ISSN 2177 - 9309 https://doi.org/10.51359/2177-9309.2023.258557

Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

EXPLORAR COM O GEOGEBRA UMA INVESTIGAÇÃO EM GEOMETRIA

Exploration with GeoGebra of an investigation in Geometry

José António Fernandes
Doutor em Educação
Universidade do Minho – Portugal
jfernandes@ie.uminho.pt
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X

Resumo

Neste artigo desenvolve-se um estudo orientado pelos dois seguintes objetivos: examinar o processo de construção do *bissetograma* de diferentes quadriláteros (definido pela interseção das bissetrizes dos ângulos internos do quadrilátero); e avaliar o potencial do GeoGebra para a sua construção. Assim, recorrendo ao GeoGebra, pretende-se estabelecer quando é que é possível contruir o *bissetograma*, a sua caracterização e as suas propriedades. Em termos da construção dos *bissetogramas* e da análise da sua construção, verificou-se que o GeoGebra mostrou ser uma ferramenta com elevado potencial para a construção dos diversos *bissetogramas* e para fornecer *insights* acerca da possibilidade da sua construção, caracterização e propriedades. Perante tais potencialidades, considera-se que o GeoGebra se assume como uma ferramenta muito adequada para explorar a construção, a caracterização e propriedades dos *bissetogramos*, ao mesmo tempo que se promovem conhecimentos acerca dos quadriláteros, enfatizando, designadamente, diferentes definições dos quadriláteros a partir de diferentes atributos, relações entre as definições dos diferentes quadriláteros e a distinção entre a evidência obtida da análise dos vários exemplos gerados e a necessidade de uma prova analítica.

Palavras-Chave: Geometria, *bissetograma*, investigação, GeoGebra.

Abstract

This article develops a study guided by the following two objectives: to examine the process of constructing the *bisectogram* of different quadrilaterals (defined by the intersection of the bisectors of the internal angles of the quadrilateral); and evaluate the potential of GeoGebra for its construction. Therefore, using GeoGebra, we intend to establish when it is possible to construct the *bisectogram*, its characterization and its properties. In terms of the construction of *bisectograms* and the analysis of their construction, it was found that GeoGebra proved to be a tool with high potential for the construction of different *bisectograms* and to provide insights into the possibility of their construction, characterization, and properties. Given such potentialities, it is considered that GeoGebra is a very suitable tool to explore the construction, characterization and properties of *bisectograms*, while promoting knowledge about quadrilaterals, emphasizing, namely, different definitions of quadrilaterals from different attributes, relations between the definitions of the different quadrilaterals and the distinction between the evidence obtained from the analysis of the various generated examples and the need for an analytical proof.

Keywords: Geometry, *bisectogram*, investigation, GeoGebra.

INTRODUÇÃO

A utilização dos ambientes geométricos dinâmicos, de que o GeoGebra é um caso particular, é amplamente recomendado no ensino, e em particular no enino da matemática. Estes programas revelam as suas potencialidades ao permitirem, por arrastamento de objetos, gerar vários exemplos de uma figura geométrica, a partir dos quais se pode descobrir invariantes que deverão ser estudados e validados por processos analíticos. Adicionalmente, alguns destes programas, como acontece com o GeoGebra, permitem não só explorar questões geométricas, mas também questões algébricas e estatísticas.

Situando-nos na Geometria, que é o tema matemático implicado no presente estudo, constata-se que o GeoGebra pode contribuir para a aprendizagem dos alunos em vários aspetos, tais como: proporcionar *insights* para reconhecer propriedades e descobrir caminhos para a sua prova (FERNANDES, 2022a); estabelecer conexões entre objetos ou conceitos geométricos, organizadas em tabelas ou mapas (FERNANDES, 2022b); e promover uma aprendizagem baseada em conceitos (FERNANDES, in press).

No ensino da matemática as tarefas que se implementam na sala de aula, conjuntamente com o modo como são exploradas, desempenham um papel importante na aprendizagem dos alunos. Existem diferentes tipos de tarefa, nomeadamente, problemas, exercícios, explorações, investigações e projetos (PONTE, 2005), cuja realização permite prosseguir objetivos variados na aprendizagem dos alunos, como adquirir e consolidar conhecimentos e promover a descoberta, a criatividade, a autonomia e a persistência.

No presente estudo explora-se uma tarefa de investigação de Geometria com recurso ao ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. As investigações são tarefas abertas que apresentam um elevado desafio para os alunos. Ponte (2003) especifica o processo envolvido na realização de uma investigação, afirmando que:

> Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjeturas. Depois, testam-se essas conjeturas, algumas das quais, perante contraexemplos, poderão ser desde logo abandonadas. […] As conjeturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática. (p. 2)

Neste contexto, estabeleceram-se os dois seguintes objetivos para o estudo: examinar o processo de construção do *bissetogramo* de diferentes quadriláteros; e avaliar o potencial do GeoGebra para a sua construção Especificamente, a investigação geométrica, aqui proposta, foca-se no estudo do *bissetogramo*[1] de um quadrilátero, que é definido pela interseção das bissetrizes dos ângulos internos do quadrilátero dado, no que diz respeito à sua construção, à possibilidade de o construir e à sua caraterização e propriedades.

Finalizada a secção de introdução, onde enunciámos a problemática e justificámos a importância do estudo, segue-se a secção do referencial teórico, onde revemos e discutimos a problemática das tarefas de ensino e, em particular, das investigações. Na secção seguinte explora-se, com o GeoGebra, a construção e caracterização de figuras geométricas. Por fim, na última secção sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

REFERENCIAL TEÓRICO

No referencial teórico trata-se a problemática das tarefas matemáticas, que se desenvolve em duas subsecções: na primeira subsecção abordam-se os diferentes tipos de tarefas e na segunda subsecção focam-se as tarefas de investigação.

