenho no teste BSVM, 1,28, e o Grupo 2 obteve média maior no teste BPC.

Tabela 2 - Síntese desempenho grupo de acordo com a base ensinada

	Teste BPC	Teste BSVM
Grupo 1	0,92	1,28
Grupo 2	1,58	1,06
Média	1,25	1,17

Fonte: Elaborada pelos autores

Além das respostas já obtidas nas análises anteriores procurou-se responder ao seguinte questionamento: Existe diferença de desempenho dependendo do método que foi ensinado primeiro? Para que fosse possível responder essa pergunta cada grupo foi exposto a um método diferente no primeiro dia de aula. A Tabela 3 traz as médias dos Grupos 1 e 2 em cada um dos testes e a média total de cada grupo após os dois testes, essa média total representa o desempenho de cada grupo no aprendizado de VG, independentemente do método ensinado.

Tabela 3 - Média dos grupos por teste

	Primeiro Teste	Segundo Teste	Média Total
Grupo 1	Média Teste BPC 0,92	Média Teste BSVM 1,28	1,10
Grupo 2	Média Teste BSVM 1,06	Média Teste BPC 1,58	1,32

Fonte: Elaborada pelos autores

A expectativa inicial era que as médias do segundo dia de testes fossem maiores do que as médias do primeiro dia, independentemente do método utilizado, uma vez que se considerou que o conhecimento acumulado no primeiro dia de aula poderia beneficiar o processo de aprendizado do segundo dia. Essa hipótese foi confirmada, ambos os grupos mostraram melhor desempenho nos seus segundos testes, como pode ser verificado na Tabela 3.

Outra interpretação importante é que o conhecimento acumulado no primeiro dia de aula do Grupo 2 refletiu-se em um melhor desempenho para os testes do segundo dia de aula. Pode-se suscitar tal reflexão considerando que a média desse grupo para o teste com a base BPC (1,58) foi maior do que a média do Grupo 1 no mesmo teste (0,92), como mostra a Tabela 3.

Na análise das médias totais, mostradas na Tabela 3, observou-se que o Grupo 1, que viu a BPC primeiro, obteve média 1,10, enquanto o Grupo 2, que viu a BSVM primeiro obteve média 1,32. Dessa maneira é possível afirmar que ter visto a BSVM primeiro melhorou o desempenho do Grupo 2. Para reforçar esse argumento observou-se também que o Grupo 2 ao fazer o teste BPC obteve média maior do que o Grupo 1 ao fazer o mesmo teste, o que indica que o Grupo 2 pode ter se beneficiado do fato de ter visto a BSVM primeiro. O mesmo ocorreu com o Grupo 1 que ao fazer o teste BSVM, no segundo dia de testes, teve um desempenho maior do que o Grupo 2 ao fazer o mesmo teste.

Em suma, o experimento mostrou que ambos os grupos demonstraram um desempenho melhor nos seus segundos dias de aulas/teste; ou seja, ter tido uma experiência anterior, independente da base utilizada (BPC ou BSVM) contribuiu para este desempenho. No entanto, a Tabela 3 mostra que o Grupo 2 se beneficiou do fato de ter tido a experiência inicial com a BSVM, pois sua média total foi maior do que a média total do Grupo 1.

Discussão Geral

Em uma interpretação geral sobre os métodos utilizados pode-se perceber três aspectos específicos que podem ajudar a compreender qual a base mais adequada para ensinar VG por Mudança de Plano.

O primeiro aspecto é o tipo de informação trabalhada. Enquanto na BSVM a informação é trabalhada exclusivamente pela via gráfica, na BPC a informação é trabalhada em duas vias (gráfica e algébrica), uma vez que é utilizada a chamada Geometria Cotada. Consideramos que a BSVM ao fornecer a informação apenas por uma única via (gráfica), concentra o arcabouço necessário para o entendimento do problema. Já para trabalhar com a BPC, o estudante precisa sintetizar duas informações diferentes para realizar o entendimento do problema, o que em termos cognitivos representa um esforço maior.

