Explorando o fractal Tetra Círculo: possibilidade para a introdução de Progressões Geométricas

Charles Bruno da Silva **Melo**
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria
Brasil
xarlesdemelo@yahoo.com.br
José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria
Brasil
leivasjc@unifra.br

Resumo

É preciso relacionar os conteúdos matemáticos com os demais setores da sociedade, sobretudo reconhecendo a tecnologia. É fundamental que se busque novas propostas para o ensino da Matemática. Este trabalho apresenta uma investigação desenvolvida em uma escola pública estadual no município de Candelária/RS, Brasil, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. O objetivo foi introduzir o conteúdo de Progressões Geométricas por meio do fractal Tetra Círculo, a partir da utilização do *software* GeoGebra, bem como o de apresentar o conteúdo matemático de uma forma atraente, pois a tecnologia desperta o interesse dos estudantes. A análise das atividades teve como aporte teórico as fases da investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000): procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização. Foi alcançado êxito no trabalho, pois possibilitou ao professor refletir sobre sua prática e ao aluno, que se tornou um sujeito ativo no processo de construção do conhecimento.

Palavras-chaves: fractal Tetra Círculo, progressões geométricas, GeoGebra.

Introdução

Nossa sociedade está passando por inúmeras transformações, a globalização e as tecnologias têm mudado o nosso dia-a-dia. Estas evoluções provocam algumas mudanças também no âmbito educacional. Atualmente, se tem discutido muito sobre a abordagem de conteúdos em sala de aula e o uso de novas tecnologias no ensino, pois o contexto atual exige uma educação mais completa, uma educação que realmente seja eficaz e atinja o mundo de uma forma global.

> [...] chama-se a atenção para a necessidade de se relacionar a Matemática com os demais setores da sociedade, sobretudo reconhecendo os novos desenvolvimentos das ciências e da tecnologia. O grande desafio que nós, educadores matemáticos, encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa, relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje (D' ambrósio, 2001, p. 14-15).

Nossa prática em sala de aula permite crer que novas formas de abordar conteúdos tornam as aulas de Matemática mais atraentes e produtivas. Nesse sentido, entende-se que é necessário que se crie possibilidades que desenvolvam no aluno capacidades como, questionar, reconhecer, relacionar e criar, abordando as tecnologias como ferramentas que podem auxiliar tanto professores quanto alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998), há a recomendação de que os recursos tecnológicos podem ser usados em aulas de Matemática com várias finalidades, tais como "meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções". (p. 44)

Partindo dessa ideia buscou-se explorar o Fractal Tetra Círculo por meio do *software* GeoGebra, que é um programa de geometria dinâmica livre, adequado para a análise gráfica. Nele pode-se tanto trabalhar conceitos geométricos como algébricos, visto que a Geometria Fractal possui um vasto campo de aplicação e construção de conceitos matemáticos.

Segundo Nunes (2010):

> a exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos (p. 74).

Utilizou-se, na investigação, o reconhecimento do padrão do Tetra Círculo, que assim como os demais fractais, está condicionado a modelos numéricos, algébricos e geométricos. Compreende-se que "ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem" (Vale *et al*., 2005, p. 3). Ele pode ser um grande aliado no processo de introdução e motivação para o conteúdo de progressões geométricas, o que será mostrado neste trabalho.

Para tanto, a análise das atividades realizadas *in locus* teve como aporte teórico as fases da investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000, p. 125): procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização[1].

Conceito de Fractal

[1] *Pattern seeking, pattern recognition e generalization.*

Influenciado pelos trabalhos de alguns matemáticos, como George Cantor e Giuseppe Peano, no ano de 1970 Benoit Mandelbrot publicou o livro "*The Fractal Geometry of Nature*", no qual introduz o termo "fractal", que, segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente é *fragere*, o qual significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Ele utilizou o termo Fractal para denominar as figuras que representam aspectos da natureza.

Um fractal é definido por três características básicas: autossimilaridade, complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária.

De acordo com Carvalho (2005), autossimilaridade é a mais simples e marcante das características dos fractais; significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, ou seja, cada parte ampliada da imagem será igual a da inicial.