TIPOS DE TAREFAS

As tarefas de ensino desencadeiam a atividade dos aprendizes e essa atividade, por sua vez, condiciona a sua aprendizagem. Portanto, quando se desenvolve uma atividade está-se a resolver uma certa tarefa, logo a resolução da tarefa é o objetivo da atividade. Uma tarefa pode ter origem no professor, que a propõe ao aluno, no próprio aluno ou de alguma forma de negociação entre o aluno e o professor. Além disso, a tarefa pode ser enunciada explicitamente no início da sua exploração ou, diferentemente, ser estabelecida de modo implícito à medida que a sua exploração vai sendo desenvolvida.

São diversos os tipos de tarefas que se exploram na sala de aula e cada um deles procura responder a objetivos de aprendizagem distintos. Ponte (2005) destaca cinco tipos de tarefas diferentes: os problemas, os exercícios, as investigações, as explorações, os projetos e as tarefas de modelação. De seguida, caracterizam-se cada um desses tipos de tarefas.

Os *problemas* são tarefas que envolvem sempre um grau de dificuldade considerável. Segundo Pólya (1986), um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um

[1] Com o termo *bissetogramo*, aqui usado, pretende-se enfatizar a utilização das bissetrizes dos ângulos internos de um quadrilátero dado na construção de um novo quadrilátero.

método que permita a sua resolução imediata, na qual o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, sendo a solução, de antemão, do conhecimento do professor e em que a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Contudo, o nível de dificuldade do problema não deve ser demasiado elevado, pois nesse caso o aluno pode desistir simplesmente de o resolver, desistindo da atividade de resolução; nem demasiado acessível, pois nesse caso deixa de ser problema e transforma-se num exercício. Para mais informação sobre resolução de problemas pode ver o texto de Viseu, Fernandes e Gomes (2015).

Nos *exercícios*, tal como nos problemas, indica-se claramente o que é dado e o que é pedido, assumindo-se, em consequência, como enunciados fechados. Este tipo de tarefas apresentam um baixo nível de dificuldade e permitam ao aluno aplicar os conhecimentos adquiridos, exercitando-os e consolidando-os. No entanto, um ensino que enfatize excessivamente a resolução de exercícios não é uma atividade interessante para muitos alunos. Portanto, a redução do ensino da matemática à resolução de exercícios diminui o grau de desafio com que se confrontam os alunos e desmotiva-os. Embora os exercícios tenham o seu lugar próprio no ensino da matemática, importa ter em conta que, mais relevante do que fazer muitos exercícios, é selecioná-los cuidadosamente em função dos objetivos que lhe são intrínsecos.

As *investigações* implicam que os alunos assumam um papel semelhante ao de investigador, naturalmente tendo como referência o seu conhecimento do domínio em que a pesquisa se desenvolve. Para tal, parte-se da formulação de questões de investigação, que podem ser propostas pelos alunos, pelo professor ou resultarem da negociação entre ambos, a que, seguidamente, se procura responder. No processo investigativo, os alunos devem explorar, conjeturar, procurar regularidades, estabelecer conjeturas e apresentar as conclusões obtidas na forma escrita. Partilhando a importância dos problemas no ensino da matemática, as investigações demandam um maior envolvimento dos alunos ao requererem a sua participação desde o princípio do processo investigativo.

As *explorações*, tal como as investigações, são tarefas abertas, mas com um menor grau de dificuldade. Portanto, a diferença entre as explorações e as investigações reside no grau de desafio, que é menor para as explorações. Além disso, as explorações requerem pouco planeamento em comparação com as investigações. Já no caso dos exercícios e explorações a distinção, por vezes, não é muito clara, pois um mesmo enunciado pode constituir um exercício ou uma exploração, dependendo dos conhecimentos prévios dos alunos. Assim, se os alunos não dispõem de todos os conhecimentos requeridos para a resolução da exploração, eles poderão recorrer às suas intuições.

Os *projetos* são tarefas em que se destaca o contexto e o tempo necessário para a sua realização. Os projetos são tarefas de longa duração que partilham muitas das características das investigações e permitem efetuar sínteses das aprendizagens. Segundo Batanero, Díaz, Contreras e Arteaga (2011), o ensino com base em projetos torna a matemática inseparável das suas aplicações, aumenta a motivação dos alunos e releva o contexto e a natureza realista das tarefas. Embora os projetos permitam promover aprendizagens profundas, o longo tempo em que decorrem pode acarretar perigos na medida em que os alunos se podem desorientar nos seus percursos de resolução e, consequentemente, perderem o interesse ou mesmo desistirem da tarefa.

Finalmente, as simulações são tarefas que se relacionam com contextos da realidade. Em geral, as simulações são tarefas problemáticas e desafiantes e podem ser problemas ou investigações consoante o seu grau de estruturação, sendo importantes por a atividade envolvida permitir estabelecer uma ponte entre a realidade e a modelação matemática (BURRILL, 2002).

Em jeito de síntese, podem-se classificar as tarefas segundo o grau de abertura e o grau de estruturação, como se mostra na Figura 1.

Figura 1 - Classificação de tarefas segundo o grau de desafio e estrutura.

Fonte: Ponte (2005, p. 8).

Observando a Figura 1, conclui-se que o exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido, o problema é uma tarefa fechada e de desafio elevado, a exploração é uma tarefa aberta e de desafio reduzido e a investigação é uma tarefa aberta e de desafio elevado.

INVESTIGAÇÕES

A realização de tarefas de investigação proporciona aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos e permite-lhes experienciar o prazer da descoberta. Ora, essas potencialidades das tarefas investigativas têm vindo a ser reconhecidas, verificando-se mesmo a sua introdução nos currículos de matemática.

