ISSN 2177 - 9309 https://doi.org/10.51359/2177-9309.2023.256882

Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ANÁLISE DE ERROS EM DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS: um estudo de dificuldades de licenciandos em matemática

Analysis of errors in Geometric Demonstrations: a study of difficulties of undergraduates in mathematics

Jamile dos Santos Souza Bahia
Mestranda em Ensino Filosofia e História das Ciências
Universidade Federal da Bahia – Bahia – Brasil
jamile_99@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5263-9840

Maridete Brito Cunha Ferreira
Doutora em Educação Matemática
Universidade do Estado da Bahia – Bahia – Brasil
mbferreira@uneb.br
https://orcid.org/0000-0003-1763-5769

Saddo Ag Almouloud
Doutor em Matemática e Aplicações
Universidade Federal da Bahia – Bahia - Brasil
saddoag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Esse trabalho é um recorte de uma pesquisa cujo objetivo é apresentar uma reflexão sobre dificuldades de licenciandos em matemática com provas e demonstrações geométricas a partir da análise de erros relacionados à validação empírica. Apresentamos resultados obtidos da análise de uma das três categorias de erros que emergiram da análise das respostas de três questões contidas em uma prova aplicada a uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, na disciplina Geometria Plana, que foi denominada validação empírica, além de uma síntese do processo de pesquisa até a emersão dessas categorias. A análise foi feita segundo pressupostos da análise de erros, que por sua vez se fundamenta na análise de conteúdo. Para interpretação e inferência dos resultados nos embasamos no referencial teórico sobre demonstrações e os tipos de apreensão, além de apontamentos sobre a análise de erros. Destacam-se dificuldades dos licenciandos em utilizar a figura de forma heurística, ou seja, como suporte à demonstração, bem como uma tendência a recorrerem, sobretudo, à apreensão perceptiva, em detrimento da apreensão discursiva.

Palavras-Chave: Provas e Demonstrações, Análise de Erros, Validação Empírica, Dificuldades, Apreensões.

Abstract

This work is part of a research work whose objective is to present a reflection on the difficulties of undergraduate students in mathematics with proofs and geometric demonstrations based on the analysis of errors related to empirical validation. We present results obtained from the analysis of one of the three categories of errors that emerged from the analysis of the answers to three questions contained in a test applied to a class of the Degree in Mathematics at the State University of Bahia, in the discipline Plane Geometry, which was called empirical validation, in addition to a synthesis of the research process until the emergence of these categories. The analysis was carried out according to assumptions of error analysis, which in turn is based on content analysis. For the interpretation and inference of the results, we based ourselves on the theoretical framework of demonstrations and types of apprehension, in addition to notes on the analysis of errors. Difficulties of undergraduates in using the figure in a heuristic way stand out, that is, as support for the demonstration, as well as a tendency to resort, above all, to perceptive apprehension, to the detriment of discursive apprehension.

Keywords: Evidence and demonstrations, Error analysis, Empirical validation, Difficulties, Apprehensions.

INTRODUÇÃO

Esse artigo é um recorte de um trabalho de conclusão de curso da primeira autora, cujo objetivo foi compreender dificuldades enfrentadas por licenciandos em matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB) no processo de demonstração em Geometria Plana, a partir da análise de erros cometidos por eles nesse processo. Neste artigo, objetivamos apresentar uma reflexão sobre dificuldades de licenciandos com demonstrações geométricas a partir da análise de uma categoria de erros denominada *validação empírica*.

A geometria, assim como outros campos da matemática, desde seus primórdios, revelou-se uma área essencial na vida do ser humano. Sua história acompanha a evolução intelectual e as necessidades do homem, tendo início com a geometria subconsciente, perpassando pela geometria científica, até chegar à geometria demonstrativa (DOMINGUES, 1995).

Desse modo, inicialmente, o ser humano começou a utilizá-la para desempenhar necessidades básicas, tais quais medir e se localizar para, só depois de um longo processo, dar-lhe status de ciência, passando a abordá-la nos mais diversos níveis de ensino. Como componente curricular, a geometria se tornou essencial, pois, segundo Lorenzato (1995), sem ela, o estudante não conseguiria desenvolver o pensamento geométrico, bem como dificilmente poderia resolver problemas cotidianos que fossem geometrizados.

Contudo, embora tão importante, a geometria passou por um longo processo de abandono, reforçado por movimentos como o Movimento da Matemática Moderna. O tema tem sido abordado desde a década de 1990, por autores como Lorenzato (1995) e Pavanello (1993). Percebeu-se que na educação básica, principalmente, poucos professores propunham metodologias que permitissem desenvolver o pensamento geométrico do estudante, ou até mesmo pouco se estudava a geometria, em particular a geometria plana (SANTOS; NACARATO, 2014).

Tal realidade não tem consequências apenas na educação básica, como também impacta diretamente a educação superior, sobretudo os cursos de licenciatura em matemática, pois estudantes que teoricamente já deveriam ter tido contato com conceitos geométricos na educação básica têm acentuadas dificuldades, principalmente com a prática de demonstrações. Segundo Almouloud (2009, p. 02), essas dificuldades "[...] são inúmeras e vão desde se reconhecer uma demonstração num livro de matemática [...], identificar na proposição os dados que fazem parte da hipótese e da tese até identificar se a proposição possui condições necessária e suficiente"

Uma das principais dificuldades dos licenciandos está em reconhecer a necessidade da demonstração. Para muitos, algo tão "óbvio" não precisa ser demonstrado, sendo que tal obviedade, por vezes, não gera no discente o interesse por redigi-la, embora uma das várias funções da demonstração seja a de verificação. Em outras palavras, comumente os matemáticos redigem uma demonstração quando já estão seguros da veracidade de uma dada proposição (DE VILLIERS, 2001). Diante disso, a partir da análise de erros, a pesquisa maior buscou compreender as dificuldades de licenciandos em matemática em demonstrar.

Este artigo é uma síntese do processo de análise do qual emergiram as três categorias de erros apontadas no trabalho supracitado, e apresenta resultados obtidos especificamente da análise da categoria denominada validação empírica, visto que a limitação de espaço não permite abordar as demais. Cabe ressaltar que todas as categorias emergiram a partir da análise de três questões contidas na prova aplicada a uma turma do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado da Bahia, na disciplina de Geometria Plana, segundo pressuposto da análise de erros de Cury (2007), que por sua vez se fundamenta na análise de conteúdo de Laurence Bardin.