A complexidade infinita está relacionada à existência de um processo cíclico, o que significa que uma determinada operação repete-se infinitamente, de acordo com essa propriedade; cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos. Sobre essa característica, Capra (1996) a define como "a técnica principal para se construir um fractal é a iteração - isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica" (p. 119).

Ao se referir à dimensão fracionária de um fractal, Tratch (2008) afima que ela "é expressa geralmente por um valor não inteiro e está relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade" (p. 18).

Fractal Tetra Círculo

O fractal Tetra Círculo foi criado em 1995 pelo Laboratório de Ensino da Matemática - LEM do IME-USP com a finalidade de explorar sistemas de geometria interativa. Ele é um fractal geométrico, pois é baseado em uma circunferência com quatro pontos equidistantes que a divide em quatro arcos congruentes, os quais são o centro das novas circunferências de raios menores. Essas novas circunferências possuem raios que são a metade do raio da circunferência inicial. Repetindo o processo, essas quatro novas circunferências geram o nível seguinte do fractal, e, assim sucessivamente, como ilustrado na figura 1.

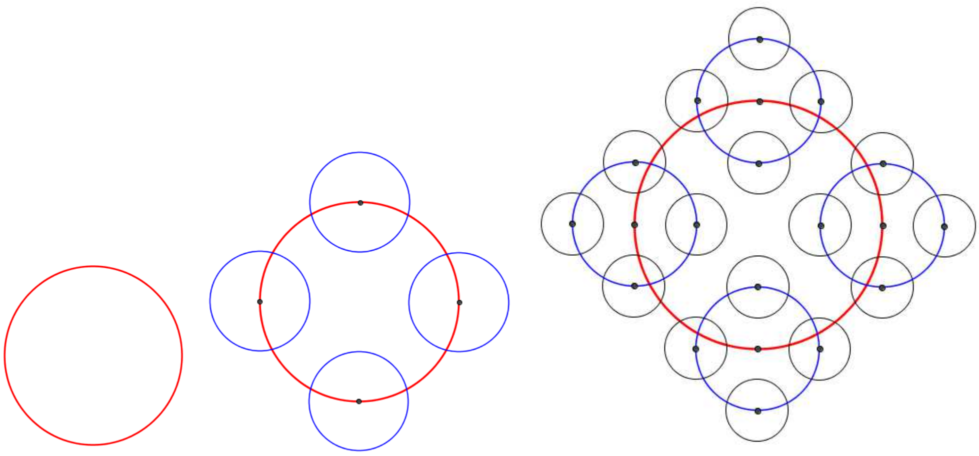


Figura 1. Fractal Tetra Círculo e suas iterações. Construção própria.

Procura do padrão, Reconhecimento do padrão e Generalização

Conforme Herbert e Brown (2000), a investigação de padrões passa pelas fases: procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização. Com base nas experiências realizadas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, as autoras enumeraram essas três fases como satisfatórias para classificar o desenvolvimento dos alunos durante a investigação de padrões. Elas são claramente identificadas no momento em que se trabalha com sequências, nesse caso, com progressões geométricas.

Na primeira fase, a Procura do Padrão, os alunos buscam determinado padrão em uma situação dada. No caso do trabalho que aqui se apresenta, ela consistiu na etapa em que eles se dedicaram à compreensão da regularidade que faz com que o fractal repita sua estrutura inicial, ou seja, no processo da construção do Tetra Círculo no *software* Geogebra.