Abrantes, Ponto, Fonseca e Brunheira (1999) defendem a introdução das investigações na sala aula, porque elas: constituem uma parte essencial do trabalho em matemática e lidam com o essencial da atividade matemática (formular e resolver problemas, explorar hipóteses, formular e testar conjeturas, generalizar e provar resultados); favorecem o envolvimento do aluno no trabalho que realiza na aula de matemática, sem o qual será difícil para o aluno realizar uma aprendizagem significativa; podem ser abordadas e desenvolvidas de vários modos e com diferentes graus de profundidade; estimulam um pensamento globalizante, envolvendo o relacionamento de diversos tópicos; podem ser inseridas em qualquer parte do currículo, acentuando um carácter transversal da disciplina de matemática; e reforçam as aprendizagens mais elementares, ao mesmo tempo que envolvem aspetos complexos do pensamento.

Contudo, apesar do reconhecimento das suas potencialidades, existem ainda obstáculos à sua introdução no currículo e, sobretudo, à sua exploração na sala de aula, designadamente: interpretação restritiva do texto curricular por parte da maior parte dos manuais escolares; pressões do próprio sistema educativo (exames, referências nucleares de aprendizagem, …); pouca flexibilidade (em tempo e conteúdos) dos currículos atuais; extensão dos programas e diferente estruturação das atividades de investigação; as atividades de investigação pressupõem uma ligação entre os conteúdos matemáticos; uma visão rígida e absoluta da matemática; e dificuldades dos professores na articulação entre este tipo de atividades e os conteúdos programáticos.

Seguidamente, referem-se alguns estudos com alunos em que foram exploradas investigações matemáticas. No estudo de Segurado (2002) participou uma turma, em que todos os alunos frequentavam o 6.º ano pela primeira vez. Os alunos, organizados em pequenos grupos, exploraram, sequencialmente, quatro tarefas investigativas sobre números. Em termos de resultados, o desempenho dos alunos na atividade investigativa foi melhorando com o progresso na exploração das tarefas. Assim, na última tarefa, os alunos aperceberam-se da importância da organização dos dados, da procura de regularidades e padrões, da formulação de conjeturas e sua validação a partir de exemplos e da necessidade de justificar e argumentar para defender as suas opiniões. Por último, a autora do estudo salienta o empenho de alguns alunos vistos como mais fracos neste tipo de tarefas, particularmente ao não necessitarem de uma grande bagagem matemática para descobrirem relações entre números.

Já no estudo de Rocha (2002) participaram 19 alunos de uma turma do 7.º ano, dos quais cerca de metade estava a repetir o 7.º ano ou tinha repetido anos anteriores. Os alunos, também organizados em pequenos grupos, exploraram cinco tarefas sobre números, das quais são apresentadas apenas três no estudo relatado. Nos resultados do estudo evidencia-se o progresso dos alunos na atividade investigativa à medida que os alunos prosseguiram na exploração das atividades de investigação, designadamente na procura de padrões e regularidades, na formulação de questões e formulação de conjeturas. A autora considera, ainda, que os alunos desenvolveram alguma autonomia no trabalho investigativo, melhoraram o modo de trabalhar em grupo e as formas de comunicar as suas ideias (oralmente ou por escrito). Por último, destaca-se que as tarefas em que os alunos se sentiram mais à-vontade foram aquelas em que não se requeriam pré-requisitos de anos anteriores, em termos de conteúdos matemáticos fundamentais para a exploração da tarefa.

Segundo Batanero (2001), na concretização de uma investigação estatistica os alunos utilizam metodologias quantitativas, integrando a linguagem e os métodos estatísticos num processo mais global de investigação. Neste âmbito, Sousa (2002) implementou uma investigação com uma turma do 6.º ano, com idades dos 11 aos 12 anos, organizados em pequenos grupos. Estes alunos tinham experiência anterior de trabalhar em grupo e de realizar investigações matemáticas. Na realização da investigação "Como é o aluno típico da minha turma", os alunos assumiram um papel ativo, manifestaram-se agradados com a atividade, trabalharam conteúdos dos temas "Estatística" e "Números e Cálculo" e promoveu-se a interdisciplinaridade e hábitos de reflexão e capacidade crítica. Em jeito de conclusão final, a autora refere: “[…] penso que as investigações estatísticas constituem um tipo de experiência de aprendizagem que contribui para que os alunos desenvolvam a capacidade de ler e interpretar a realidade, descentrando-se da sua própria imagem […]” (SOUSA, 2002, p. 95).

Finalmente, Fernandes, Viseu, Fernandes, Silva e Duarte (2009) conduziram um estudo com 19 alunos do ensino profissional, organizados em quatro grupos e em que a maioria deles apresentava uma ou mais repetências no seu percurso escolar. Os grupos realizaram investigações estatísticas que se prolongaram por doze aulas, versando temas diferentes, ligadas ao desporto e a hábitos alimentares e tabágicos. Tendo em conta que eram alunos com muitas dificuldades a matemática, os autores concluíram que os resultados foram satisfatórios e salientaram que todos eles concluíram a unidade de Estatística, contrariamente ao que aconteceu em outras unidades temáticas. Os alunos valorizaram a metodologia adotada, designadamente, o uso da folha de cálculo, o trabalho de grupo, o interesse da Estatística para as suas vidas, a forma de aprender Estatística e a argumentação.