Reflexões teóricas sobre prova e demonstração

Fetissov (1995, p.22), concebe a demonstração como “um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios através dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição”, isto é, uma demonstração é construída tomando como base argumentos demonstrados anteriormente ou então tomados como verdades, sendo estes os chamados axiomas que formalmente são definidos como “[...] uma verdade evidente por si mesma e comum a todos os campos de estudos” (EUCLIDES *apud* FETISSOV, 1995, p. 09).

Vale destacar que é comum entender a demonstração como uma prova ou uma explicação, porém, embora no campo da matemática pura sejam sinônimas, é importante diferenciar esses termos para fins de ensino, pois essa distinção e o estabelecimento de níveis de prova torna possível inserir a demonstração na educação básica (BALACHEFF, 1982). A esse respeito Almouloud (2007), destaca:

> A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração.
> As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro.
> As demonstrações são provas particulares com as seguintes características*: i)* são as únicas aceitas pelos matemáticos. *ii)* respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas. *iii)* trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (BALACHEFF, 1982 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 03 – acréscimos nossos).

Compreender estas diferenças se torna importante ao passo que situa o estudante sobre o que precisa ser feito em cada situação e o que deve ser estabelecido ao se construir uma demonstração, evitando equívocos no momento de sua sistematização. Além disso, por ser um bloco da matemática que em muitos casos precisa de apoio das figuras, algumas interpretações são essenciais, tais quais os tipos de apreensão e suas diferenças, sendo elas as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras, no sentido de Duval (2012).

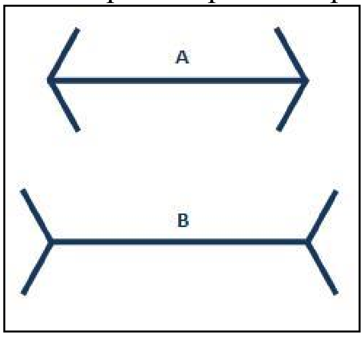
Por terem sido desenvolvidas especificamente por Raymond Duval, as ideias mencionadas neste trabalho sobre os tipos de apreensão foram, em sua maioria, fundamentadas em seu artigo de 2012. O autor assevera que a apreensão sequencial é "[...] explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura" (DUVAL, 2012, p. 120).

A apreensão operatória refere-se a possíveis modificações que podem ser feitas em uma figura inicial, e nas reorganizações plausíveis destas modificações, das quais destaca-se a reconfiguração intermediária, um tipo de modificação mereológica, que "[intervêm] nos problemas iniciais de Geometria que podem ser propostos aos alunos, cujas resoluções não requerem a utilização de um *corpus* de definições e de teoremas" (DUVAL, 2012, p. 127). Já a perceptiva ocorre de forma imediata, é a leitura inicial que é feita sobre dada figura, diferentemente da interpretação discursiva:

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. (DUVAL, 2012, p. 120).

De acordo com Moretti e Brandt (s.d.), uma figura não é aquilo que ela mostra, mas o que ela é levada a mostrar, em geral, o que o enunciado diz sobre ela. Embora em uma dada figura pareça haver um ângulo reto, se no enunciado disser que este mesmo ângulo é agudo, em termos de problemas em geometria, deve prevalecer o que é dito no enunciado, que é a interpretação discursiva do problema. Consideremos o exemplo da Figura 1, embasado no questionamento: qual dos segmentos é maior?

Figura 1 - Exemplo de apreensão perceptiva



Fonte: http://mentesbrilhants.blogspot.com/2011/06/ilusao-de-muller-lyer-figura-seguinte.html

Somos tentados a dizer que o segmento B é maior; estaria atuando, então, nossa apreensão perceptiva. No entanto, medindo ambos os segmentos, constataríamos que têm tamanhos iguais e a posição das setas é que dá a impressão de que um é maior que o outro. Tem-se então um exemplo de que uma figura não é só aquilo que aparenta ser, portanto "[...] é preciso ver a figura geométrica a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes" (MORETTI; BRANDT, s.d., p. 02). Contudo, a grande maioria dos estudantes tende a se agarrar somente à apreensão perceptiva da figura, utilizando-as, em alguns casos, para validar conjecturas.

Na mesma linha de pensamento, Duval (2012, p. 133) destaca que "[...] as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese. Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva". O autor reforça que essa compreensão sobre a teorização das figuras geométricas, na qual a apreensão perceptiva deve-se se submeter à apreensão discursiva, constitui um dos caminhos de acesso à demonstração. É muito comum que os estudantes não sintam necessidade de uma demonstração por considerarem inútil demonstrar o que "se vê" sobre a figura. Além disso, muitos confundem as hipóteses com o que é para ser demonstrado, isto é, muitas vezes usam a tese para provar a própria tese (DUVAL, 2012).

Duval (2012) esclarece que a aplicação de problemas cujo resultado parece incerto não solucionará tais problemas, pois, agindo de tal maneira, substitui-se o obstáculo sem dar ao estudante a oportunidade de conhecê-lo e superá-lo. Uma atividade de demonstração está envolta em uma rede semântica de propriedades e objetos, não podendo ser atribuída apenas a uma figura (DUVAL, 2012). Assim, "a apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável" (DUVAL, 2012, p. 135). Ou seja, alinhar as apreensões perceptiva e discursiva para o desenvolvimento de uma demonstração coesa, mas levar em consideração a relação de subordinação entre elas.

A importância dos erros nos processos de ensino e de aprendizagem

Nos processos de ensino e aprendizagem, desde cedo o estudante acostuma-se a temer o erro, chegando, por vezes, a não tentar resolver um problema por medo de errar. Segundo Fusiger (2015),

> Em muitos casos os erros dos alunos são vistos, na educação em geral e principalmente em Matemática, como algo rotulado, pelo qual o estudante deve ser simplesmente punido, sem a preocupação da compreensão de como ocorreu. Dessa forma, o erro acaba sendo relegado sem ser explorado e consequentemente leva o aluno a cometê-lo em séries posteriores, sem se dar conta da sua verdadeira origem. (FUSIGER, 2015, p. 15).