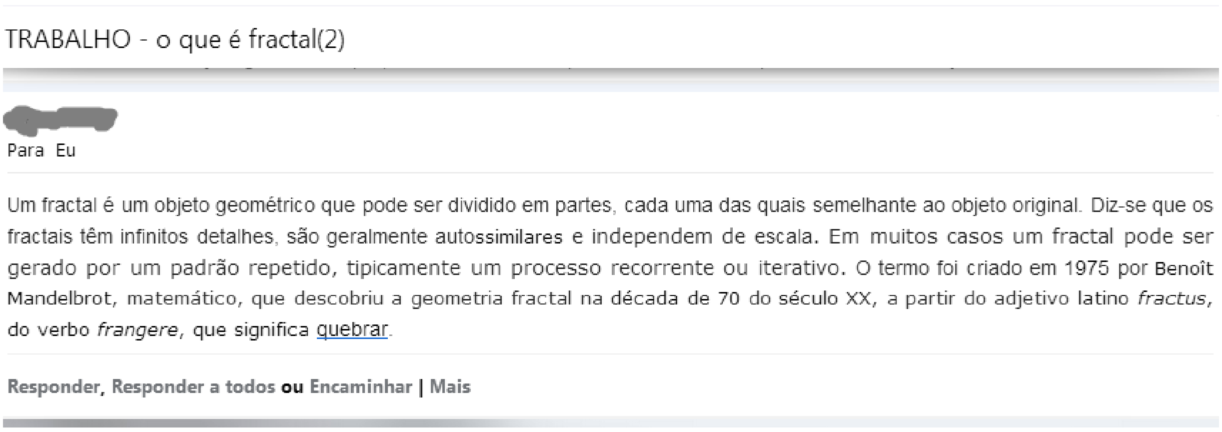
Na segunda fase proposta por Herbert e Brown, os alunos reconhecem o padrão por meio de diferentes representações que identificam durante a compreensão da situação dada. Na atividade de exploração, eles passaram por essa fase ao reconhecerem o padrão utilizando tabelas e outras formas de representações matemáticas, como frações e potências.

Por fim, os alunos do experimento de Herbert e Brown atingiram a terceira fase, a de Generalização, quando generalizaram o padrão e relataram isso retomando a situação inicial. Na atividade com o Fractal Tetra Círculo que se realizou, essa fase foi atingida quando os alunos conseguiram, ao passar de um nível posterior a um nível qualquer, escrever uma fórmula geral expressando o conteúdo matemático explorado na situação.

Relato e análise da experiência com o Fractal Tetra Círculo

As atividades foram aplicadas em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, na qual o primeiro autor é regente de classe, no município de Candelária-Rio Grande do Sul, Brasil. O tempo de execução foi de 4h/aula de 50 minutos cada. Os alunos trabalharam em duplas no laboratório de informática da escola.

Inicialmente, foi solicitado aos alunos uma pesquisa na *web* sobre fractais, na qual deveriam buscar o conceito e as principais características, bem como exemplos. Essa tarefa foi enviada para o professor via *email* e discutida na aula, como ilustrada na figura 2.


TRABALHO - o que é fractal(2)

[redacted]
Para Eu

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo. O termo foi criado em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático, que descobriu a geometria fractal na década de 70 do século XX, a partir do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar.

Responder, Responder a todos ou Encaminhar | Mais

Figura 2. Email enviado pelo aluno A.

A figura 2 ilustra a resposta do aluno A, o qual captura da internet o conceito de fractal e algumas considerações a respeito do tema. No que segue, apresenta-se; na figura 3, alguns dos fractais encaminhados ao professor pelos alunos.