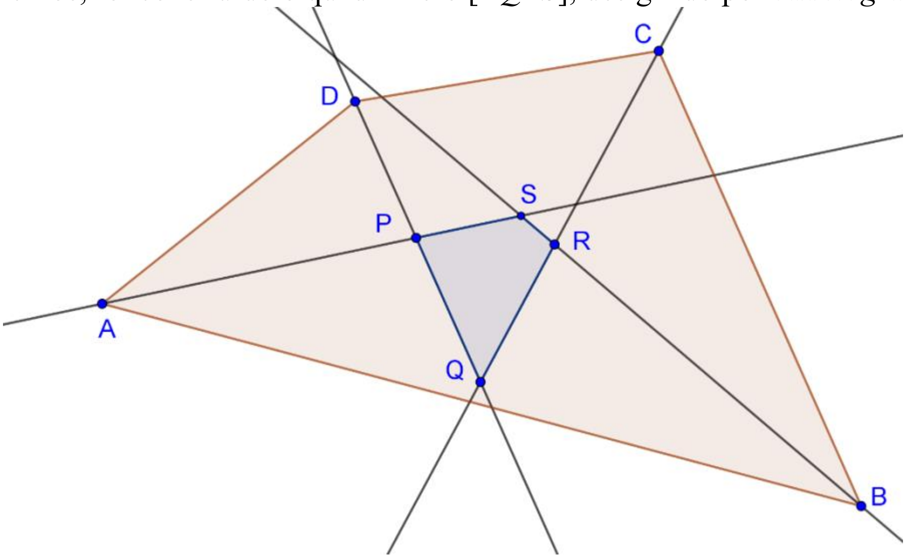
EXPLORAÇÃO DA TAREFA DE INVESTIGAÇÃO

Nesta secção explora-se, com o GeoGebra, a tarefa de investigação geométrica, na perspetiva do autor, sobre o estudo do *bissetograma* de um dado quadrilátero, no que diz respeito à sua construção, à possibilidade de o construir e à sua caraterização e propriedades.

No Quadro 1 apresenta-se o enunciado da tarefa investigativa que se vai explorar ao longo desta secção.

Quadro 1 – Enunciado da tarefa de investigação.

Na figura seguinte está representado um quadrilátero [*ABCD*] e, a partir das bissetrizes dos seus ângulos internos, foi construído o quadrilátero [*PQRS*], designado por *bissetograma*.



1. Recorrendo ao GeoGebra, efetuar a construção da figura anterior e arrastar os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, um de cada vez, de modo a obter diferentes quadriláteros.
2. Nem sempre é possível definir o *bissetograma* [*PQRS*], definido a partir das bissetrizes do quadrilátero inicial [*ABCD*]. Quando é que isso acontece?
3. Caracterizar o *bissetograma* que se obtém para cada tipo de quadrilátero em que é possível construí-lo.
4. Verificar que o *bissetograma* [*PQRS*] é cíclico, ou seja, é inscritível numa circunferência.

Fonte: elaboração do autor.

Na exploração da tarefa investigativa aborda-se, sequencialmente, cada uma das suas quatro subtarefas.

SUBTAREFA 1

Para explorar esta subtarefa, deve-se começar por construir um quadrilátero qualquer [*ABCD*] usando a ferramenta *Polígono* do GeoGebra. Uma vez construído o quadrilátero, desenham-se as quatro bissetrizes correspondentes a cada um dos quatro ângulos internos do quadrilátero usando a ferramenta *Bissetriz*. Ora, os quatro pontos de interseção dessas bissetrizes definem o novo quadrilátero, bastando usar novamente à ferramenta *Polígono* do GeoGebra e ligar esses pontos por segmentos de reta para obter o quadrilátero [*PQRS*], que é o *bissetogramo*.

Uma vez definidos os quadriláteros [*ABCD*] e [*PQRS*], arrastamos, cuidadosamente, cada um dos vértices *A*, *B*, *C* e *D* de modo a se definirem os diferentes tipos de quadriláteros. Especificamente, o quadrilátero [*ABCD*], por arrastamento dos seus vértices, deve ser transformado, sucessivamente, num trapézio, num paralelogramo, num retângulo, num losango, num quadrado e num papagaio, observando-se, atentamente, em cada caso, o tipo de quadrilátero correspondente a [*PQRS*].

Atente-se que no processo de arrastamento dos vértices *A*, *B*, *C* e *D*, tendo em vista definir os diferentes tipos de quadriláteros [*ABCD*], pode facilitar ativar no GeoGebra a rede quadriculada de fundo, pois, desse modo, é possível, de forma rápida, estabelecer a localização dos vértices que satisfazem os atributos dos diferentes tipos de quadriláteros que se pretendem construir.

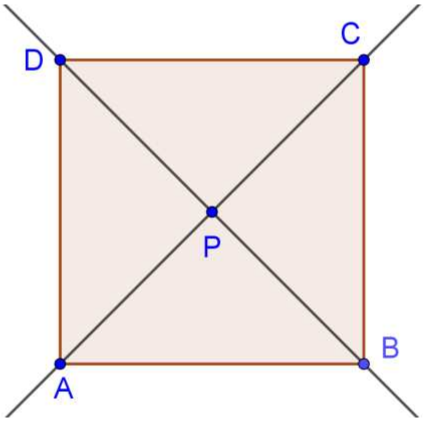
SUBTAREFA 2

A partir da subtarefa 1, antes explorada, reuniu-se evidência sobre quais os tipos de quadriláteros [*ABCD*] que permitem definir ou não o *bissetogramo*. Concretamente, não é possível definir o *bissetogramo* quando o quadrilátero [*ABCD*] é um quadrado, um losango ou um papagaio. Seguidamente, explora-se, com maior detalhe, cada um destes tipos de quadrilátero.

QUADRADO

Apresenta-se na Figura 2 o quadrado [*ABCD*] e o processo de construção do possível *bissetogramo*.

Figura 2 - Construção do quadrado e do possível *bissetogramo*.