Embora os erros possam revelar as dificuldades de alguns estudantes em elaborar um raciocínio para construir a resolução de problemas, nem sempre são observados do ponto de vista construtivo. Além disso, apesar de nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática ser comum que os estudantes cometam alguns erros, dificilmente são considerados dentro desses processos, ao contrário, são usados como taxativos de fracasso. Na contramão do pensamento citado acima, autores como Fiorentini (2006) defendem que o

> (...) erro escolar, na verdade, resulta do esforço dos alunos em participar do processo de aprendizagem, produzindo e negociando, a partir de seu mundo e de sua cultura, sentidos e significados sobre que se ensina e aprende na escola. E, nesse sentido, o erro não poderia ser visto como um mal a ser erradicado, mas como parte do processo de aprender e desenvolver-se intelectualmente. (FIORENTINI, 2006, p. 4)

Assim como os acertos surgem de tentativas, os erros também devem ser vistos como resultado dos esforços em aprender, tornando-os uma ferramenta auxiliar nesse processo. A utilização dos erros como ferramenta auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem também perpassa pela postura do professor diante dos erros dos estudantes, se este considera que os erros são elementos construtivos nesse processo e “[...] que o professor só conhece de fato as dificuldades dos seus alunos quando se preocupa com os erros que eles cometeram” (FUSIGER, 2015, p. 15).

Por conta desse potencial, há algumas décadas, a análise de erros como metodologia de ensino e pesquisa tem sido foco de estudos. Segundo Cury (2007), a análise da produção escrita dos estudantes vem sendo realizada de diferentes formas, dependendo da época, do local e dos pressupostos teóricos que predominavam quando foram desenvolvidas. Afirma também que desde o século XX, autores como Radatz (1979 *apud* Cury, 2007) levantaram dados a respeito dos estudos sobre erros realizados nos Estados Unidos e na Europa e, de acordo com ele, as investigações se distinguiam conforme as diferenças no que se refere a pesquisas educacionais e psicológicas, políticas educacionais e estruturas escolares.

Destaca também o papel da psicologia e ideias como as marxistas, por exemplo, nos estudos realizados nessa época, que, de certa forma, contribuíram para as distintas ideias trazidas pelos precursores da análise de erros, tais quais: Thorndike, mesmo que sua visão não tenha se perpetuado nas décadas seguintes, Hadamard, Poincaré, Brousseau, dentre outros:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. (BROUSSEAU, 1983, p. 17, *apud* CURY, 2007, p. 33)

Acreditamos que mais do que nunca, esses obstáculos precisam ser superados, não ignorados ou esquecidos. É preciso reconhecê-los como parte dos processos de ensino e aprendizagem e enxergá-los como produto dos esforços feitos pelos estudantes, ou seja, o erro deve ser utilizado como questionamento a respeito da viabilidade do resultado incorreto, ao invés de se tentar eliminá-lo (BORASI,1996).

Cury (2007) aponta as contribuições dos erros para pesquisa em um importante aporte teórico que denominou "taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa", na qual corrobora Borasi (1996) ao considerar os erros oportunidades para a pesquisa e aprendizagem. Baseado nessa taxionomia, desenvolveu suas pesquisas na área, reiterando que "As ideias desses precursores da análise de erros vêm sendo retomadas, aprofundadas, modificadas e iluminadas por novas teorias, de acordo com as concepções dos investigadores e os objetivos de suas pesquisas" (CURY, 2007, p. 38).

Os procedimentos e utilização da análise de erros como metodologia de pesquisa serão descritos no tópico seguinte, onde apresentamos a metodologia. Nesse tópico, apresentamos nosso caminhar metodológico que aborda desde questões teóricas sobre a metodologia utilizada no desenvolvimento dessa pesquisa à descrição de como ela foi empregada conforme nossa realidade.

METODOLOGIA

Esse trabalho é uma pesquisa qualitativa do tipo documental, que visa apresentar uma reflexão sobre dificuldades de licenciandos com provas e demonstrações geométricas a partir da análise de erros relacionados à validação empírica.

Classifica-se como qualitativa pois, conforme Moresi (2003), não requer a utilização de métodos e técnicas estatísticas, além de considerar "[...] que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números", o que entra em consonância com o intuito dessa pesquisa, visto que nela pretende-se explorar a subjetividade presente nas produções dos licenciandos envolvendo provas e demonstrações.

De acordo com Tozoni-Reis (2009, p. 30), "A pesquisa documental tem como principal característica o fato de que a fonte de dados, o campo onde se procederá a coleta dos dados, é um documento (histórico, institucional, associativo, oficial etc.)". Em particular, a pesquisa documental em educação é uma análise de documentos relevantes para o ensino e a educação (TOZONI-REIS, 2009). Portanto, considerando que a avaliação é um documento relevante no cenário da educação, pois pode ser utilizado para acompanhar a relação ensino e aprendizagem com vistas à obtenção de informações necessárias para a manutenção do diálogo entre os docentes e os educandos (SILVA, 2013), podemos caracterizar essa pesquisa como sendo do tipo documental.

A análise de erros é uma abordagem teórica defendida no Brasil por Helena Noronha Cury, e que foi detalhada no tópico que diz respeito às reflexões teóricas. Cabe ressaltar que, segundo Cury (2007), a análise de erros de uma produção escrita é uma atividade que, metodologicamente, se baseia na análise de conteúdo, especialmente se levarmos em conta as conceituações apresentadas em Bardin (1979), ou seja, ao analisarmos os erros, empregamos pressupostos da análise de conteúdo de Laurence Bardin, contudo, sob a perspectiva da análise de erros, que, nesta pesquisa, assumiu um caráter metodológico.

Ao apresentar os tipos de documentos possíveis de serem submetidos a tal método, a autora indica, por exemplo, respostas a questionários, testes ou experiências. Desta forma, "as respostas escritas de estudantes a questões de Matemática podem ser objeto de uma análise aprofundada e sistemática" (CURY; BISOGNIN; BISOGNIN, 2008, p. 02).

No caso da análise de erros, a análise aprofundada tem por objetivo detectar especificamente os erros para fins teóricos ou práticos, como, por exemplo, a exploração dos erros com os estudantes (BORASI, apud CURY, BISOGNIN e BISOGNIN, 2008), ou para compreender dificuldades por meio deles. Salientamos que

> Designa-se sob o termo de análise de conteúdo: um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitiam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1979, p. 42 *apud* CURY, 2019, p. 64).

Essa metodologia considera que uma atividade desenvolvida pelo estudante, uma demonstração feita por ele, por exemplo, carrega informações relevantes quanto ao seu conhecimento e como eles estão produzindo e recebendo o conteúdo.

De acordo com Cury (2007), Bardin destaca três etapas que são a base da análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Essas fases são alguns dos pressupostos empregados na análise de erros. Na primeira fase, organiza-se o material, começando pela escolha dos documentos, formulação de hipóteses e objetivos da análise, tomando como base a leitura flutuante. Feito isso, delimita-se o corpus, entendido como o conjunto de produções textuais sobre o qual o pesquisador irá se debruçar (CURY, 2007).