O segundo aspecto trata das características intrínsecas à própria base utilizada tanto para fornecer o problema como para realizar a resolução deste. Na BPC tem-se a “base livre”, ou seja, apesar do plano π_1 (plano inicial) ser sempre o plano no qual é dado o elemento para se extrair a VG, o plano auxiliar é inserido conforme a necessidade, ou seja, sua localização é livre. Em contraste, na BSVM os seis planos de projeção são fixos e ortogonais entre si, assim o plano auxiliar tem que ser inserido de forma ortogonal em um dos seis planos mongeanos. Considera-se que ao trabalhar utilizando como base um sistema com posições de planos pré definidas a necessidade de abstração para compreender e resolver o problema diminui consideravelmente.

O terceiro e último aspecto também é relativo à diminuição da necessidade de abstração por parte do estudante. Na BPC pode ocorrer a extração de VG de objetos abstratos per si, como uma reta, ou um plano. Na BSVM associada à Abordagem Sistemática, o objeto do qual se quer a VG sempre pertence a um sólido geométrico, e, portanto, as retas sempre são arestas de um sólido e os planos sempre serão faces de um sólido. Considera-se que ao fornecer um sólido e pedir a VG de um elemento desse sólido se está fornecendo para o estudante um contexto que torna o entendimento do problema menos complexo.

Por todas as razões apontadas acima, conclui-se que o ensino de Verdadeira Grandeza pelo Método da Mudança de Plano, tendo como base as Projeções Cotadas, parece ser mais adequado a estudantes que têm conhecimento prévio de Geometria Gráfica e, além disso, requer níveis de abstração mais altos desse estudante. Já o ensino de Verdadeira Grandeza pelo Método da Mudança de Plano tendo como base o Sistema de Vistas Mongeanas, associado à Abordagem Sistemática está mais adaptado ao estudante iniciante, especialmente os estudantes que nunca tiveram acesso aos conteúdos de Geometria Gráfica durante o ensino básico. Com a BSVM associada à Abordagem Sistemática o estudante recebe o problema e antes de partir para resolução realiza uma pré-classificação de acordo com posição objeto do qual se quer a VG com relação aos planos de projeção. Essa pré-classificação é prioritariamente visual e ajuda na compreensão plena do problema antes mesmo do início da sua resolução. Isso porque a utilização da base do Sistema de Vistas Mongeanas associada à Abordagem Sistemática proposta na disciplina GGT requer níveis menos complexos de abstração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento inadequado da visualização espacial, CV3D, ao longo da Educação Básica no Brasil leva os estudantes a ingressarem no Ensino Superior com uma série de lacunas devido ao fato de não terem tido acesso ao conhecimento prévio necessário. Portanto, eles são forçados a em pouco tempo se apropriar de conteúdos que, pela sua própria natureza, requerem amadurecimento.

O estudo de Verdadeira Grandeza exige um nível de abstração rigoroso, o que dificulta ainda mais sua absorção por parte dos estudantes. Isso ocorre porque o estudo de VG é realizado tendo como suporte um dos Sistemas de Representação Gráfica, o que, por sua vez, demanda um treinamento complexo por parte dos estudantes.

Este artigo demonstrou que o ensino de Verdadeira Grandeza pelo Método da Mudança tendo como base o Sistema de Vistas Mongeanas associado à Abordagem Sistemática se adapta melhor aos estudantes que não possuem conhecimento prévio de Geometria Gráfica. A utilização da base do Sistema de Vistas Mongeanas diminui a necessidade de abstração por parte do estudante. Atrelado a isso a Abordagem Sistemática desenvolvida para estudantes da disciplina Geometria Gráfica Tridimensional do Ciclo Básico de

disciplinas dos cursos de Engenharia da UFPE contribuiu para a diminuição da necessidade de abstração ao promover uma melhor possibilidade de visualização ao utilizar sólidos geométricos e permitir uma classificação prévia à resolução do problema. Os resultados dos testes demonstraram a eficácia da utilização da base no Sistema de Vistas Mongeanas atrelado à Abordagem Sistemática na primeira abordagem de ensino para estudantes sem experiência prévia com os conteúdos de Geometria Gráfica se comparado à base com Projeções Cotadas na medida em que o desempenho dos estudantes que utilizaram primeiro a base no Sistema de Vistas Mongeanas obtiveram melhor desempenho nos testes.

