Algunas maneras no usuales de construir un cuadrado dado su lado

Saulo **Mosquera** López
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia
samolo@udenar.edu.co
Fernando **Soto** Agreda
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia
fsoto@udenar.edu.co

Resumen

En la Internet circuló el problema de dividir un cuadrado en dos regiones de igual área, para el cual él profesor José Antonio Mora hizo circular diversas soluciones en el 2002. El cuadrado es un cuadrilátero caracterizado por su regularidad, armonía, peso y simetría y por ello es una de las más sencillas de estudiar. Similar al problema comentado inicialmente, se planeó una experiencia de aula para establecer diversas formas que un grupo de estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, encontraba para construir un cuadrado dado su lado. En el desarrollo de la misma surgieron más de una veintena de soluciones las cuales aprovechan conceptos como el de homotecia, o lugares geométricos como la parábola e incluso el concepto de inversión. Aquí se señalan algunos de los resultados encontrados.

Palabras clave: Cuadrado, Homotecia, Inverso de un punto, competencias, estándares, Experiencia de Aula.

Planteamiento del problema

En la estructura curricular de un Programa de Licenciatura se debe propender por incluir, por lo menos, dos amplios campos de formación: Matemáticas y Educación Matemática. El primero, como aquel que proporciona los conocimientos específicos de esta ciencia y el segundo, para potenciar el desarrollo de conocimientos y destrezas necesarias para enfrentar los procesos inherentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una línea indispensable en la formación matemática es la relacionada con la geometría, en particular, es necesario incluir un curso de geometría Euclidiana en el cual se presenten los elementos básicos de esta área, que le permitan orientar y potenciar, en el ejercicio de su labor, algunos de los procesos generales de la actividad matemática, tales como “formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida diaria, de otras ciencias y de las matemáticas mismas” (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.51), y en cuanto a geometría se refiere, consideramos la solución de problemas de construcción.

Entre los medios que se están utilizando en la actualidad como estrategia para potenciar los diversos tipos de pensamientos aparecen los sistemas de cálculo simbólico tales como: CABRI, en el caso del pensamiento geométrico, DERIVE o MAPLE para el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. En este sentido y dado que se pretendía explorar y consolidar relaciones de tipo geométrico, se consideró apropiado utilizar CABRI y de manera explícita aprovechar algunas de sus herramientas preestablecidas, las cuales facilitan de manera general la actividad geométrica y en particular la solución de problemas de construcción.

El modelo didáctico escogido para diseñar las estrategias a emplear y problemas a proponer y resolver es el de experiencia de investigación en el aula que resulta ser una propuesta pedagógica interesante fundamentada en modelos cognitivos, en marcar a la evaluación como un proceso investigativo y que suscita el análisis de los registros que va consiguiendo la indagación y en particular los hallazgos y los progresos que derivan de esta actividad. Se seleccionó este modelo puesto que se cuestiona sobre la forma en que los estudiantes inter-relacionan los prerrequisitos de un problema con su propio conocimiento y la idea central de la experiencia se constituía en dar cuenta de las formas posibles que encontraban los estudiantes de resolver el problema propuesto (Orobio y Ortiz, 1997), más aún, cuando los autores de la propuesta tenían preconcebido que las soluciones que se presentarían serían pocas.

El problema objeto de estudio fue el de ***construir un cuadrado dado su lado***. De hecho, el problema es simple, su sencillez abarca cualquier interpretación posible y muy pronto se fija en que la solución consiste en localizar un tercer vértice del cuadrado o simplemente calcular el centro del mismo. La ubicación de estos puntos precede la utilización de los mecanismos de simetría central, simetría axial, cálculo de puntos medios, trazo de perpendiculares y de paralelas, entre otras.