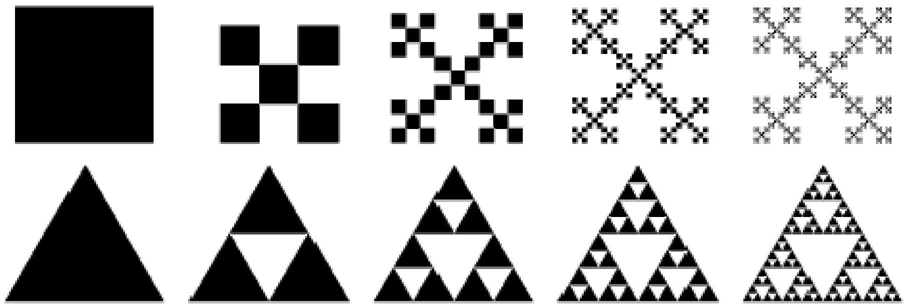
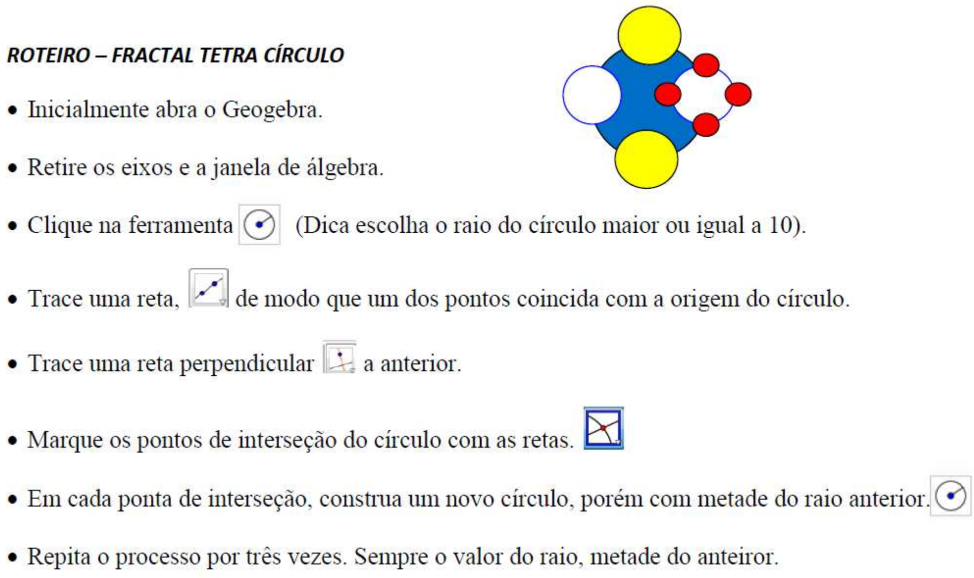


Figura 3. Alguns exemplos de fractais enviados pelos alunos.

Posteriormente, os alunos receberam um roteiro para a construção do Fractal Tetra Círculo e, como já haviam utilizado o Geogebra em outras aulas, não houve questionamentos sobre a construção.



ROTEIRO – FRACTAL TETRA CÍRCULO

- Inicialmente abra o Geogebra.
- Retire os eixos e a janela de álgebra.
- Clique na ferramenta (Dica escolha o raio do círculo maior ou igual a 10).
- Trace uma reta, de modo que um dos pontos coincida com a origem do círculo.
- Trace uma reta perpendicular a anterior.
- Marque os pontos de interseção do círculo com as retas.
- Em cada ponta de interseção, construa um novo círculo, porém com metade do raio anterior.
- Repita o processo por três vezes. Sempre o valor do raio, metade do anteiror.

Figura 4. Roteiro para a construção do Tetra Círculo.

A construção do fractal durou uma aula e ocorreu de forma tranquila sem dificuldades. Foi pedido também, após a conclusão pelos alunos dessa parte, para colorir o Tetra Círculo, de modo a respeitar cada iteração realizada. Na figura 5 é possível verificar claramente o processo a cada iteração.