Na exploração do material, faz-se um estudo aprofundado do *corpus*, com procedimentos de unitarização e categorização. Cury (2007) enfatiza que unitarização é definida por Bardin como o processo de releitura do material para definir as unidades de análise, que podem ser “[...] palavras, frases, termos ou mesmo documentos em sua forma integral” (MORAES, 1999, p. 16, apud CURY, 2019, p. 66). Já “A categorização tem por primeiro objetivo (da mesma maneira que a análise documental), fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos” (BARDIN, 1979, p. 119 apud CURY, BISOGNIN e BISOGNIN, 2008, p. 03).

Na fase de tratamento dos resultados, descrevem-se as categorias, o que pode ocorrer por meio da apresentação de tabelas ou quadros. Segundo os apontamentos de Cury (2007), é importante produzir um “texto síntese”, explicando ao leitor o significado de cada classe. Destaca-se ainda que é necessário e importante ir além do que é exposto nos documentos, atingindo a última etapa da análise, a interpretação, que visa alcançar a “[...] compreensão mais aprofundada do conteúdo das mensagens mediante inferência e interpretação” (MORAES, 1999, p. 24, apud CURY, 2019, p. 67).

Em posse de e fundamentadas nas teorias apresentadas, desenvolvemos nossa pesquisa conforme os aspectos procedimentais apresentados abaixo, sendo que contextualizamos nossa pesquisa nos fundamentos teóricos da metodologia supramencionada, visando a categorização e análise dos erros cometidos pelos participantes da pesquisa.

Nesta perspectiva, a pesquisa foi desenvolvida na Universidade do Estado da Bahia, em uma turma com 34 licenciandos do semestre 2019.1 do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina Geometria Plana. Ao utilizarmos a análise de erros como metodologia de pesquisa, seguimos as três etapas utilizadas por Cury (2007): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, já definidas neste trabalho.

A seguir, contextualizamos essas etapas dentro da realidade de nosso trabalho, isto é, descreveremos o que foi feito em cada uma delas, fazendo as interpretações e inferências.

RESULTADOS

A fase da pré-ánalise foi iniciada com a análise das três avaliações aplicadas no componente curricular Geometria Plana. Inicialmente, a partir do estudo da ementa, descartamos a terceira por ser mais voltada à aplicação, o que não atendia nosso objetivo, que são as demonstrações geométricas. Assim, partimos para análise das outras duas avaliações, uma aplicada na primeira unidade e outra na segunda, que abordavam os seguintes conteúdos:

1. Estrutura lógico-dedutiva
2. Noções primitivas e axiomas da geometria euclidiana plana.
3. Segmento de reta, ângulo e triângulo.
4. Congruência de segmentos, ângulos e triângulos.
5. Teorema do ângulo externo e suas consequências.

Ambas tinham seis questões, sendo que a primeira abordou noções primitivas e axiomas de incidência e ordem da geometria plana euclidiana, além de segmento de reta, ângulo e triângulo e a segunda envolveu congruência de segmentos, ângulos e triângulos.

Embora a primeira prova contivesse questões que necessitavam de demonstração, optamos por continuar analisando apenas a segunda prova, pois ainda não havia recebido nenhum tipo de tratamento analítico, diferentemente da primeira, que já tinha sido corrigida pela professora da turma e, portanto, continha observações e comentários quanto às respostas. Essa escolha restringiu nossa pesquisa à população de 30 licenciandos, pois dos 34, quatro não realizaram a prova por motivos alheios a esta pesquisa.

Na análise das questões da segunda prova, procuramos observar quais delas tratavam especificamente de demonstrações geométricas. A partir dessa análise, escolhemos duas questões, a terceira, que continha três itens e a sexta, que também continha três itens. Das questões selecionadas focamos nos itens (c) da questão 3 e (b) e (c) da questão 6, que solicitavam a realização de demonstração.

Após a escolha dessas questões, partimos para análise das respostas dos participantes. A partir dessa análise, obtivemos os dados representados na Tabela 1, que apresenta o total de questões sem respostas, com respostas que não continham erros e que continham erros. Ressaltamos que a questão 6 – item c contém mais de 30 respostas, pois um participante redigiu mais de uma demonstração para ela.

Tabela 1 - Classificação das respostas

Questões / Status	3 – item c	6 – item b	6 – item c	Total por status
Em branco	08	04	10	22
Não contêm erros	04	02	04	10
Contêm erros	18	24	17	59
Total	30	30	31	91

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Desses dados, demos ênfase às respostas que continham erros, isso é, questões que não foram respondidas, estavam totalmente corretas ou incompletas e sem erros, não foram consideradas. Essa escolha não se deu para julgar e/ou classificar os licenciandos, mas visa atingir nosso objetivo de compreender, por meio desses erros, suas dificuldades no processo de demonstração, uma vez que a análise dos erros dos estudantes possibilita essa compreensão. Portanto, ao fim da pré-análise, definimos nosso *corpus*, que consistiu em 59 respostas contendo algum tipo de erro para ser analisado.

Após a definição do *corpus*, partimos para a classificação das respostas, isto é a criação das classes de erros. Como as questões 3 – item c e 6 – item c envolviam o objeto central de nossa pesquisa, as demonstrações, optamos por categorizá-las simultaneamente, diferentemente de Cury (2007), que elaborou categorias para cada pergunta analisada. Abaixo listamos as categorias que emergiram da análise dos erros encontrados nas questões:

Classe A: Validação empírica: Fazem parte dessa classe as respostas (demonstrações) cujos argumentos não permitem estabelecer a verdade de uma afirmação, ou seja, são evidências apenas para aqueles que os consideram como tal (BALACHEFF, 2000). Especificamente nesta pesquisa, foram considerados as demonstrações baseadas apenas na figura ou exemplo figural, isto é, quando o estudante recorre apenas à apreensão perceptiva para validar seus argumentos.

Classe B: Argumento circular: Essa classe representa as respostas nas quais os estudantes utilizaram a tese para provar a própria tese.

Classe C: Demonstrações inconclusivas: Demonstrações cuja organização não foi estabelecida de forma clara e coesa, comprometendo a própria leitura e que fugiram do objetivo.

Ressaltamos que as categorias foram criadas considerando os erros que invalidaram a demonstração. Nesse sentido, faremos inferências baseadas nas reflexões teóricas, nas quais buscou-se identificar indícios de possíveis causas que conduziram aos erros identificados.

Na fase de exploração do material, aprofundamos nossa análise dos erros dos licenciandos apoiados na revisão de literatura e no aporte teórico utilizado na pesquisa, que serviram para embasar a discussão dos resultados. Nessa abordagem mais aprofundada, constatamos, inicialmente, a quantidade de erros encontrados em cada classe, que apresentamos na Tabela 2.