La experiencia subyace en aspectos paradigmáticos referidos a formas exclusivas de construcción de cuadrados que utilizan conceptos como el de perpendicularidad y paralelismo que son corrientes dentro del ambiente escolar. Sin embargo, en la medida que cada persona aprende nuevos conceptos, aparecen entretejidos mentales que logran solucionar de manera efectiva un problema y esto permite crear conexiones de gran riqueza didáctica y metodológica. En este punto, puede indicarse la forma en que el problema propuesto cursa lo recreativo. La matemática recreativa es una rama o disciplina matemática que ha perdurado de manera inveterada en las civilizaciones, al punto de que en la historia de la humanidad han trascendido libros y revistas que se preocupan por el estudio y la proposición de problemas atinentes a esta área. De manera casi puntual o correlativa, el cuadrado resulta una figura entrelazada en toda la historia del pensamiento; pues ha sido centro de estudio, preocupación y utilización; por ejemplo, los cuadrados mágicos, los cuadrados latinos, el tangram japonés y los problemas de disección propuestos por Sam Loyd y Ernest Dudeney, (Bellos, 2010), los nuevos juegos de Sudoku en los que se privilegia la armonía y la distribución regular de números, son ejemplo de la forma en que el cuadrado ha servido de enlace entre el conocimiento y la distracción y divertimento.

A pesar de que el objetivo de la propuesta en su forma primitiva, nada tenía que ver con los aspectos recreativos, tornó hacia allá, alcanzando un objetivo develado de la educación como es el de la satisfacción, del placer, del colmar expectativas entre los educandos. Tiene sentido, el aprender, el conocer, el adquirir la facultad de aplicar el conocimiento, los conceptos, dan sentido de oportunidad a los educandos, los dignifica y hace entender que el estudio de las matemáticas no puede ser traumático sino que más bien, resulta una fiesta a la que se puede acudir de manera libre llevando su propio paquete de pertenencias.

Escoger la experiencia de aula como procedimiento metodológico, permite el trabajo colaborativo, la comunicación y argumentación, eleva la autoestima y la confianza en sí mismo, como se ve en la conducta que muestran los estudiantes al señalar los resultados que van encontrando. De otro lado, cohesiona al grupo y lo torna homogéneo, pues aparecen actividades ligadas a la retroalimentación, al recordar conocimientos, buscar nuevas alternativas y emplear recursos que se encuentran o no a la mano de cada estudiante. Ahora bien, como se mencionó las actividades de aprendizaje establecidas, estuvieron mediadas por computadores y el uso de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en Inglés) de asistencia geométrica, pensando en que su mediación permita construir los objetos utilizando mejores y más efectivos recursos y empleando conceptos que si bien, resuelven el problema de manera clara, no se encuentran sino en una combinación tácita de otros elementos. Nuestra experiencia nos faculta a opinar que el uso de sistemas computacionales permite:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo y construcción, dejando espacio para realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos y su correspondiente análisis.
- Utilizar el sistema como elemento de motivación, no como centro del aprendizaje, puesto que relegar al computador alrededor de construcciones robustas (Construcciones que resisten el arrastre de elementos que las conforman), las diferentes e infinitas posibilidades de dimensiones sobre las figuras objeto de estudio. El sentido visual juega un papel importante dando lugar al análisis y el razonamiento para establecer las reglas que rigen las medidas en la construcción.
- Resolver de manera segura un problema ya que libera de inexactitud la ejecución de los pasos y así determina la seguridad del beneficiario del sistema.
- Contener las infinitas disposiciones que puede registrar los prerrequisitos de una construcción, pues una construcción robusta hace prevalecer sus características y particularidades a pesar de que las dimensiones de algunos objetos cambien por arrastre.

De otro lado, el planteamiento y resolución de problemas se ha convertido (Polya, 1965), en una de las más ricas estrategias didácticas que conjugan los aspectos teóricos y experimentales en el quehacer docente dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Esta experiencia se propuso como ejemplo para que el futuro egresado del programa de licenciatura de nuestra universidad vaya consolidando improntas que lo enriquezcan en el momento de aplicar a su vida profesional proyectos de largo alcance en la institución que laboralmente tenga que representar.

La experiencia se desarrolló con los estudiantes del tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, en momentos en que la finalización del semestre era un hecho y se preveía que el cúmulo de conocimientos adquiridos en geometría sintética era suficiente para estudiar el problema. Un curso básico de geometría euclidiana compendia prácticas computacionales con ayuda del Software Cabrí Géomètre, del modelo de geometría dinámica, producido en la Universidad de Grenoble en Francia por un equipo liderado por el profesor Jean Marie Laborde. Las prácticas son independientes del profesor que ofrece la asignatura y se convierten en fuente dinamizadora del conocimiento, tal y como lo viene advirtiendo el mundo académico que incrementa el uso de estas herramientas en varios países del orbe. De hecho, entre los gustos académicos, muchos docentes hacen uso de herramientas gratuitas que compiten con el software mencionado tales como Geogebra que también requiere cumplir prerrequisitos básicos en la construcción que resuelve el problema.