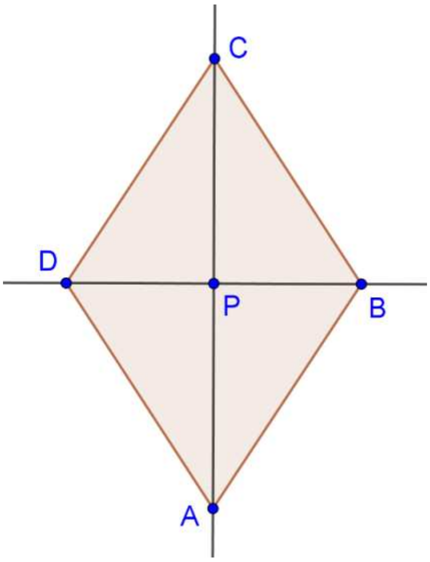
Fonte: elaboração do autor.

Observando a construção da Figura 2, verifica-se que as bissetrizes dos ângulos internos opostos do quadrado [*ABCD*] se sobrepõem e coincidem com as retas suporte das diagonais do quadrado, as retas *AC* e *BD*. Em consequência, no caso do quadrado, não é possível definir qualquer *bissetogramo*, o qual se degenera num ponto, concretamente o ponto *P*.

LOSANGO

Apresenta-se na Figura 3 o losango [*ABCD*] e o processo de construção do possível *bissetogramo*.

Figura 3 - Construção do losango e do possível *bissetogramo*.



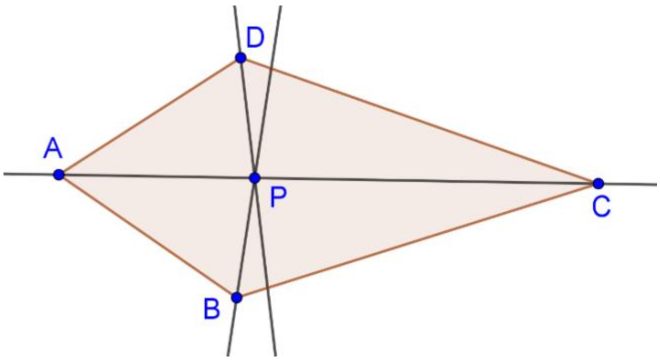
Fonte: elaboração do autor.

Tal como no caso do quadrado, observando a construção da Figura 3, verifica-se que as bissetrizes dos ângulos internos opostos do losango [*ABCD*] se sobrepõem e coincidem com as retas suporte das diagonais do quadrado, as retas *AC* e *BD*. Em consequência, também no caso do losango, não é possível definir qualquer *bissetograma*, o qual se degenera num ponto, concretamente o ponto *P*.

Papagaio

Na Figura 4 apresenta-se o papagaio [*ABCD*] e o processo de construção do possível *bissetograma*.

Figura 4 - Construção do papagaio e do possível *bissetograma*.



Fonte: elaboração do autor.

No papagaio, por observação da construção da Figura 4, verifica-se que as bissetrizes dos ângulos internos de vértices *A* e *C* estão contidas na reta *AC*, a qual contém a diagonal [*AC*] do papagaio. Já as outras duas bissetrizes, contidas nas retas *BP* e *DP*, são distintas e intersetam-se no ponto *P*, que se situa sobre a diagonal [*AC*] do papagaio. Note-se que os triângulos [*ABX*] e [*ADX*] são congruentes desde que o ponto *X* pertença à diagonal [*AC*] do papagaio. Ora, como os triângulos [*ABP*] [*ADP*] são congruentes, *P* é um dos *X* e, portanto, pertence à diagonal [*AC*]. Logo, as bissetrizes do papagaio intersetam-se todas no ponto *P*, concluindo-se que, também no caso do papagaio, não é possível definir qualquer *bissetograma*, degenerando-se nesse ponto P.

Na Figura 4 apresenta-se um papagaio que é um quadrilátero não trapézio. Contudo, o papagaio também pode ser um quadrado ou um losango, pois em ambos estes quadriláteros as diagonais são perpendiculares e pelo menos uma delas bisseta a outra. Porém, como foi verificado anteriormente, também não é possível definir qualquer *bissetograma* para o caso do quadrado e do losango, mantendo-se válida, também nesses casos, a conclusão obtida para o papagaio não trapézio

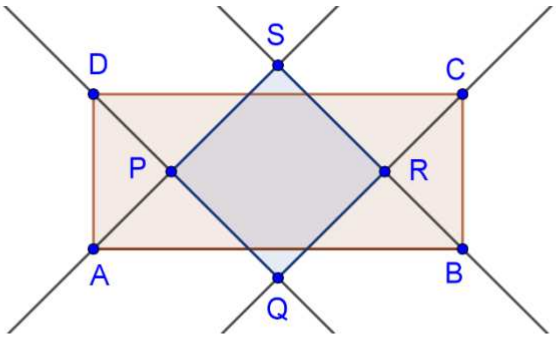
SUBTAREFA 3

Nesta subtarefa pretende-se caracterizar o *bissetograma* de cada tipo de quadrilátero em que é possível defini-lo. Ora, da resolução da subtarefa 2, concluiu-se que o quadrilátero quadrado, losango e papagaio não permitem a construção do *bissetograma*; portanto, aqui, caracterizam-se os *bissetogramos* relativos ao retângulo, paralelogramo, trapézio e não trapézio.

RETÂNGULO

Na Figura 5 apresenta-se a construção do *bissetogramo* [*PQRS*] correspondente ao retângulo [*ABCD*].

Figura 5 - Construção do *bissetogramo* relativo ao retângulo.