Tabela 2 - Total de erros por classe

Questões / Classe	3 – item c	6 – item c	Total por classe
Classe A	12	05	17
Classe B	02	05	07
Classe C	04	07	11
Total por questão	18	17	35

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Percebemos que ocorreu uma predominância dos erros referentes à Classe A, correspondendo a 49% do total encontrado. Essa porcentagem sugere, neste caso, uma dificuldade dos licenciandos em utilizar a figura de forma heurística. Assim, pela limitação de espaço, neste artigo vamos nos restringir à discussão dos erros dessa classe, uma vez que nossas análises constataram tal predominância.

Como já destacado, os erros referentes a essa classe foram denominados *validação empírica*, na qual o estudante recorre às provas pragmáticas que são definidas por Balacheff (2000) como provas que recorrem à ação ou à ostentação. Não possuem validade matemática por se constituírem em evidência apenas para quem as adota como tal (BALACHEFF, 2000). Considera-se, então, que a demonstração baseada apenas na figura, sem levar em consideração as hipóteses envolvidas no problema, é uma validação empírica, já que as figuras sozinhas não possuem status de evidência matemática, a não ser para quem a utiliza para tal fim, e por isso não possibilitam validar uma afirmação.

Nesse contexto, apresentamos uma análise *a priori* da questão 3 que foi analisada diante das teorias que fundamentaram a pesquisa, pois, embora no momento da classificação tenhamos considerado as respostas dadas a todas as questões simultaneamente, os erros encontrados nessa questão foram os mais evidentes no que diz respeito à Classe A.

Questão 3

Enunciado: Definimos mediatriz de um segmento como a reta perpendicular a este segmento e que passa pelo seu ponto médio. Para a construção da mediatriz de um segmento de reta utilizando régua e compasso, o professor de desenho geométrico propôs os seguintes passos:

1. Desenhe um segmento de reta e nas suas extremidades marque o ponto A e o ponto B.

2. Pegue um compasso e faça uma abertura que seja um pouco maior que a metade da medida do segmento.

3. Com essa abertura, coloque a ponta seca do compasso no ponto A e trace um semicírculo. Permanecendo com a mesma abertura no compasso, faça a mesma coisa no ponto B.

4. Os semicírculos traçados se cruzaram em dois pontos C e D, um acima do segmento de reta e outro abaixo. Com a régua, una esses dois pontos, essa reta que contém o segmento CD traçada é a mediatriz do segmento AB.

a) Faça a representação figural (um esboço à mão livre) da construção da mediatriz.

b) Para constatar que a reta que contém o segmento CD é realmente a mediatriz do segmento AB, o que você teria que verificar?

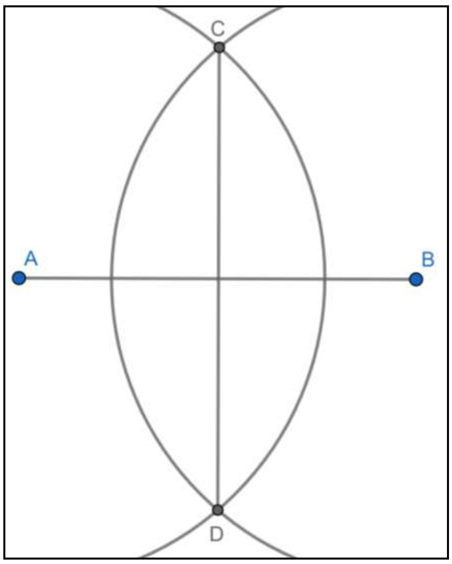
c) Prove matematicamente que a construção proposta é válida, isto é, que tomando os dados dos passos da construção como hipóteses, podemos demonstrar que a reta que contém o segmento CD é a mediatriz do segmento AB.

Primeiramente, cabe ressaltar que a prova matemática, para Balacheff (1982), tem status de demonstração, diferente da prova que pode dispensar o rigor matemático e pode ser aceita na educação básica, nível em que o estudante deve começar a ter contato com elas.

Em relação à questão, envolve construções geométricas e aborda os conceitos de congruência de triângulos, de segmentos e de ângulos, além de exigir o domínio de algumas definições como, por exemplo, a de triângulos isósceles. A questão pedia que os licenciandos, seguindo os passos dados e com base na definição apresentada, demonstrassem que a reta que contém o segmento CD é a mediatriz do segmento AB, isto é, será necessário que eles saibam interpretar uma definição, utilizar os conceitos necessários e seguir os passos dados na questão, ou seja, façam uso da apreensão sequencial. Assim sendo, carências em relação ao entendimento do conteúdo podem dificultar a resolução da questão por parte dos licenciandos.

Seguindo os passos dados, esperava-se que o licenciando realizasse a representação ilustrada na Figura 2:

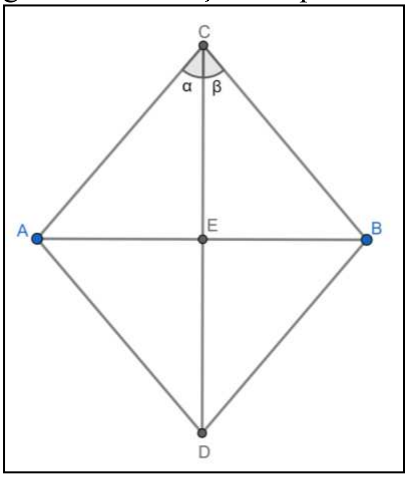
Figura 2 - Mediatriz construída no GeoGebra



Fonte: A autora, 2021

Para resolver corretamente a questão, esperava-se que ele recorresse à apreensão sequencial, isto é, transformasse os passos da construção em hipóteses para realizar a demonstração. Em seguida, utilizasse a apreensão operatória, em particular, a reconfiguração intermediária, ou seja, traçasse os segmentos AC, BC, AD e BD, obtendo os triângulos ABC, ADB, CAD e CBD, todos isósceles de base AB e CD, respectivamente, dois a dois, como na Figura 3:

Figura 3 - Resolução da questão 3c



Fonte: Os autores, 2021

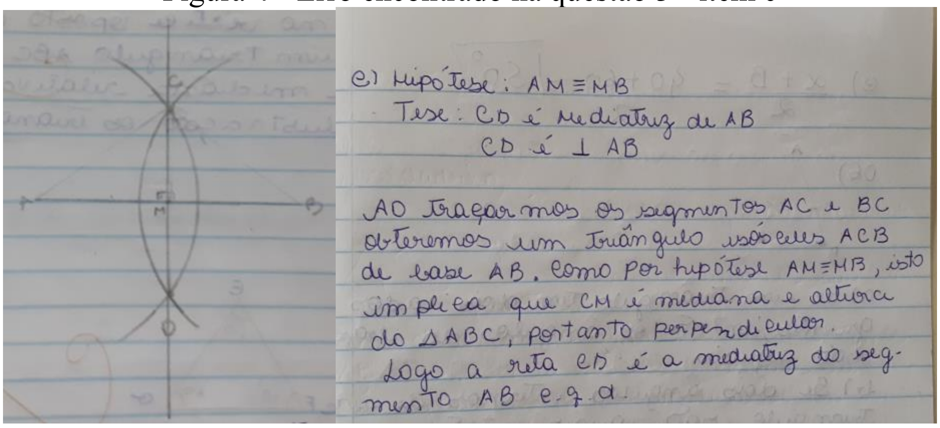
Em seguida, o participante deveria constatar que os segmentos AC, BC, BD e AD são congruentes (raios de duas circunferências de raios congruentes) - o que torna os triângulos obtidos isósceles. E que, considerando os triângulos CAD e CBD, constatasse que como AC é côngruo a BC, AD é côngruo a BD e CD é lado comum, logo, pelo caso Lado, Lado, Lado (LLL) da congruência de triângulos, os triângulos CAD e CBD são congruentes. Daí, que concluísse que os ângulos α e β são congruentes (ângulos opostos a lados congruentes), implicando que CE é bissetriz do triângulo ABC, o que implica que CE é mediana e altura relativas à base (em um triângulo isósceles, mediana, bissetriz e altura relativa à base coincidem). Sendo CE mediana relativa à base, E é ponto médio do lado AB e sendo altura forma ângulos retos com esse lado. Daí CD é perpendicular a AB e passa pelo seu ponto médio, concluindo-se então, que CD é mediatriz do segmento AB.

Ressaltamos que existem outras formas de resolução para essa questão. No entanto, são equivalentes a esta, salvo pela escolha dos triângulos. Sendo assim, baseando-nos na demonstração apresentada, analisamos as que foram elaboradas pelos licenciandos referentes a essa questão e apresentamos abaixo os erros da Classe A.

Classe A

Nesta classe, serão considerados os erros referentes à utilização de argumentos empíricos ao demonstrar, isto é, considerar o que está visível na figura como um argumento válido ou basear-se somente nela, utilizando-a para validar seus argumentos, como podemos ver na Figura 4:

Figura 4 - Erro encontrado na questão 3 - item c



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

O licenciando tomou como hipótese que AM é côngruo a MB, embora o enunciado não explicitasse isso e este não seja um axioma ou proposição já demonstrada cabível. Há indícios de que ele recorreu à apreensão perceptiva para validar seus argumentos, afirmando que os segmentos eram congruentes, baseado na figura desenhada por ele, que corresponde à figura apresentada na nossa proposta de resolução da questão.

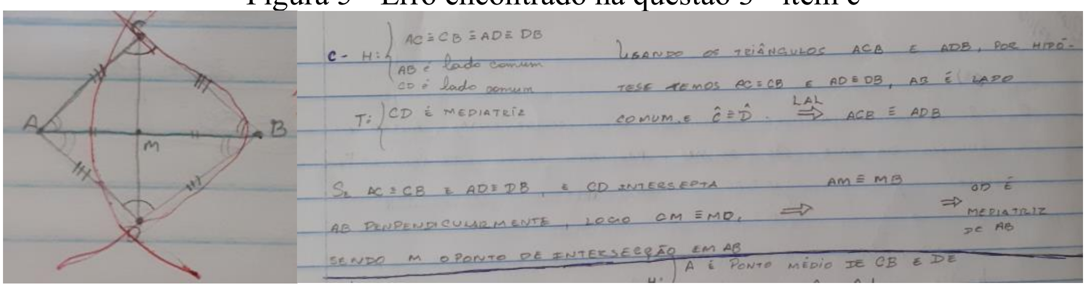
Salientamos que as implicações mencionadas pelo licenciando no corpo da demonstração não estão incorretas, contudo, o fato dele ter utilizado um argumento empírico invalidou sua demonstração. Há evidências de que ele não compreendeu a definição de mediatriz, concluindo apenas que o segmento CD é perpendicular a AB, argumento que, segundo ele, é suficiente para demonstrar que a reta que contém o segmento CD é mediatriz de AB. Recordamos que nessa proposição, a tese é constituída de duas partes que podem ser demonstradas separadamente: CD é perpendicular à AB e CD intersecciona AB em seu ponto médio. É importante destacar que ao provar que M é ponto médio de AB, o licenciando poderia usar esse argumento para concluir que o segmento CD é perpendicular a AB, justificando com a proposição que afirma que em um triângulo isósceles mediana, bissetriz e altura relativas à base coincidem.

Baseados na perspectiva de que essas partes devem ser vistas de forma isolada em se tratando de demonstração, não consideramos este erro um argumento circular, pois o licenciando não utilizou o fato de AM ser côngruo a MB para chegar à conclusão de que AM é côngruo a MB, mas para fazer o que descrevemos acima. O seu erro, então, foi não ter demonstrado essa parte, o que nos levou a concluir que ele se baseou na figura.

Cabe ressaltar que embora o licenciando não tenha escrito que se baseou na figura, é necessário considerar a subjetividade por trás da construção da demonstração, como afirma Cury (2007), citando Moraes (1999), que afirma que é importante ir além do que é exposto nos documentos, dando espaço para inferências e interpretação. Em nossa interpretação, chegamos à conclusão da validação empírica, pois, diante do exposto, não há outro fator que condicione o licenciando a utilizar AM côngruo a MB como hipótese. Além disso, quando há no processo alguma figura, por vezes, o estudante se apega a esta e acaba esquecendo o que foi dado no enunciado, baseando-se nela e não em argumentos matemáticos como justificativa (DUVAL, 2012).

Este tipo de erro pode revelar uma dificuldade de interpretação. Os estudantes não recorrem à apreensão discursiva para redigir sua demonstração, mas geralmente às figuras que deveriam servir como apoio à resolução, isto é, recorrem somente à apreensão perceptiva como na resposta contida na Figura 5, na qual o licenciando, apesar de utilizar inicialmente argumentos válidos, sendo esses suficientes para utilizar o caso LLL da congruência de triângulos, recorreu à figura para dizer que $\hat{C}$ é côngruo a $\widehat{D}$, usando posteriormente outro caso, o LAL, o que invalidou sua demonstração. Considerem na Figura 5, o desenho a lápis. Os traços feitos à caneta são da professora da turma. Contudo, cabe ressaltar que a análise dessa questão já tinha sido feita antes da correção por parte da professora.