Fundamentación teórica

En los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y en los Lineamientos Curriculares se vislumbra con claridad el papel que desempeña el estudio de la geometría y especialmente la legada por Euclides con su modelo sintético y la heredada por Fermat y Descartes que es el modelo analítico. En el modelo euclidiano, la regla que se despega al final del trazo de una línea y el compás que se cierra de manera inmediata después de trazar una circunferencia resultan normas o requisitos imposibles de eludir y que impiden el transportar distancias. Estos impedimentos han convertido, al contrario de lo que se piensa, los problemas de construcción, en problemas atractivos que requieren de un esfuerzo mental, en un juego de solitario mucho más válido y enriquecedor que los solitarios que ahora se encuentran frecuentemente. En efecto, una de las primeras cosas que enseña Euclides es que el compás euclidiano y el moderno, que si permite llevar distancias, son equivalentes (Proposición 2 del libro I de los Elementos) y también con prontitud, enseña la forma en que se debe construir un triángulo equilátero (Proposición 1 del libro I de sus Elementos), la bisectriz de un ángulo (Proposición 9 del libro I de sus Elementos), un cuadrado si se da su lado (Proposición 46 del libro I de sus Elementos) y muchas cosas más. También enseña, por ejemplo a dividir un segmento en dos partes iguales (Proposición 9 del libro I de sus Elementos) y por extensión en cualquier número de partes iguales que sea potencia de dos. (Heath, 1908).

Al ser tan rica la estrategia de proponer problemas de construcción, circulan en el mercado textos que proponen eso como centro, por ejemplo, el libro Excursions in Geometry de C. Stanley Ogilvy publicado por Dover y decenas de títulos más. Allí se proponen problemas de diverso tipo de complejidad, pero los más sencillos, como el que ataca esta experiencia, resultan enriquecedores y van dignificando a quienes encuentran otras soluciones que aumentan las ya alcanzadas. En el texto anotado, por ejemplo, está el problema de anclar un segmento en un ángulo de modo que un punto arbitrario en su interior sea el punto medio de tal segmento. Simple, tan simple como el que se estudia en esta experiencia de aula y que atrae y atrapa al estudiante en búsqueda de su solución.

Mhor Mascheroni, poeta y geómetra italiano (1750-1800) realizó la sorprendente lucubración con su respectiva demostración, de que una construcción posible con regla y compás tan solo se podía hacer con compás. De hecho, con un compás no se puede trazar una línea recta pero ella se supone construida, en la demostración de Mascheroni, con solo ubicar dos puntos que la determinan. De modo que las construcciones en geometría han jugado un papel importante y las reglas impuestas se convierten en retos importantes de vencer y las hacen divertidas. De hecho, en variadas ocasiones, las soluciones proponen referente teóricos diferentes e incluso nuevas teorías.

De otro lado, Bailey & Borwein, 2001, validan "la utilización de la tecnología computacional…con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas…" (p. 123), con el propósito de cimentar bases sólidas y lógicas sobre ciertos conceptos. En este sentido, la tecnología se convierte en una herramienta que permite ver el mundo de los conceptos de modo diferente y en consecuencia, amplía las formas de estudiar el conocimiento. En el caso de la utilización de Cabrí Geómètre, la utilización de las herramientas que trae por defecto, formulan respuestas inmediatas que configuran un procedimiento estándar de solución. La máquina imprime precisión a la construcción y deja al hombre su gobierno. En el caso de software de asistencia geométrica, la tarea más complicada está referida a lo que de manera tácita creía Euclides y que es el cálculo de puntos de intersección entre figuras. Los programadores, tienen allí un buen reto para vencer, sobre todo cuando de calcular puntos de intersección entre lugares geométricos se trata.