Em termos gerais da pesquisa é importante salientar duas considerações: uma teórica e outra prática. A teórica é que, embora a Abordagem Sistemática tenha sido criada dentro do contexto da disciplina Geometria Gráfica Tridimensional, ela tem possibilidades de uso em todas as áreas que necessitam da determinação, ou extração, de Verdadeiras Grandezas. Dessa maneira, essa abordagem pode ter aplicações que extrapolam o contexto no qual foi desenvolvida. Já a consideração prática é relativa ao experimento que foi executado, ou seja, mesmo sendo possível conjecturar que os resultados obtidos nesta pesquisa podem ser encontrados em outros contextos semelhantes é necessário realizar estudos específicos em outros contextos institucionais para verificar se os resultados se repetem; dando o mote para o desenvolvimento de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **LDB**. Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=1&data=23/12/1996&totalArquivos=289>. Acesso em: 13 fev. 2023.

CHAPUT, F. I. **Elementos de geometria**. Rio de Janeiro: F. Briguiet e Cia, 1954.

CHING, F. D. K.; JUROSZEK, S. P. **Desenho para arquitetos**. 2. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

COSTA, M. D.; COSTA, A. **Geometria gráfica tridimensional: ponto, reta e plano**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1988.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berne: Peter Lang, 1995.

FERREIRA, Bruno Leite. **Resolução de problemas de geometria gráfica em ambiente computacional**: o caso da interseção entre planos. 2011. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/18873>. Acesso em: 13 fev. 2023.

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l], v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3482943>. Acesso em: 13 fev. 2023.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1987.

LOPES, Andiará Valentina de Freitas e; CARNEIRO-DA-CUNHA, Maximiliano Wanderley; GUSMÃO, Mariana Buarque Ribeiro de. Quem somos? Uma abordagem epistemológica sobre a Geometria Gráfica e suas práticas. **Revista Geometria Gráfica**, Recife, v. 2, n. 1, p. 5, 11 out. 2018. Semestral. Universidade Federal de Pernambuco. <http://dx.doi.org/10.51359/2595-0797.2018.238458>. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/geometriagrafica/article/view/238458>. Acesso em: 13 fev. 2023.

LOPES, Andiará Valentina de Freitas e; GUSMÃO, Mariana Buarque Ribeiro de. **Representação gráfica para engenharias, arquitetura, expressão gráfica e design**: projeções cilíndricas. São Paulo: Pimenta Cultural, 2023. 234 p. ISBN 978-65-5939-604-7, DOI 10.31560/pimentacultural/2023.96047. Disponível em: <https://www.pimentacultural.com/livro/representacao-grafica>. Acesso em: 6 jun. 2023.

MACHADO, A. **Geometria descritiva**: teoria e exercícios. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976.

MILLAR, J. B. **Elements of Descriptive Geometry**. Londres: MacMillan and Co., 1887.

MONTENEGRO, G. A. **A perspectiva dos profissionais**. São Paulo: Edgard Blucher, 1983.

MONTENEGRO, G. A. **Desenho de projetos**: em arquitetura, projeto de produto, comunicação visual e design de interior. São Paulo: Blucher, 2007.

MONTENEGRO, G. A. **Geometria descritiva**. v. 1. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2015.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. **Noções de geometria descritiva**. v. 1. São Paulo: Nobel, 1983.

RANGEL, A. P. **Projeções cotadas**: desenho projetivo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

RÊGO, Rejane de Moraes. **Educação gráfica para o processo criativo projetual arquitetônico**: as relações entre a capacidade visiográfica tridimensional e a utilização de instrumentos gráficos digitais para a modelagem geométrica. 2008. 262 f. Tese (Doutorado) - Curso de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2008.

SOARES, L.; RÊGO, R. G. O concreto e o abstrato no ensino de matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais...** Ilhéus-BA: SIPEMAT, 2015. p. 1-13.

TEIXEIRA, Fábio Gonçalves. Perspectiva axonométrica e vistas principais no ensino de geometria descritiva. **Revista Educação Gráfica**, Bauru, v. 20, n. 2, p. 289-302, 2016. Disponível em: <http://www.educacaografica.inf.br/artigos/perspectivas-axometricas-e-vistas-principais-no-ensino-de-geometria-descritiva-axonometric-and-orthographic-views-in-the-descriptive-geometry-teaching>. Acesso em: 13 fev. 2023.

VAN HIELE, P. M. **Structure and insight**: a theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Pres, 1986.

Submetido em 15/02/2023.

Aprovado em 05/03/2023.