Figura 5 - Erro encontrado na questão 3 - item c



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Notamos que, novamente, o licenciando se baseia na figura para afirmar que CD intercepta AB perpendicularmente, recorrendo a essa afirmação para justificar suas deduções. Contudo, os argumentos mencionados por ele não implicam que o segmento CM é côngruo ao segmento MD, tão pouco esse último implica que AM é côngruo a MB que, por sua vez, não implicam que OD é mediatriz de AB, mostrando certa dificuldade desse licenciando em seguir uma argumentação lógica e válida.

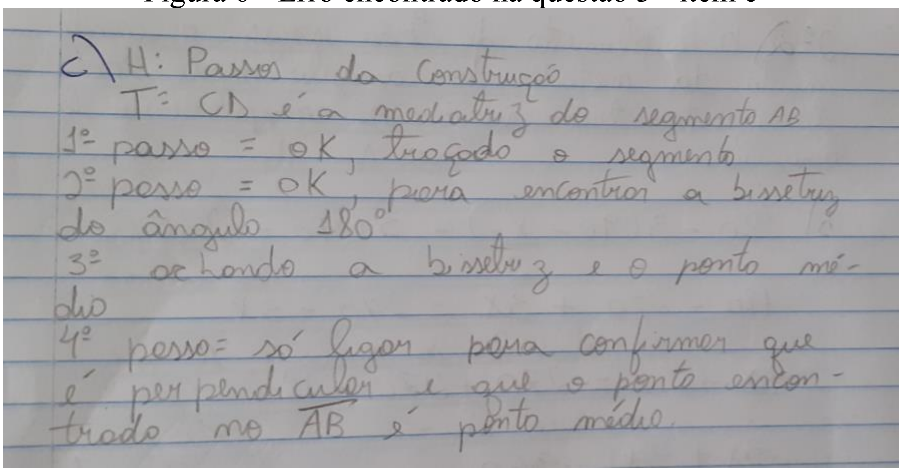
Percebemos, então, que esse exemplo também reforça o que Duval (2012) salienta sobre o uso de figuras. O autor observa que, comumente, os estudantes recorreram somente à apreensão perceptiva e esquecem de analisar discursivamente a figura e o enunciado do problema.

Nesse sentido, Fetissov (1995) afirma que

> [...] é necessário prestar atenção ao papel desempenhado pelo desenho na demonstração de um teorema geométrico. Deve-se ter em mente que o desenho é apenas um meio auxiliar para a demonstração do teorema, que é apenas um exemplo, um caso particular de toda a classe das figuras geométricas, objeto da demonstração considerada (FETISSOV, 1995, p. 28).

Percebe-se, contudo, que a grande dificuldade dos estudantes reside em compreender essa questão, visto que muitos consideram apenas o desenho uma demonstração válida, como podemos observar na Figura 6:

Figura 6 - Erro encontrado na questão 3 - item c


c) H: Passos da Construção
T: CD é a mediatriz do segmento AB
1º passo = ok, traçado o segmento
2º passo = ok, para encontrar a bissetriz
do ângulo 180°
3º achando a bissetriz e o ponto mé-
dio
4º passo = só ligar para confirmar que
é perpendicular e que o ponto encon-
trado no $\overline{AB}$ é ponto médio

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

O licenciando destacou corretamente hipótese e tese, mas sua demonstração parece se resumir à construção da mediatriz, o que é confirmado no último passo destacado, em que ele afirma que basta ligar os pontos C e D para confirmar que CD é uma mediatriz, isto é, para ele, a figura é suficiente e serve como demonstração, contrariando o que foi mencionado por Fetissov (1995).

Salientamos que o erro não está em recorrer à apreensão perceptiva, pelo contrário, ela também é importante e, muitas vezes, essencial para o entendimento do enunciado, contudo, é necessário compreender que, dado que a figura é apenas um suporte, essa apreensão deve ser utilizada em conjunto com as demais, especialmente a discursiva. Assim, os licenciandos utilizariam a figura de forma heurística, evitando o erro da validação empírica.

DISCUSSÃO

Alguns erros detectados revelam a dificuldade dos licenciandos em manter uma sequência lógica, coesa e correta de argumentos, seja por meio das hipóteses dadas ou a partir de deduções. As deduções geralmente são feitas sem fundamentos matemáticos adequados, como, por exemplo, o uso da figura para comprovar certas afirmações. Apesar das figuras servirem apenas como suporte à questão, o estudante tende a apoiar-se nela, esquecendo, muitas vezes, o próprio enunciado do problema.

Percebe-se uma tendência por parte dos estudantes em recorrer somente à apreensão perceptiva. É importante ressaltar que o grande equívoco de alguns reside em recorrer apenas à essa apreensão para validar seus argumentos, pois, muitas vezes, a figura ajuda na compreensão do problema, isto é, o que eles percebem pode auxiliá-lo no entendimento de partes do enunciado, que porventura gerem confusão em seu imaginário.

No entanto, percebemos por suas respostas que os participantes da pesquisa não compreendem que só se deve utilizar o que vemos na figura se estiver descrito no enunciado, ou seja, não se pode usar apenas a apreensão perceptiva se os dados não puderem ser comprovados pelo enunciado, se não for uma definição, e/ou implicações diretas de algum axioma, nesse caso, da geometria plana euclidiana. Em outras palavras, os licenciandos não compreendem que podem recorrer à apreensão discursiva da figura se tiverem como referência as hipóteses do enunciado.

Além disso, em relação às questões, pudemos perceber, por exemplo, que muitos licenciandos não parecem compreender a definição de mediatriz e não conseguiram transformar os passos da construção em hipóteses, ou seja, não recorrem às apreensões sequencial e operatória que exigem, respectivamente, valer-se dos dados do problema para construir a figura solicitada, e à reconfiguração de figuras e a identificação das propriedades das unidades figurais destacadas. Tendem a recorrer à apreensão operatória quando é mais visível e menos abstrata.

Pudemos perceber, também, que as dificuldades vão além do processo de demonstrar, pois há indícios de que falta de domínio com relação a conceitos básicos da geometria pode comprometer o processo de demonstração. Resultado semelhante foi destacado por Ferreira (2016) ao constatar em sua pesquisa que licenciandos em matemática apresentaram fragilidade no desenvolvimento de uma demonstração e mostraram falhas em articular propriedades e conceitos geométricos.