Complementariamente, en el contexto de la Educación Matemática Realista, la enseñanza de las matemáticas se trata como una actividad social. Las diversas interrelaciones existentes entre docentes y estudiantes producen reflexiones de diverso carácter en cada uno de ellos de manera que sus aportes provocan mayores niveles de comprensión. (Godino, 2011). Los estudiantes como partícipes activos del proceso enseñanza aprendizaje se involucran de manera tal que la intervención, la discusión, la cooperación, la revisión de las propuestas se convierten en elementos básicos de un proceso que pueden ayudar a convertir descripciones primarias de una construcción en elementos formales de la misma. Es esta idea, del concepto de "idoneidad interaccional" (Godino), la que se desea trabajar en esta experiencia.

Diseño y metodología

El propósito fundamental de la experiencia de investigación en el aula fue elaborar un agregado de soluciones al problema de "*construir un cuadrado dado su lado*" para lo cual era posible utilizar los conocimientos teóricos proporcionados por los cursos de geometría y las potencialidades de los diferentes recursos que trae el asistente geométrico Cabri Géomètre incorporados por defecto a su núcleo de acción que son macro-construcciones que en pocos pasos resumen las diversas operaciones geométricas que deben efectuarse con los instrumentos físicos regla y el compás al resolver problemas de construcción.

La experiencia inició con la revisión de elementos teóricos inherentes a problemas relacionados con construcciones geométricas y también con las herramientas geométricas que dispone Cabri, en particular aquellos sobre la construcción de un cuadrado dado un lado, entre los cuales se encuentran, en primer término, los resultados teóricos legados por Euclides, los cuales han sido extractados del texto de Eves, 1963.

- *Triángulo equilátero.* Es el primer problema de construcción de elabora Euclides en su libro Los Elementos.
- *El punto medio de un segmento.* (Proposición 10 de los Elementos) Que es una especie de cálculo sobre una figura geométrica y que sucede a la construcción de la bisectriz (Proposición 9) que también elabora Euclides en el Libro I de sus Elementos. Este punto medio también se puede calcular entre dos puntos sin necesidad de que se haya trazado el segmento que los une.
- *Perpendicular por un extremo.* (Proposición 11 de los Elementos) Esta construcción es estudiada por Euclides en el libro I de los elementos y se corresponde con los problemas

similares de la construcción de una perpendicular por un punto de un segmento y también por un punto externo al segmento.

- *Paralela a un segmento o recta*. (Proposición 31 del libro I de los Elementos) Que también explica Euclides en el libro I de sus Elementos.

Por defecto, Cabri tiene incorporadas en su núcleo de trabajo las siguientes macro-construcciones.

- *Simetría central*. Aunque es parte constitutiva de la geometría transformacional, obedece al modelo euclidiano pues se fundamenta en la extensión de un segmento por cualquiera de sus extremos y que Euclides lo escribe en sus Elementos como su segundo postulado.
- *Simetría axial*. Es otra de las herramientas dispuestas en Cabrí y que hacen el efecto del eje de simetría tal y como si fuera un espejo.
- *Homotecia*. Es la más simple entre las semejanzas que pueden establecerse y que desde Cabrí se halla de manera oportuna e inmediata.
- *Lugar Geométrico*. Que resulta de la elaboración dinámica de una construcción. Es uno de los recursos ricos y a veces la única estrategia de solución frente a diversos problemas de construcción.
- *Inverso de un punto respecto de una circunferencia*. Que se convierte en una herramienta importante, pues responde de manera positiva a la forma de trazar círculos sin compás o al trazo de rectas sin regla.

Una vez presentados los conceptos básicos se continuó con la presentación, por parte de los docentes de cinco soluciones del problema que utilizan recursos simples como perpendicularidad, paralelismo, circunferencia dado su centro y su radio, punto medio, simetría central y simetría axial.

Dos de las construcciones tratadas se ilustran gráficamente a continuación, con base en el referente teórico de que la idea central para la construcción de un cuadrado dado el lado, como ya se esbozó, termina con el cálculo constructivo de un tercer vértice o del centro del cuadrado que es el punto de intersección de sus diagonales.