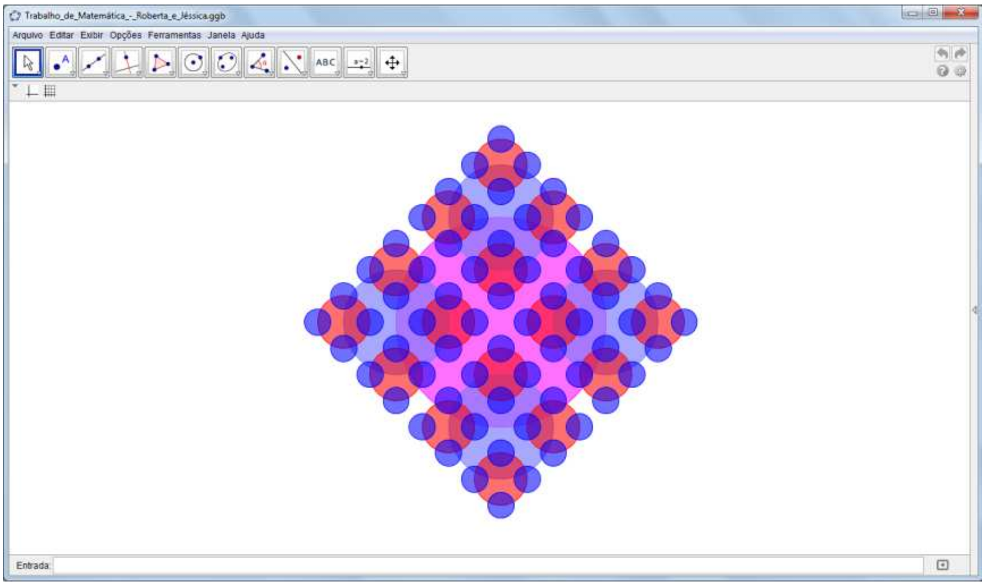


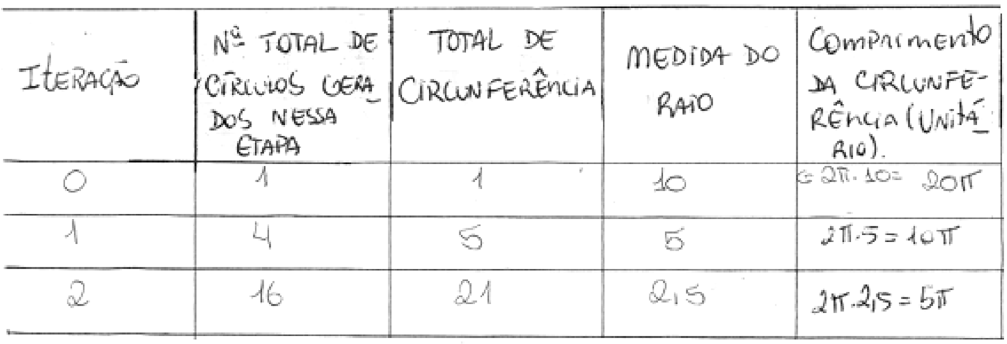
Figura 5. Fractal Tetra Círculo construído por uma dupla de alunos.

Com o fractal pronto, foi questionado qual tipo de regularidade existia no Tetra Círculo. A maioria dos estudantes respondeu que o raio era sempre a metade da iteração anterior e que os pontos nos círculos eram equidistantes. Quando questionados sobre os níveis de iteração, afirmaram que era infinito. Nesse momento, os alunos puderam explorar as ferramentas *zoom*, *ampliar* e *reduzir*, tal fato evidencia como o Geogebra pode facilitar a manipulação e a visualização.

> Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de 'desenhos em movimento' e os invariantes que ai aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento" (Gravina, 1996).

Segundo as fases de Herbert e Brown (2000), os alunos durante estas atividades estavam na fase de Procura do Padrão na situação dada, pois buscavam extrair a informação de um caso específico. Quando perguntado sobre as regularidades do Fractal Tetra Círculo, a visualização ganhou ênfase, pois as características geométricas de autossimilaridade e complexidade infinita foram observadas ainda que não formalizadas.

Na sequência, foi solicitada a criação de uma tabela, a qual deveria ser preenchida de acordo com cada iteração. Nesse momento, foi revisto o conceito de círculo e de circunferência, já que a turma havia trabalhado no início do ano letivo o conteúdo de comprimento de arco, optou-se por explorar os elementos do fractal como circunferências.



Iteração	Nº total de círculos gerados nessa etapa	Total de circunferência	Medida do raio	Comprimento da circunferência (unitário).
0	1	1	10	= 2π.10 = 20π
1	4	5	5	2π.5 = 10π
2	16	21	2,5	2π.2,5 = 5π

Figura 6. Reconhecimento do padrão: tabela preenchida pelos alunos.

Após o preenchimento da tabela, os alunos foram questionados sobre quantas circunferências teriam a terceira e a quinta iteração. A maioria observou que existia um padrão de regularidade, no qual era a multiplicação do número anterior de circunferências por quatro, concluindo, então, que o número de circunferências seria de 64 e 1024, respectivamente, para cada iteração.