Dessa forma, é importante saber de onde partir e por onde se deve chegar, em conformidade com Fetissov (1995), quando este ressalta algumas sugestões para se encontrar a demonstração correta. Segundo ele, antes de qualquer coisa, ao demonstrar uma proposição geométrica, é conveniente destacar de forma clara a ideia principal que é objeto da demonstração, e salienta que, com frequência, essa ideia não aparece suficientemente explícita, por isso, é preciso atenção. Convém também destacar as condições dadas indispensáveis à demonstração, ou seja, quais são as hipóteses, tese e as ferramentas teóricas (definição, teoremas, axiomas etc.) que são fundamentais nos processos de demonstração em matemática. Cabe destacar que "a terminologia geralmente empregada no ensino de Geometria adota as denominações hipótese e tese para indicar, respectivamente, "os dados" e "aquilo que se deve demonstrar"" (FETISSOV, 1995, p. 46).

Lembramos que algumas demonstrações podem abarcar mais de um caminho, desde que sejam conduzidas por argumentos válidos, e para realizar essa análise, o estudante deve articular as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Percebe-se que as demonstrações não são uma receita de bolo, cada redação é um novo processo, que exige novas argumentações, escolha de novos caminhos. Dessa forma, esperamos que esta pesquisa seja uma contribuição para a compreensão de processos que envolvem a demonstração, pois, ao compreendermos dificuldades que os estudantes enfrentam, podemos desenvolver estratégias para melhorar o ensino e aprendizagem da geometria plana, particularmente das demonstrações, tanto na esfera do ensino superior quanto na educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em um cenário em que o básico da geometria plana não é ensinado adequadamente nos níveis fundamental e médio, o primeiro contato de muitos estudantes com demonstrações ocorre apenas no nível superior, especialmente nos cursos de licenciatura em matemática. Atrelado a isso, o número elevado de erros indica uma carência dos estudantes diante do rigor matemático exigido nas demonstrações geométricas. Neste trabalho, embora alguns mostrassem compreender o processo, cometeram erros importantes que comprometeram suas argumentações.

Pode- se perceber que os licenciandos, com frequência, cometeram erros de validação empírica, ao não utilizar a figura de forma heurística como suporte na resolução da questão, recorrendo quase sempre somente à apreensão perceptiva, sem recorrer à apreensão discursiva para validar suas conjecturas no processo de demonstração. Além de identificarmos esboços de texto com argumentos incorretos e ilógicos, constatamos que algumas dificuldades são oriundas da carência de conceitos básicos da geometria e no entendimento de critérios importantes em uma demonstração, como por exemplo, estabelecer hipótese e tese e redigir uma sequência clara e coesa de argumentos matematicamente válidos e deduções corretas, isto é, um texto sistematizado.

Como já destacamos, redigir uma demonstração não é uma tarefa simples, principalmente quando não praticada desde a educação básica. Nesse processo, além de recorrer de forma adequada aos argumentos que dispomos, é preciso saber redigi-los de forma coesa e sequencialmente lógica, isto é, saber estruturá-los. Nessa perspectiva, consideramos importante que o estudante, desde cedo, tenha contato com as demonstrações, ou pelo menos com provas sem tanto rigor matemático, considerando os níveis de provas propostos por Balacheff (1988 *apud* Almouloud, 2007), e não somente ao chegarem nos cursos de licenciatura em matemática. Além disso, o estudante deve compreender o que é uma demonstração, para que serve e como evitar alguns erros comuns, antes de começar a redigi-la.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, n. 30 7 a 10 de out. de 2007. **Anais eletrônico**... Caxambu, 2007. p. 1-18.

ALMOULOUD, S. A.; REGNIER, J. C.; FUSCO, C. A. Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS, ENGINEERING AND SOCIETY - ICMES, 1., 2009, Curitiba. **Anais**… Curitiba: [s.n.], 2009. p. 1-8.

BALACHEFF, Nicolas. Preuve et démonstration en mathématiques au collège**. Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. nossa). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em < https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document>. Acesso em: 14 de nov. de 2022.

BORASI, Raffaella. **Reconceiving mathematics instruction:** A focus on errors. Greenwood Publishing Group, 1996.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. **A ANÁLISE DE ERROS COMO METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO,** 2008. Disponível em: https://silo.tips/download/a-analise-de-erros-como-metodologia-de-investigaao. Acesso em: 22 de out. de 2019.

DE VILLIERS, Michael D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, v. 63, p. 31-36, 2001.

DOMINGUES, Hygino H. Introdução histórica. In: FETISSOV, A.I. **A demonstração em Geometria**. Tradução: Hygino Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo; atual, 1995.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA EM QUADRILÁTERO QUE APROXIME O ALUNO DE LICENCIATURA DAS DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS.** 2016. 341 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FETISSOV, A.I. **A demonstração em Geometria**. Tradução: Hygino Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo; atual, 1995.

FIORENTINI, Dário. Erros e acertos no ensino-aprendizagem da matemática: problematizando uma tradição cultural. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E XIV JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Passo Fundo. **Anais**...Universidade de Passo Fundo, 2006.

FUSIGER, Josiele Maria. **ANÁLISE DE ERROS NO CÁLCULO DE PERÍMETRO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO**. 2015, 81 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A educação matemática em revista**. Geometria. Blumenau, número 04, 1995. p.03-13. Edição especial.

MORESI, Eduardo. **Metodologia da Pesquisa.** Universidade Católica de Brasília – UBC Pró-reitoria de Pós-graduação – PRPG Programa de Pós-graduação STRICTO SENSU em gestão do conhecimento e tecnologia da informação. Brasília, Distrito Federal, 2003.

MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. **A confluência de ideias para criar um espaço de aprendizagem da geometria**. s.d.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké**, Campinas, vol. 1, n.1, p. 7-1. 1993.

SANTOS, Cleane A.; NACARATO, Adair M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

SILVA, Janssen Felipe da. **Introdução**: Avaliação do ensino e da abordagem, numa perspectiva formativa-reguladora. In: SILVA, Janssen Felipe da; HOFFMANN, Jussara; ESTEBAN, Maria Tereza (orgs.). Práticas avaliativas e aprendizagens significativas: em diferentes áreas do currículo. 10. ed. Porto Alegre: Mediação, 2013. p. 9 -22.

TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. **Metodologia da Pesquisa**. 2. ed. Curitiba: IESDE Brasil S. A., 2009.

Submetido em 10/12/2022.

Aprovado em 28/07/2023.