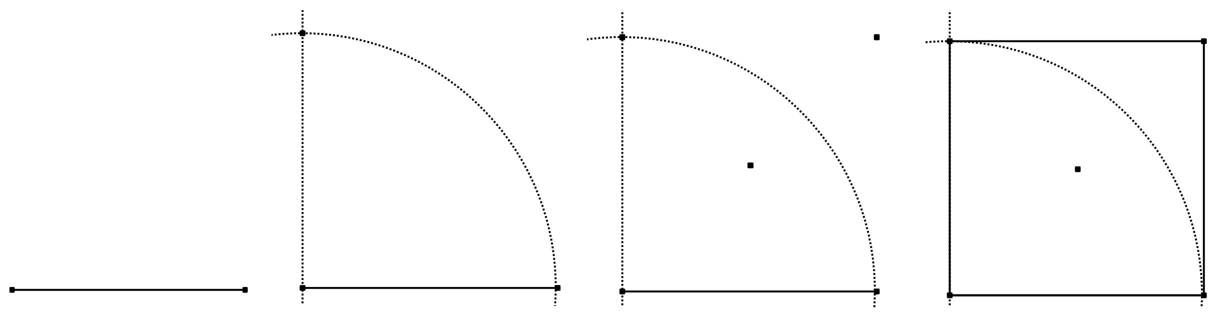

Figura 1. Construcción de un cuadrado que utiliza simetría central.

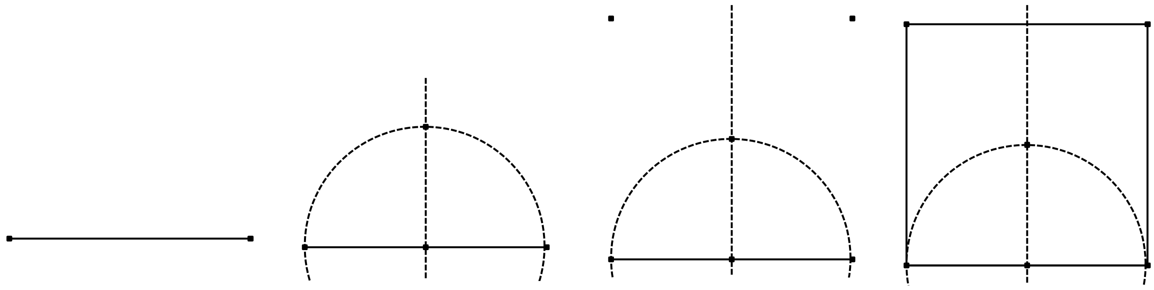

Figura 2. Una segunda construcción de un cuadrado que también utiliza simetría central.

A continuación se realizó un trabajo, en grupos de tres estudiantes, el cual consistió en el análisis de los argumentos teóricos que sustentaban cada una de las construcciones realizadas y su socialización en el aula de clase con el fin de unificar conocimientos y consolidar teóricamente los conceptos utilizados.

La siguiente etapa fue realizada por los docentes y básicamente trató de ilustrar la riqueza conceptual y operativa de CABRI en cuanto a la geometría transformacional se refiere. En este punto se tuvo necesidad de estudiar, bajo claros problemas de construcción cada una de las herramientas que por defecto trae el software. Es especial, las explicaciones se concentraron sobre los conceptos de homotecia e inversión respecto de una circunferencia.

La última etapa de la experiencia fue la más rica en trabajo, análisis y resultados pues fue la búsqueda personal o grupal de soluciones diferentes al problema en cuestión. En la medida en que los actores del proceso encontraron una nueva solución, esta era socializada en el grupo de manera argumentada, se revisaba críticamente desde el punto de vista conceptual y desde las fortalezas del ambiente Cabri, por ejemplo si la construcción era robusta o no, es decir, si los requisitos básicos de un cuadrado como perpendicularidad de lados contiguos, paralelismo de lados opuestos e igualdad entre los lados se mantienen bajo la prueba dinámica del arrastre de cualquiera de sus vértices, y una vez que recibía el visto bueno del grupo, entraba a formar parte de la colección de construcciones. Este proceso se repetía una vez más hasta que las actividades de la culminación del semestre obligaron a docentes y estudiantes a relegar las reuniones del grupo de trabajo a segundo plano.