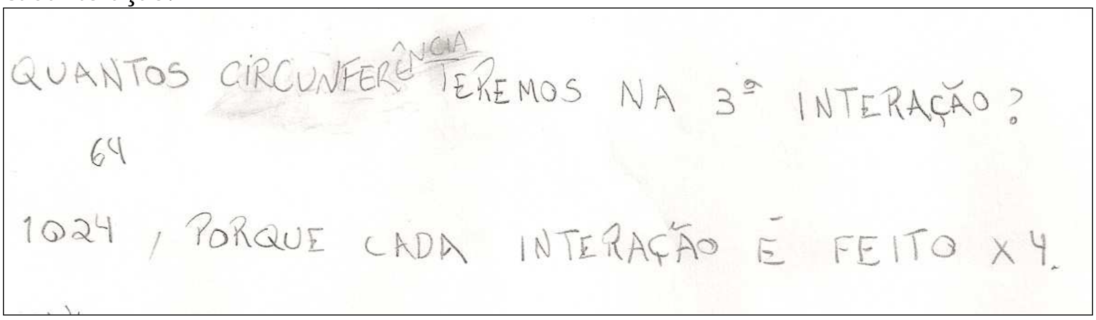


Figura 7. Reconhecimento do padrão: identificando o número de circunferências feito pelo aluno B.

Foi questionado, posteriormente, o que se pode observar em relação ao comprimento da circunferência após cada iteração, bem como qual seria o raio da circunferência na quinta iteração. Os alunos não tiveram dificuldade nessa atividade, pois afirmaram que a cada iteração a medida do raio se reduzia pela metade, logo com o comprimento da circunferência ocorria o mesmo. Cabe lembrar que a medida do raio era diferente para cada dupla de alunos, pois foi exigido apenas que o comprimento fosse maior ou igual a 10 uc.

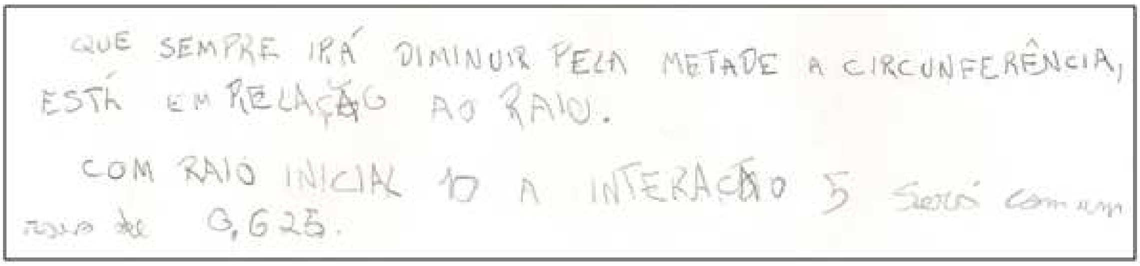


Figura 8. Reconhecimento do padrão: identificando relações entre o raio e o comprimento das circunferências.

Em seguida, depois dos alunos apresentarem suas observações, foi explorado o fato de que estas sequências eram progressões geométricas. A partir desse momento, foi explicado que, quando em uma sequência numérica o termo seguinte é obtido por meio de uma multiplicação por um número que é sempre o mesmo, dizemos que esta é uma progressão geométrica, e este valor que é multiplicado é chamado de razão.

Outro ponto importante, nessa etapa, foi de muitos alunos observaram que essas sequências são expressas por funções exponenciais, conteúdo este que haviam estudado no primeiro ano do Ensino Médio. Esse fato foi essencial na descoberta das leis de formação para o número de circunferências geradas a cada iteração e a para a medida do raio.

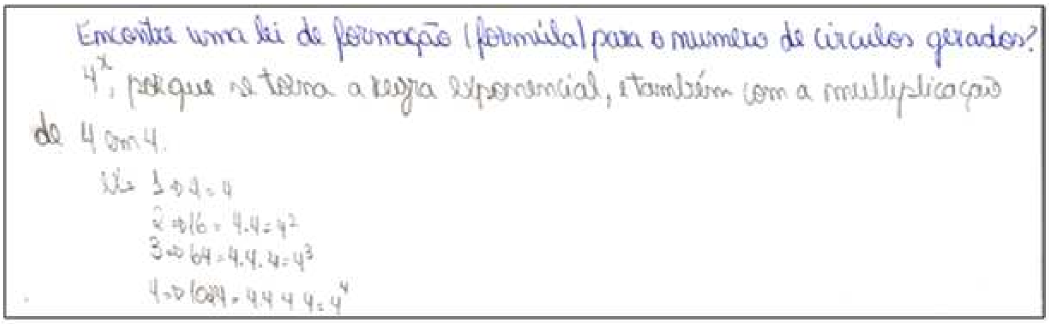


Figura 9. Lei de formação para o número de novas circunferências geradas obtidas por uma dupla.