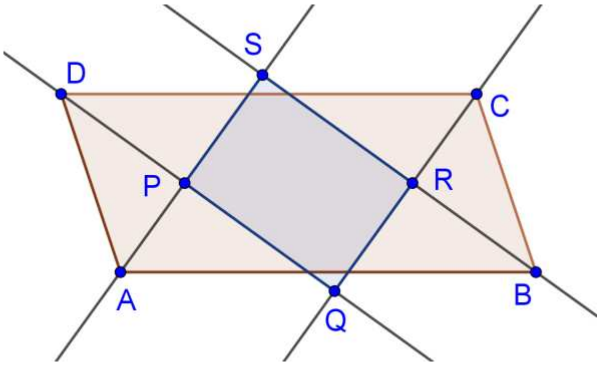
Fonte: elaboração do autor.

Pela Figura 5 constata-se que o quadrilátero [*PQRS*] é o *bissetogramo* do retângulo [*ABCD*]. Face à construção efetuada, verifica-se que o *bissetogramo* [*PQRS*] é um quadrado, o que resulta de as bissetrizes dos ângulos consecutivos serem perpendiculares e ter os lados congruentes. A perpendicularidade das bissetrizes resulta de os triângulos definidos pelas bissetrizes e lados do retângulo terem de amplitude 45º, 45º e 90º (por exemplo, no caso do triângulo [*ADP*], o ângulo de vértice *P* é reto e a amplitude de cada um dos outros dois é 45º). No caso dos lados, observa-se que os triângulos [*ABS*] e [*DQC*] são congruentes e isósceles, logo [*AS*]≅[*BS*]≅[*CQ*]≅[*DQ*]. Por outro lado, os triângulos [*ADP*] e [*BCR*] também são isósceles e congruentes, logo [*AP*]≅[*DP*]≅[*BR*]≅[*CR*]. Ora, retirando estes últimos segmentos de reta aos anteriores, respetivamente, conclui-se que [*PS*]≅[*SR*]≅[*QR*]≅[*PQ*]. Portanto, os lados são congruentes.

PARALELOGRAMO

Na Figura 6 apresenta-se a construção do *bissetograma* [*PQRS*] correspondente ao paralelogramo [*ABCD*].

Figura 6 - Construção do *bissetograma* relativo ao paralelogramo.



Fonte: elaboração do autor.

Pela Figura 6 constata-se que o quadrilátero [*PQRS*] é o *bissetograma* do paralelogramo [*ABCD*]. Através da construção efetuada, verifica-se que o *bissetograma* é um retângulo porque todos os seus ângulos são retos. A confirmação de que todos os ângulos do *bissetograma* são retos ou, equivalentemente, as bissetrizes são perpendicularidade resulta imediatamente da propriedade de que num paralelogramo quaisquer dois dos seus ângulos internos consecutivos são suplementares.

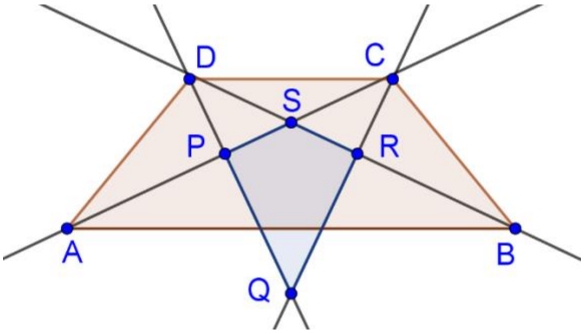
A conclusão anterior só é válida quando o paralelogramo não é retângulo nem losango. Como se mostrou anteriormente, o *bissetograma* do retângulo (não quadrado) é um quadrado e os *bissetogramas* do quadrado e do losango reduzem-se a um único ponto, não constituindo, portanto, um quadrilátero.

TRAPÉZIO

No estudo da caracterização do *bissetograma* do trapézio, estudam-se, separadamente, o caso do trapézio isósceles, do trapézio retângulo e do trapézio escaleno.

Na Figura 7 representa-se o *bissetograma* [*PQRS*] relativo ao trapézio isósceles [*ABCD*].

Figura 7 - Construção do *bissetogramo* relativo ao trapézio isósceles.



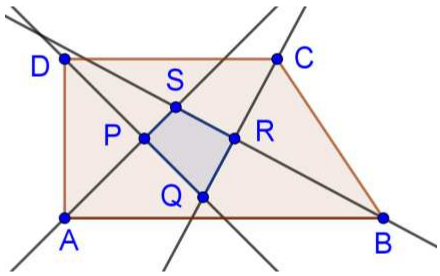
Fonte: elaboração do autor.

Pela construção do *bissetogramo* depreende-se que se trata de um papagaio, que não é quadrado nem retângulo. Sendo o triângulo [*ABS*] isósceles, conclui-se que [*AS*]≅[*BS*]; e sendo os triângulos [*APD*] e [*BCR*] congruentes, conclui-se que [*AP*]≅[*BR*]. Retirando estes últimos segmentos de reta aos anteriores, respetivamente, conclui-se que [*PS*]≅[*RS*]. Por outro lado, o triângulo [*DQC*] é também isósceles, logo [*DQ*]≅[*CQ*]; e sendo os triângulos [*DPC*] e [*RCD*] congruentes, conclui-se que [*DP*]≅[*CR*]. Retirando estes últimos segmentos de reta aos anteriores, respetivamente, conclui-se que [*PQ*]≅[*RQ*]. Logo, o *bissetogramo* [*PQRS*] é um papagaio, pois tem dois pares de lados consecutivos congruentes, [*PS*]≅[*RS*] e [*PQ*]≅[*RQ*].

Naturalmente, que esta conclusão é válida apenas quando o trapézio não é paralelogramo.

Na Figura 8 representa-se o *bissetogramo* [*PQRS*] relativo ao trapézio retângulo [*ABCD*].