Es importante llamar la atención de que contrario a los sentimientos de decepción o frustración, el grupo se mostró siempre animado y atento. De hecho, la experiencia fue más allá del aula y de los tiempos propuestos, y a lo largo de muchas reuniones, se revisaron otras soluciones entre las que sobresalen aquella que utiliza el concepto de homotecia, la que obedece a la descripción de la parábola como lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de un punto y una de ellas que contiene un artilugio geométrico, pero que es hermosa pues recurre al concepto de punto inverso respecto de una circunferencia y que a su vez utiliza la herramienta Cabri denominada Lugar Geométrico, aparte de otras que utilizan la rotación y la traslación de elementos.

El fruto de este trabajo consistió en la colección de veintidós construcciones del cuadrado y únicamente como una muestra se ilustra en la figura 3 la realizada por una terna de estudiantes conformada por Jefri Fernández, Natalia Descanse y Andrea Ortiz. Si Ud. desea tener acceso a los archivos de Cabri de tales construcciones puede solicitarlos a los autores de esta propuesta.

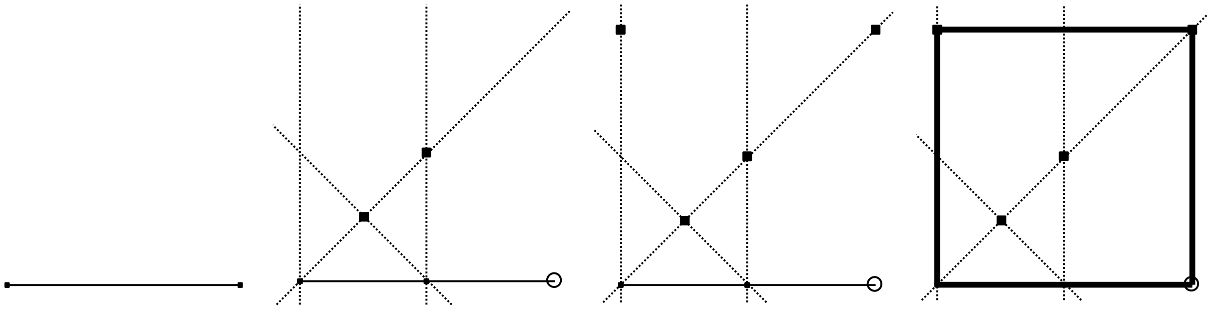

Figura 3. Construcción de un cuadrado que utiliza simetría central de forma iterativa.

La experiencia centró su accionar en el modelo denominado experiencia de aula que resulta enriquecedora en sí misma puesto que anima a los actores a jugar un papel fundamental en la consolidación y uso del conocimiento. En este caso, se vencen los roles de los actores dado que se diluye la figura del profesor y son los estudiantes los protagonistas del aprendizaje. Como ya se ha indicado, el problema va sesgando su accionar hacia el sentido recreativo de la misma y consigue movilizar el conocimiento de manera efectiva.

Logros y dificultades evidenciadas

Logros. A través del uso de herramientas computacionales aparece ligada la inquietud que tienen los estudiantes de convertir el medio en objeto central de estudio cuando debe convertirse en algo invisible y transparente, es decir, en una ventana a través de la cual se mira.

Los recursos informáticos, las estrategias didácticas que se planean no son sino formas de ampliar el conocimiento y de atravesar sus formas de uso. En este sentido, la experiencia resultó enriquecedora y provechosa.

La experiencia de proponer y formular problemas, como el estudiado, de gran simpleza y ricos en alternativas de solución, resultó enriquecedora pues un problema se convierte en un reto personal que dinamiza el conocimiento. La experiencia dicta a la razón de la existencia de problemas con una única vía de solución ocasionalmente compleja. ¿Es posible constituir problemas con varias y diversas soluciones?. Un prototipo de este hecho está ligado al cuadrado y es el famoso teorema de Pitágoras del que el profesor Elisha S. Loomis coleccionó 256 demostraciones. Y es que el espíritu humano no se doblega ante una sola línea de escape, en este sentido, no le ha sido suficiente la demostración elaborada por Euclides y cada uno de los subsiguientes autores pone un sello e impronta personales.

Las primeras respuestas, ya referidas a la experiencia realizada, fueron especialmente atractivas pues declaraban la utilización de los argumentos teóricos que se habían preconizado cuales eran los de localizar un tercer vértice o calcular el punto medio del cuadrado dentro de su área. De otro lado, buscar una nueva solución mueve el conocimiento, anima la búsqueda frente a la intención de poner un sello personal al problema, y este aspecto, sin duda, enriqueció la experiencia, sin que en el grupo, descubrir una nueva solución se haya convertido en un asunto competitivo.