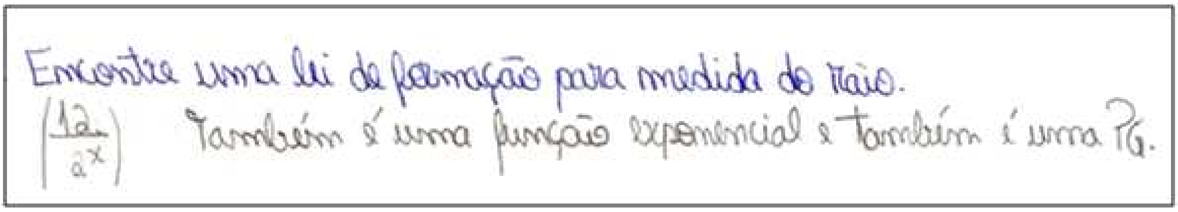
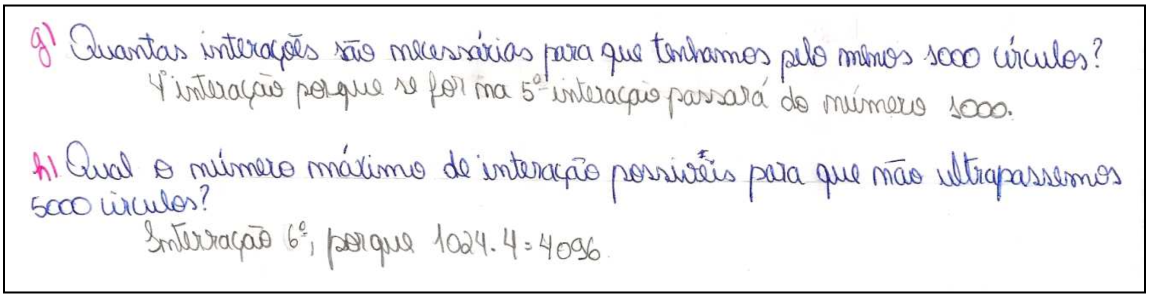


Figura 10. Lei de formação para a medida do raio a cada iteração.

Durante a realização dessas questões, os alunos passaram pela fase de Reconhecimento do Padrão, pois reconheceram o padrão para o caso específico e o transcreveram usando tabelas e representando os valores encontrados por meio de frações e potências, bem como verificando a ligação entre progressões geométricas e a função exponencial. De acordo com Herbert e Brown (2000), é nessa fase que os alunos buscam representações matemáticas que expressem as observações realizadas com a exploração do padrão.

O próximo passo foi questionar sobre a variação de outros níveis do padrão. Solicitou-se que os alunos tentassem escrever como poderia ser encontrada a medida do raio de circunferências no caso de um nível posterior ao n, o nível $n+1$. Foi registrado que teriam $\frac{a_1}{2^{n+1}}$ no nível $n+1$, onde a_1 é a medida do raio da circunferência inicial. Também foi questionado quantas interações eram necessárias para que se tivesse menos de 1000 circunferências e que não ultrapasse 5000 circunferências.



g) Quantas interações são necessárias para que tenhamos pelo menos 5000 círculos?
4 interação porque se for na 5º interação passará do número 5000.

h) Qual o número máximo de interação possíveis para que não ultrapassemos 5000 círculos?
Interação 6º, porque 1024 . 4 = 4096.

Figura 11. Últimas questões: processo de generalização.

Essas questões se enquadram na terceira fase destacada por Herbert e Brown (2000), a da Generalização, o que é possível afirmar com base na fórmula geral que os alunos escreveram para um nível posterior a um nível qualquer, ou seja, ao nível $n + 1$ e nas afirmações que os alunos foram capazes de realizar posteriormente.