Figura 8 - Construção do *bissetogramo* relativo ao trapézio retângulo.

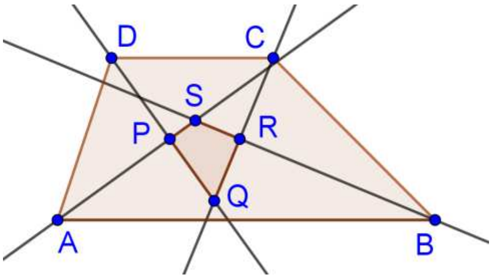


Fonte: elaboração do autor.

Pela construção do *bissetogramo* depreende-se que se trata de um não trapézio, que não é papagaio. Naturalmente que esta conclusão é válida apenas quando o trapézio não é paralelogramo.

Na Figura 9 representa-se o *bissetograma* [*PQRS*] relativo ao trapézio escaleno [*ABCD*].

Figura 9 - Construção do *bissetograma* relativo ao trapézio escaleno.



Fonte: elaboração do autor.

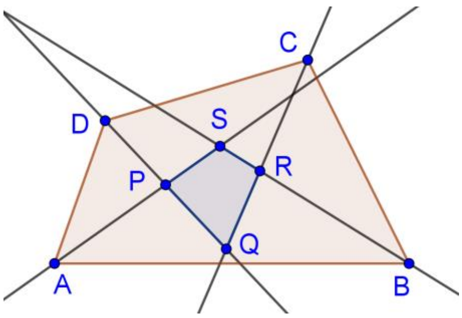
Pela construção do *bissetograma* depreende-se que se trata de um não trapézio, que não é papagaio. Naturalmente, que esta conclusão é válida apenas quando o trapézio não é paralelogramo.

Portanto, tanto no caso do trapézio retângulo como no caso do trapézio escaleno o *bissetograma* é um não trapézio, que não é papagaio.

NÃO TRAPÉZIO E NÃO PAPAGAIO

Na Figura 10 representa-se o *bissetograma* [*PQRS*] relativo ao não trapézio [*ABCD*], que não é papagaio.

Figura 10 - Construção do *bissetograma* relativo ao não trapézio e não papagaio.



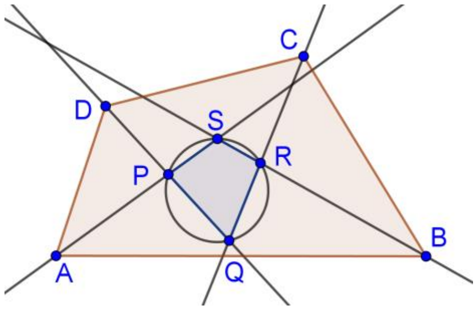
Fonte: elaboração do autor.

Por construção do *bissetograma* depreende-se que se trata de um não trapézio, que não é papagaio. Naturalmente que esta conclusão é válida apenas quando o não trapézio não é papagaio, uma vez que o papagaio não permite construir qualquer *bissetograma*.

SUBTAREFA 4

Nesta subtarefa pretende-se verificar que o *bissetogramo*, sendo possível contruí-lo, é um quadrilátero cíclico, ou seja, é inscritível numa circunferência. Seguidamente, na Figura 11, constrói-se o *bissetogramo* [*PQRS*] relativo ao quadrilátero [*ABCD*], que é um não trapézio e não papagaio.

Figura 11 - Construção do *bissetogramo* relativo ao não trapézio e não papagaio.



Fonte: elaboração do autor.

Pela Figura 11 observa-se que o *bissetogramo* [PQRS] é inscritível numa circunferência. Mostra-se, a seguir, que essa conclusão se verifica para qualquer *bissetogramo* relativo a um não trapézio e não papagaio. Para tal, recorre-se à propriedade: "Um quadrilátero é inscritível numa circunferência se, e só se, a soma das amplitudes dos seus ângulos opostos é igual à amplitude de um ângulo raso, ou seja, 180°".

No caso da Figura 11 represente-se por $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ as amplitudes de cada um dos ângulos internos do quadrilátero [*ABCD*] e por $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ e $\hat{S}$ as amplitudes de cada um dos ângulos internos do *bissetogramo* [*PQRS*].

Por outro lado, considerando o triângulo [*CDQ*], tem-se que $\hat{Q} = 180° - \frac{\hat{C}}{2} - \frac{\hat{D}}{2}$; considerando o triângulo [*ABS*], tem-se que $\hat{S} = 180° - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2}$. Daí resulta que $\hat{Q} + \hat{S} = 180° - \frac{\hat{C}}{2} - \frac{\hat{D}}{2} + 180° - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 360° - \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{2} = 360° - \frac{360°}{2} = 180°$, pois $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$ porque é soma das amplitudes dos ângulos internos do quadrilátero [*ABCD*]. Concluímos, assim, que a soma das amplitudes dos ângulos opostos *Q* e *S* é 180°.

Analogamente, considerando agora os triângulos [*ADP*] e [*BCR*], conclui-se que a soma das amplitudes dos ângulos opostos *P* e *R* também é 180°. Em alternativa, pode-se concluir que $\hat{P} + \hat{R} = 180°$ porque $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = 360°$ (soma das amplitudes dos ângulos internos do quadrilátero [*PQRS*]) e $\hat{Q} + \hat{S} = 180°$ (como foi visto antes).

Portanto, em conclusão, sendo a soma das amplitudes dos ângulos opostos do *bissetogramo* 180°, pode-se circunscrever-lhe uma circunferência.

O processo, usado antes, para mostrar que o *bissetogramo* do não trapézio e não papagaio é inscritível numa circunferência pode ser replicado nos *bissetogramos* construídos a partir de outros tipos de quadriláteros, designadamente, a partir do trapézio, do paralelogramo e do retângulo. Assim, conclui-se que em qualquer *bissetogramo*, passível de ser construído a partir de um quadrilátero, é sempre possível inscrevê-lo numa circunferência.

CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES

No presente estudo explorámos uma tarefa de investigação em Geometria. Mais precisamente, exploraram-se várias subtarefas: construir *bissetogramos*, definidos pelos pontos de interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um quadrilátero; estudar para que tipos de quadriláteros é possível construir o *bissetogramo*; caracterizar os *bissetogramos*; e verificar que eles são quadriláteros cíclicos.

Da exploração das várias subtarefas salientam-se conclusões relativas ao uso do GeoGebra e relativas ao estudo dos quadriláteros. No caso do GeoGebra, em todas as subtarefas ficou patente que a sua natureza dinâmica, ao permitir produzir rapidamente muitos exemplos através do arrastamento de objetos da figura, possibilitou gerar conjeturas que depois, eventualmente, se confirmaram por processos analíticos. Isto foi particularmente evidente no estudo dos tipos de quadriláteros em que é possível definir o *bissetogramo*, na caracterização dos *bissetogramo*s e na verificação do *bissetogramo* como quadrilátero inscritível numa circunferência.

No caso dos quadriláteros, em alguns casos, evidenciou-se a possibilidade de construir uma mesma figura geométrica a partir atributos essenciais distintos e de uma regra (ou definição) do conceito também distinta. Essas diferentes construções do mesmo quadrilátero revestem-se de grande importância para a aprendizagem dos alunos ao permitir-lhes aprofundar o seu conhecimento sobre os quadriláteros (SKEMP, 1993), possibilitando-lhes reconhecer outras propriedades e novas definições.

Por outro lado, por vezes, também as relações entre quadriláteros são tratadas, permitindo comparar os elementos dos correspondentes conceitos. Nesse sentido, o estudo dos vários quadriláteros pode ser visto como uma etapa prévia ao estabelecimento de relações entre os conceitos, em que se destaca a relação de inclusão entre quadriláteros (CROWLEY, 1987), sendo que tais relações constituem outro aspeto importante da aprendizagem sobre os quadriláteros (NOVAK; GOWIN, 1996; SKEMP, 1993).

A tarefa de investigação, aqui explorada, mostrou ter grande potencial em termos do grau de desafio e de abertura (PONTE, 2005), embora na abertura tenha sido fornecida alguma orientação através dos enunciados das subtarefas. Tal orientação torna-se necessária uma vez que, tendo em consideração tratar-se de uma tarefa invulgar, dificilmente o aluno divisaria um percurso de investigação como aquele aqui delineado, ainda mais no caso de se tratar de alunos com pouca experiência em explorar tarefas de investigação.

Adicionalmente, a tarefa proposta tem muito potencial para ser explorada por alunos, quer do ensino básico quer secundário, pois, lida com o essencial da atividade matemática, estimula um pensamento globalizante, requer um maior envolvimento dos alunos e permite reforçar aprendizagens mais elementares e desenvolver um pensamento mais complexo (ABRANTES et al. 1999).

No caso de Portugal, tendo em conta as aprendizagens prévias requeridas para a exploração desta tarefa, ela pode ser proposta a alunos do último ano do ensino básico (ensino básico: do 1.º ao 9.º ano) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2021) ou a alunos do ensino secundário (ensino secundário: do 10.º ao 12.º ano) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2023).

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Eds.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1999.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2001.

BATANERO, C.; DÍAZ, C.; CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P. (2011). Enseñanza de la Estadística a través de proyectos. In: BATANERO, C.; DÍAZ, C. (Eds.). **Estadística con Proyectos**. Granada: Universidad de Granada, 2011. p. 9-46.

BURRILL, G. Simulation as a tool to develop statistical understanding. In: PHILLIPS, B. (Ed.). **Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics**. Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education, 2002.

CROWLEY, M. The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In: LINDQUIST, M.; SHULT, A. (Eds.). **Learning and Teaching Geometry**, K-12 (1987 Yearbook). Reston, VA: NCTM, 1987. p. 1-16.

FERNANDES, J. A. Estudo dos quadriláteros enquanto conceitos geométricos com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, in press.

FERNANDES, J. A. Exploração de uma propriedade do triângulo retângulo usando o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 11, n. 1, p. 85-100, 2022a.

FERNANDES, J. A. Operar com números positivos no GeoGebra: implicações didáticas. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 11, n. 2, p. 72–91, 2022b

FERNANDES, J. A.; VISEU, F.; FERNANDES, M. C.; SILVA, M.; DUARTE, P. Uma intervenção de ensino em Estatística no ensino profissional através de investigações estatísticas. In: SILVA, B. D.; ALMEIDA, L.; BARCA, A.; PERALBO, M. (Orgs.). **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2009. p. 3441-3455.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Secundário. Lisboa: Autor, 2023.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Básico. Lisboa: Autor, 2021.

NOVAK, J.; GOWIN, B. **Aprender a aprender**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspeto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa. Associação de Professores de Matemática, 2005. p. 13-34.

ROCHA, A. Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In: Grupo de Trabalho sobre Investigação (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 99-124.

SEGURADO, I. O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In: Grupo de Trabalho sobre Investigação (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 57-73.

SKEMP, R. **The psychology of learning mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

SOUSA, O. Investigações estatísticas no 6.º ano. In: Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa. Associação de Professores de Matemática, 2002. p. 75-97.

VISEU, F.; FERNANDES, J. A.; GOMES, A. A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: VISEU, F.; GOMES, A. (Coords.). **Resolução de Problemas de Geometria**. Raleigh, NC: Lulu, 2015. p. 3-17.

Submetido em 10/05/2023.

Aprovado em 02/10/2023.