Sin duda, emplear herramientas como la homotecia, conceptos como el de lugar geométrico, puntos de inversión respecto de una circunferencia, resultaron llamativos e inesperados. Estas soluciones sobresalen entre todas, no solo por su alto entretejido teórico, la gran riqueza que poseen sino porque su utilización necesita de una argumentación teórica inicial que se hace indispensable y anterior a la simple utilización de recurso.

No es simple formular problemas que alleguen tantas oportunidades docentes. Requiere de buen juicio, responsabilidad, alto sentido profesional, conocimiento de la temática y una formación geométrica seria. Creemos que la escuela está en mora de establecer caminos que consoliden recursos como el mencionado. No es el caso que los recursos sean exclusivamente materiales, existen otros, teóricos, abstractos, intangibles que dan lustre a una institución y pueden convertirse en proyectos de largo plazo y alcance.

Los niveles de alegría, de animación, de satisfacción personal que alcanzaron los estudiantes, le dan razón a continuar con propuestas similares a la que ahora se muestra. Hemos anotado que no es algo simple, pero sin duda, resulta ser, de manera organizada, algo que entrega dignidad y respeto a cada uno de los estudiantes, siendo cada uno de ellos una importante razón de la existencia de las instituciones.

Dificultades. La única dificultad que se avizora aparece referida a los tiempos invertidos en la ejecución de la experiencia dado que deslinda lo establecido en los horarios de clase, usurpando, como en efecto lo hace, tiempos que deben dirigirse al estudio de otras temáticas. A su vez, como ya se ha explicado, en esta dificultad aparece una riqueza, surge un eslabón que abre oportunidad a seguir ejecutando el proyecto, animándolo con propuestas similares o diversas que abran el abanico de actividades que requieren las nuevas generaciones.

Si bien, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría de alguna manera relegados en los contextos escolares, el mundo moderno ofrece nuevas alternativas para estudiar viejos problemas.

Conclusiones

La actividad realizada contenida en el modelo de experiencia de aula fue enriquecedora pues permitió inter-relacionar los conceptos simples que habían conocido y aprendido los estudiantes. De otro lado, atacar un problema que a todas luces resulta simple, sencillo y entendible rompiendo los pocos esquemas que se explicaron de manera previa resultó ser el motor dinamizador en el conocimiento.

Frente a un problema tan simple, el haber alcanzado más de una veintena de soluciones de las que resulta imposible destacar la mejor o la más bella dado que algunas inter-relacionan conceptos y definiciones que parecerían no caber en una solución como la definición de parábola como un lugar geométrico especial, o el inverso de un punto respecto de una circunferencia y de hecho la semejanza de figuras ligadas entre sí por homotecias, es particularmente asombroso, resulta ser una manera espléndida de mover el conocimiento y la da sentido y oportunidad al ejercicio de aprender.

Es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generan ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa, multiplicando su papel protagónico. Finalmente, el papel más importante entre los actores del aprendizaje lo juega el propio estudiante y las escuelas y docentes se convierten en simples mediadores que deben planear los mecanismos y estrategias que median el conocimiento, el aprendizaje y sus formas de aplicación en la solución de problemas y situaciones de interés personal.

Referencias

Bailey, D. & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook.* En B. Engquist y W. Schmid (Eds.), Mathematics unlimited-2001 and beyond. New York: Springer-Verlag.

Bellos, A. (2010). *Alex en el país de los números. Un viaje al maravilloso mundo de las matemáticas.* Traducción de José Hernández. Grijalbo Editores, Bogotá. Colombia.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM. Recife. Brasil.

Heath, T. (1908). The Thirteen Books of Euclid's Elements. Dover Publications, Inc, New York.

Eves, H. (1963). *Estudio de las Geometrías* (Tomo I). México, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http:// www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ogilvy. C. S. (1983). *Excursions in Geometry*. Dover Publications, New York, USA.

Orobio, H., & Ortiz, M. (1997). *Educación Matemática y desarrollo del sujeto. Investigación en el aula. Cooperativa Editorial Magisterio.* Santafé de Bogotá, Colombia.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.