Cabe lembrar também que, durante toda a realização das atividades, os alunos fizeram o uso de ferramentas que permitiram uma investigação dinâmica e uma interação com os objetos construídos a partir do Geogebra, o que contribuiu significativamente para o sucesso da obtenção das conclusões corretas.

Para finalizar, foi formalizado o conteúdo de progressões geométricas, a partir dessas atividades, bem como das observações que emergiram como a identificação do termo geral com a função exponencial com domínio o conjunto dos naturais. Uma progressão geométrica é definida por Lima (2008, p.100-101) como

> uma sequência de números reais é uma função x: N→R, definida no conjunto N = {1,2,3, 4...} dos números naturais e tomando valores no conjunto R dos números reais. O valor x(n), para todo n∈N, será representado por xn e chamado o termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência. Escreveremos (x1, x2, x3,..., xn,...), ou (xn) n∈N, ou simplesmente (xn), para indicar a sequência x.

Considerações Finais

Com o trabalho desenvolvido se observou que é possível introduzir o conteúdo de progressões geométricas a partir da exploração do Fractal Tetra Círculo no s*oftware* GeoGebra, uma vez que os estudantes conseguiram desenvolver todas as atividades propostas em sua plenitude.

Aponta-se, também, que o uso da tecnologia foi um aliado ao trabalho do professor e um facilitador do processo de ensino/aprendizado dos estudantes, pois possibilitou o estímulo à experimentação, simulação e testes, o que não seria possível apenas com registros manuais.

A exploração do fractal propiciou que os alunos estabelecem relações entre diferentes formas de representações, chegando até a estabelecer a ligação entre progressões geométricas e funções exponenciais com domínio no conjunto dos naturais.

Entende-se que o objetivo do experimento foi alcançado, já que possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção de seu próprio conhecimento. Houve uma reflexão positiva sobre a prática docente, já que o professor tinha receio sobre o sucesso da aplicação da atividade antes de efetivá-la. Também, ocorreu a possibilidade de interdisciplinaridade com Artes**.** Essa, que já se encontra em processo, no qual está sendo organizada uma exposição a ser realizada na escola com os fractais produzidos relacionado com a sobreposição de cores.

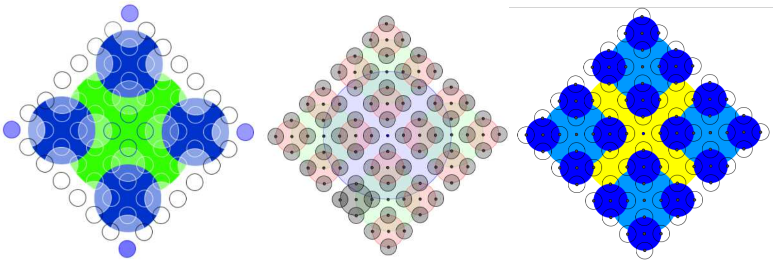


Figura 12. Construções para a exposição.

Referências e bibliografia

Barbosa, R. M. (2005). *Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental**.** (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Brasília.

Capra, F. (1996). *A teia da vida:* uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Pensamento-Cultrix.

Carvalho, H. C. (2005). *Geometria Fractal:* perspectivas e possibilidades no ensino de matemática (Dissertação devMestrado em Educação). 101 f. Curso de Pós- Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém.

Dambrósio, U. (2001). Desafio da Educação Matemática no novo milênio**.** *Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, 8*(11), 14-17, dez. São Paulo,

Gravina, M. A. (1996). Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte.

Herbert, K.,& Brown, R. (2000). Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications. Reston, Va.: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Lima, E. L. (2008). *Curso de Análise* (Vol. 1, 12ª ed.). Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Nunes, R. S. R. (2006). *Geometria Fractal e Aplicações* (Dissertação de Mestrado). Departamento de matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf.> Acesso em: 07 jul. 2014.

Tractch, C. (2008). *Investigando matematicamente alguns fractais por meio do software Geogebra.* União da Vitória. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_unicentro_matematica_md_claudia_tratch.pdf >. Acesso em: 4 jul. 2014.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2005). *Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra.* Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE.