



## Series geométricas convergentes en la geometría sintética

Fernando **Soto** Agreda  
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño  
Colombia  
[fsoto@udenar.edu.co](mailto:fsoto@udenar.edu.co)

Saulo **Mosquera** López  
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño  
Colombia  
[samolo@udenar.edu.co](mailto:samolo@udenar.edu.co)

### Resumen

Uno de los conceptos más finos del análisis matemático es el de infinito y uno de los primeros en estudiarlo fue Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor en una época de creencia generalizada que solo Dios podía hablar de ello y de la nada. Para analizar este concepto, en el desarrollo de la asignatura geometría de transformaciones, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se realizaron una serie de actividades, indagaciones, experimentos y construcciones, con fundamento teórico en la transformación de semejanza denominada homotecia y el apoyo del software de geometría dinámica CABRI II, que con soporte enteramente visual permitieron desarrollar los conceptos de infinito y de serie infinita. En esta presentación se sintetizan los esfuerzos realizados en esta dirección.

*Palabras clave:* Área, Homotecia, Serie, Serie geométrica, competencias, estándares.

### Planteamiento del problema

Al interior de la malla curricular del programa de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad de Nariño, se encuentran asignaturas relacionadas con las áreas de análisis y de álgebra y geometría tales como análisis matemático, álgebra lineal, geometría analítica y geometría de transformaciones, entre otras. Dado que los objetos de estudio de estas tienen grados diferentes de abstracción no es fácil hallar temas que puedan tratarse conjuntamente a pesar de la fuerte interrelación que tuvieron estas ramas del conocimiento en su origen, sin embargo el estudio del concepto de infinito y de series convergentes permitió establecer la

conexión entre la geometría y el análisis, para lo cual se utilizaron conceptos básicos de geometría de transformaciones y la potencialidad del software de asistencia geométrica CABRÍ.

En este caso, se aprovecharon los conceptos de cuadrado y de área de un cuadrado para seccionarlos en cierto número de partes que van produciendo una serie y a partir de ello se generaron las actividades propuestas las cuales logran establecer procedimientos generales de la actividad matemática, en particular, la formulación, tratamiento y resolución de problemas, el razonamiento y complementariamente, la solución de problemas de construcción (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006). En modo amplio, el problema estudiado está constituido por las formas de establecer diseños geométricos que induzcan el infinito, como problemas de construcción, que representen series geométricas convergentes y sobre los cuales, el estudiante debe inferir la serie representada y su correspondiente valor de convergencia.

El modelo didáctico seleccionado para diseñar las estrategias a emplear y problemas a proponer y resolver es el estudio de clases; se ha escogido este modelo puesto que indaga sobre el método de enseñanza más eficiente y la mejor manera para orientar las clases, permite las críticas y sugerencias mutuas entre un equipo de profesores colaboradores con el fin de incrementar la calidad de la actividad profesional docente.

Ahora bien, las actividades de aprendizaje establecidas, estuvieron mediadas por la utilización de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en Inglés) de asistencia geométrica, pensando en que su mediación permite estudiar los objetos desde otros ángulos, posibilitan superar las dificultades en el aula y comprender conceptos tales como infinito o series convergentes para que no queden referidos a simples especulaciones teóricas. El uso de sistemas computacionales permite:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo y construcción, dejando espacio para realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos y su correspondiente análisis.
- Utilizar el sistema como elemento de motivación, no como centro del aprendizaje, puesto que relega al computador el trabajo de exactitud y precisión alrededor de construcciones robustas y en ellas quedan contenidas las diferentes e infinitas posibilidades de dimensiones sobre las figuras objeto de estudio. El sentido de la vista juega un papel importante dando lugar al análisis y el razonamiento para establecer las reglas que rigen las medidas en la construcción.
- En el caso particular del software que se usa en la experiencia, simula la utilización de instrumentos físicos como el compás y la regla, pero convierte transformaciones como la homotecia, la inversión, el concepto de lugar geométrico y otras, en instrumentos de alta precisión que se pueden utilizar en la resolución de problemas. En adición a esto, también posibilita la construcción de otros elementos denominados macro-construcciones y que se convierten en herramientas propias de cada usuario del recurso, cuando se trata de un elemento de uso repetitivo.

Complementariamente, el sistema computacional utilizado, CABRI II es excelente y se mantiene en proceso de evaluación, como consecuencia de lo cual está en constante mejoramiento, tal es el caso, por ejemplo, de la ejecución de construcciones que requieren de intersecciones de puntos entre lugares geométricos, problema que los creadores de Cabrí han venido superando constantemente. Es de anotar que el cálculo de puntos de intersección resulta,

en opinión de expertos en geometría computacional, el problema más complejo que tiene todo software de geometría dinámica.

Conjugar en la clase de matemáticas tanto los aspectos teóricos como experimentales en el quehacer docente dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño proporciona técnicas y teorías de las que los futuros profesionales de la educación matemática seleccionarán las apropiadas para amalgamar sus propias estrategias personales, consolidar su impronta profesional y de hecho cuidar los objetivos establecidos en los Estándares Básicos de Competencias señalados por el Ministerio de Educación Nacional y en consecuencia, el propósito de la ponencia es, presentar algunos de los resultados que se dirigen a esa labor. Desde este punto de vista, los programas de licenciaturas en todas las ramas del saber deben procurar ejemplos de estrategias didácticas, caminos que permitan atrapar el conocimiento de mejor manera para que el mismo se pueda inter-relacionar en la solución de problemas de diferente índole. Lo cierto es que en la vida de una persona resulta imposible saber en qué preciso momento un determinado conocimiento debe o puede aplicarse, pero de hecho, en el campo profesional docente, todo tipo de conocimiento puede resultar coyuntural y aún más, no se descarta que su aplicación en la solución de un problema se dirija al estudio de un objeto que en apariencia no se liga, no hace empatía con el mecanismo de solución.

En el aspecto teórico, la experiencia centra su accionar en la estrategia denominada estudio de clase, técnica escolar de amplio uso en el Japón, la cual se puede considerar, resumidamente, como una investigación que tiene como objeto la clase misma, se compone de tres etapas básicas que se describen brevemente más adelante. Uno de los resultados importantes del foro mundial de educación celebrado en Dakar en el año 2000 y que a nuestro juicio sigue vigente, es que la asistencia a la escuela por parte de los niños no era por sí sola importante sino que más bien, la importancia radica en que la escuela es el mejor sitio para aprender. En el acta de cierre del foro mencionado se indicó que la meta educativa para una sociedad internacional era la de una educación de calidad para todos. En este sentido, aparece como obligación moral elevar la calidad de cada uno de los procedimientos escolares. El estudio de clases lo permite pues es un método con el cual el personal docente realiza mejoras a las formas de impartir y distribuir el conocimiento. Sus tres momentos fundamentales son: Planeación, Ejecución y Evaluación, los cuales se describen brevemente enseguida.

La Planeación comprende la selección de un problema en relación con el aprendizaje de los educandos, el estudio reflexivo del mismo desde los aspectos teóricos, didácticos y curriculares y la selección, indagación, investigación y preparación de los materiales didácticos que pueden ser teóricos, físicos o prácticos y en la que también sobresalen los procedimientos didácticos y las estrategias a emplear.

La Ejecución es la etapa en la cual la clase planeada se desarrolla en el aula con el grupo de estudiantes y esta puede ser asistida por el equipo docente que participó en el diseño de la misma.

La fase de Evaluación está referida a una reflexión entre el colectivo docente en la que aparecen observaciones, opiniones y sugerencias. Con todo esto, el personal docente hace un estudio positivo de la clase y lleva diariamente a la práctica el progreso de la misma.

En sentido práctico, los elementos básicos constitutivos de las clases son los estudiantes, el colectivo docente y los materiales didácticos utilizados. Los estudiantes fueron los veinte jóvenes del sexto semestre del programa de licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño que

en su pensum escolar deben estudiar geometría de transformaciones; se reconoce que han hecho un recorrido por los conceptos teóricos suficientes para desarrollar la experiencia. Los profesores acompañantes fueron del equipo adscrito al programa de la licenciatura que conforman al área de álgebra y geometría. Es de anotar que los profesores del departamento se dividen en cuatro grupos: área de análisis, área de álgebra y geometría, área de estadística y área de educación matemática. Los profesores que pertenecen al área de álgebra y geometría son los que ofrecen todos los cursos relacionados con esta y que se estudian en la licenciatura. En este trabajo, el material didáctico que se ha utilizado lo constituyen los equipos computacionales, el software de asistencia Cabri Géomètre y cada uno de los ejemplos constitutivos de la etapa inicial de la experiencia. De hecho, también aparecen como ingredientes constitutivos de los materiales, el conjunto de explicaciones y pistas contempladas en los ejemplos iniciales.

Entre el material didáctico a emplear como mediador del conocimiento está Cabri Géomètre que es un software de asistencia geométrica cuyo nacimiento está en el laboratorio docente de ayudas didácticas dirigido por el profesor Jean Marie Laborde en la Universidad de Grenoble en Francia. El software corresponde a la línea denominada geometría dinámica y sugiere construcciones robustas cuyas características y requisitos perduran a pesar del arrastre que se aplique a elementos básicos e iniciales de la construcción. Desde la aparición de este tipo de sistemas computarizados, el estudio de la geometría se ha reanimado y su utilización crece de manera lineal en diferentes países del orbe. En el caso de Colombia, en particular, a partir del 2008 se constituyó un equipo liderado por la profesora Ana Celia Castiblanco en torno del manejo de la Calculadora TI 98-plus que contiene versiones resumidas de Derive y de Cabri y son varias las universidades que han configurado eventos en los que circulan experiencias centradas en software de geometría dinámica.

### **Fundamentación teórica**

En los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y en los Lineamientos Curriculares se vislumbra con claridad el papel que desempeña el estudio de las operaciones, en especial la adición de números naturales, enteros y racionales (fraccionarios en general), pero en el carácter práctico se detiene en sumas finitas. Tal es el caso, por ejemplo, de las sumas parciales de la serie natural que construye a los números triangulares o de las sumas parciales de los cuadrados perfectos y otras sumas de series de potencias. Pero de ninguna manera se preocupa por estudiar series de infinitos sumandos, sobre todo de aquellas que son convergentes. Sin embargo, se explican por razones didácticas las famosas paradojas de Zenón como la de Aquiles y la tortuga o el de la flecha que siempre recorre la mitad de lo que falta y en consecuencia jamás llega a su destino, paradojas que proporcionan elementos básicos, que permiten en el aula de clase reconocer patrones centrados en el infinito y en consecuencia, conjeturar, experimentar, generalizar y construir formas geométricas, entre otros, que como en la teoría de fractales, señalen el camino hacia sumas infinitas de áreas que resultan convergentes.

Es un hecho claro, que la generalidad de los profesores de matemáticas desconocen de variadas estrategias que motiven hacia el aprendizaje y aplicación de las operaciones aritméticas y matemáticas. Por ejemplo, hacen poco uso de las propiedades al realizar los cálculos y dejan de emplear aspectos inherentes a las actividades sociales generales que en el fondo son aplicaciones aritméticas. Por ejemplo, los almanaques y calendarios se forman en un sistema modular aritmético, entre seis números del uno al diez siempre hay dos con suma once, entre cinco números cualesquiera se encuentran tres cuya suma es divisible por tres. Estos ejemplos, siendo de corte finito, consolidan alternativas dirigidas a algo, que incluso a los matemáticos, parece

asombroso: la posibilidad de que infinitos sumandos finitos tengan como suma otro número finito. Justo, esta experiencia se detiene en constituir ejemplos en los que se perciba de manera directa el cómo sumas infinitas producen un número finito.

Complementariamente (Bailey & Borwein, 2001) validan “la utilización de la tecnología computacional...con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas...” (p. 123), además pueden utilizarse con el objetivo de cimentar bases sólidas y lógicas sobre conceptos centrales del análisis como el concepto de infinito, lo cual confirma que el trabajo experimental complementado con la fundamentación teórica proporciona el marco conceptual alrededor del cual se desarrolla esta propuesta. En este sentido, la tecnología se convierte en una herramienta que permite ver el mundo de los conceptos de modo diferente y en consecuencia, amplía las formas de estudiar el conocimiento. Es conocido que el infinito es un concepto, una idea que no puede manipularse computacionalmente y en consecuencia, un software de asistencia computacional tan solo puede simular. Esto explica la riqueza de la experiencia, pues se fija en establecer ejemplos que de forma evidente procuren la formación del infinito. Al respecto, la formación del concepto precede a etapas constructivas de carácter inductivo pues la mayoría de los ejemplos se fundamentan en elaborar homotecias de manera iterativa. Es de recordar que la esencia del infinito trasciende al de número, pues si a un número se le suma uno cambia su naturaleza, en cambio si al infinito se le suma uno, su esencia prevalece.

Como se indica en los ejemplos iniciales más adelante, si bien, la iteración es finita, la evidencia deja al cerebro lucubrar hacia el infinito. Es el gran significado de los procesos inductivos y de lo que en términos generales constituyen los métodos de inducción matemática y el método de inducción completa. El infinito es un concepto fino y difícil de arraigar, el infinito no es un número y si bien, dentro del conocimiento geométrico se escinde en el infinito potencial y el existencial, en el campo analítico parecen infinitos tipos de infinitos dentro de los cuales, los primeros y más pequeños se corresponden con la cardinalidad de los números naturales y el otro con la enumerabilidad del continuo o con la cardinalidad de los irracionales o reales. De allí en adelante va subiendo la escala de infinitos, reproduciéndose a un tamaño mayor con solo tomar la cantidad de subconjuntos que posee cada conjunto numérico en el infinito base. Por ejemplo, la cardinalidad de los naturales es aleph cero y la de sus potenciales subconjuntos es igual a la potencia de dos a la aleph cero que entrega el aleph uno, también denominado continuo. Estos aspectos aluden a las dificultades propias del concepto y por ello resulta sorprendente que se puedan sumar infinitos términos y que su suma sea también finita, por ejemplo, que no vaya más allá de la mitad de uno.

### **Diseño y metodología**

El propósito fundamental de la actividad fue el de proponer situaciones que generaran sumas infinitas convergentes a partir de las que fuese proporcionando el profesor como ejemplos y que fueron aumentándose en la medida de que en el estudio de clase, los colegas discernieran otros y nuevos ejemplos. De hecho, la cantidad de propuestas sobre series infinitas convergentes motivó a los estudiantes sobre el estudio de la semejanza en particular y en especial el concepto de fractal que apareció en una de las clases y el más elemental entre ellos que es de la homotecia centrada en un punto y con un factor de escala. De hecho, aparece una pregunta de si es factible que dada una fracción propia, se pueda construir una sucesión infinita de figuras semejantes cuya área total converja a tal número. Esta es una pregunta abierta y se convierte en un acicate de importancia que valida por sí sola el estudio de clase que se presenta en este trabajo y cuya

respuesta se sabe positiva dentro del área del análisis, pero que concentra gran esfuerzo de construcción dentro del modelo de la geometría sintética. Igualmente importante, es la aparición de la pregunta sobre la suma de los perímetros de las figuras, primero la indagación respecto de la convergencia de la suma de perímetros y luego la de su cálculo. Sin embargo, esta inquietud dejó de tratarse dentro de la experiencia y se lleva como fuente de indagación y de constatación a una nueva. Lo cierto es que, en el desarrollo epistemológico de la relación entre el área y el perímetro, ha aparecido en diversos pueblos el paradigma de que el perímetro es una buena prueba para el área. Contrario a lo que realmente sucede, figuras de gran perímetro puede tener un área reducida y menor que otras. Este paradigma ha sido encontrado entre los griegos, por ejemplo y en varias experiencias de capacitación que los autores han desarrollado con algunos pueblos indígenas de nuestra región, por ejemplo con los que habitan la comarca de los Pastos en Cumbal, Nariño, Departamento situado en el sur de Colombia.

Como lo hemos mencionado, en la metodología del estudio de clase, el desarrollo de la clase no termina con su impartición, ni la instrucción termina con la capacitación recibida por los estudiantes, como se ha indicado, suelen aparecer otras y diversas inquietudes que movilizan el conocimiento. Es el modo en que suelen aparecer reacciones, inquietudes, intereses, aplicaciones que van más allá de las expectativas docentes.

En este estudio de clases se revisaron temas inherentes al mismo como parte sustantiva de los recursos o materiales didáctico tales como:

- *Sumas parciales*. Existen secuencias conocidas que producen fórmulas para el cálculo de progresiones aritméticas y geométricas, como la de los números triangulares que se corresponden con las sumas parciales de la serie natural, o las sumas de la secuencia de los impares cuya solución está referida a los cuadrados perfectos, o las sumas de la secuencia de cuadrados perfectos.
- *El concepto de infinito*. Este concepto que subyace en el análisis, también se revisa a la luz de la geometría como existencial y potencial, demostrando en primera instancia a través de una biyección entre un segmento y una recta, que los dos objetos tienen la misma cantidad de elementos y en cuanto a lo potencial, subrayando el segundo postulado de Euclides referido a que un segmento puede extenderse por cualquiera de los dos extremos siempre que se requiera.
- *Series infinitas*. Aquí se trató la demostración de la condición necesaria para que una progresión geométrica sea convergente y que simplemente asegura que la razón de la misma debe estar entre menos uno y uno.
- *Área de figuras planas*. En particular, el área de rectángulos, cuadrados y triángulos. Este concepto ha requerido profundo análisis epistemológico, discusiones que escapan los objetivos de esta experiencia.
- *Homotecia*. Como herramienta de la geometría transformacional y que consigue la construcción inmediata de figuras semejantes a partir de un punto que es el centro de la transformación y un factor que se corresponde con una reducción si es menor que uno o con una ampliación en caso contrario.
- *Macro-construcción*. Es una herramienta que surge del interés de uso con carácter repetitivo y que se establece a través de pasos concatenados dentro del camino lógico

sugerido por Euclides. Si el software revisa que los pasos de una construcción carecen de esa conexión lógica, no permite que la misma se determine como macro-construcción.

### Ejemplos de recursos didácticos

La idea central de construcción de fracciones a través de series infinitas inicia con la adopción de polígonos regulares que se toman de área uno y que se diseccionan vía homotecia en partes cuya suma de las áreas se corresponden con la suma de los término de una serie geométrica. Por ejemplo, al uno es fácil llegar si, refiriéndose a capacidad, vamos llenando una cantina con la mitad del líquido que hace falta para completarla. O lo que es lo mismo, se puede completar al infinito el área de un cuadrado, sombreando la mitad de lo que siempre hace falta tal y como se muestra a continuación.

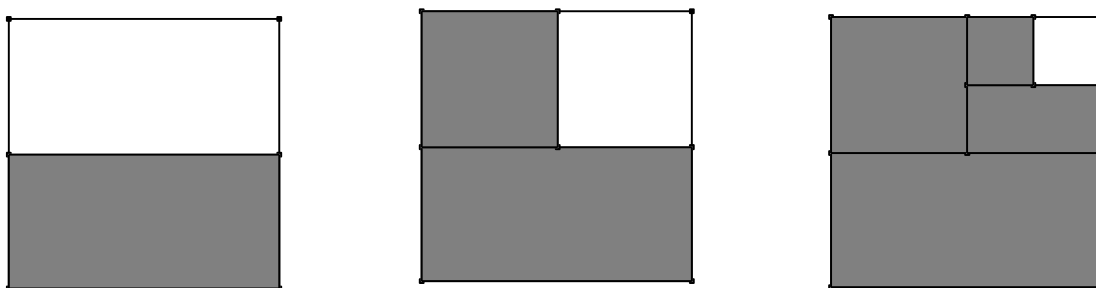


Figura 1. Convergencia a uno a través de la mitad.

Un segundo ejemplo lo constituye el tomar cuartas partes de las cuartas partes de una unidad con lo cual se completa una tercera parte. En este ejemplo, se ve el cómo lo visual brinda una ayuda ejemplar al razonamiento. En la figura 2, se muestra la selección de las cuartas partes de una cuarta parte en lo faltante que al infinito produce en total un tercio y en la figura 3 se evidencia que en efecto es lo mismo que tomar terceras partes, así el total de lo que se toma es una tercera parte del todo.

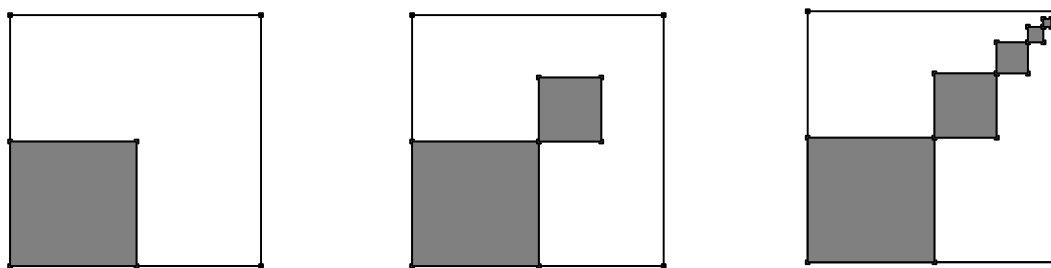


Figura 2. Convergencia a un tercio a través de cuartas partes.

A continuación, la misma construcción vía terceras partes.

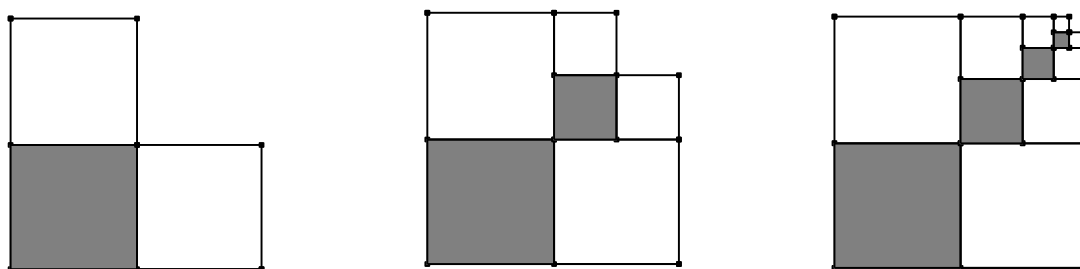


Figura 3. Convergencia a un tercio a través de terceras partes.

Unida a la forma de llegar a la tercera parte de la unidad con el agregado de cuartas partes, se propuso un ejemplo dinámico a través de un control de deslizamiento que se puede construir en Cabrí como aplicación de una regla de tres simple directa. El ejemplo indicado en la figura 4 presenta cuatro momentos que se reducen finalmente a la suma infinita que inducen los ejemplos 1 y 2.

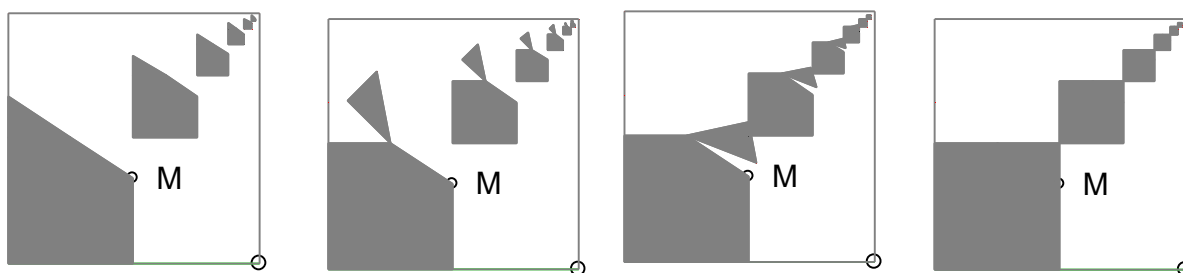


Figura 4. Otra convergencia a un tercio a través de cuartas partes.

### Logros y dificultades evidenciadas

**Logros.** A través del uso de herramientas computacionales se consiguió una adecuada interpretación de los materiales didácticos. Los ejemplos se iban constituyendo en material que se visibilizaban de forma tal, que aparecían de forma natural las argumentaciones analíticas de los resultados. De este modo, la evidencia de los resultados, como sumas de series infinitas, animaron la consolidación de otros ejemplos y motivaron la construcción de los mismos. Estas evidencias geométricas suscitaron buen aprovechamiento animando a la indagación analítica de los hechos, los cuales, en el fondo, tratan de sumas denominadas progresiones geométricas que son convergentes bajo requisitos fijos de la razón de cambio.

Las respuestas iniciales a las actividades propuestas no fueron del todo satisfactorias, pero mediante el análisis y la discusión del trabajo realizado en los grupos aparecieron construcciones que se aprovecharon de manera adecuada. En este punto, el asunto del debate entre los colegas de lo examinado en clase, consiguió enriquecer la experiencia pues aparecieron resultados que se corresponden con el modelo de la geometría analítica para series infinitas cuya razón es cualquier real entre menos uno y uno. De modo que, esta discusión o debate, no solo enriquece en sí mismo a la experiencia sino que acude a formar un equipo docente más fuerte, seguro y homogéneo lo que de manera tácita clasifica a la institución en unos niveles altos frente a su quehacer.

A nuestro juicio, los aspectos más importantes se sujetan a la aparición de otras inquietudes sobre la misma temática. La experiencia se centró sobre el concepto de área de figuras regulares y acotadas y no sobre las sumas infinitas de sus perímetros. En este sentido, experiencias como esta resultan formativas, pues la intención de la escuela no solo es la de forjar imágenes mentales de lo que es el mundo y el hombre, sino también la de que los estudiantes por su autonomía sean capaces de organizar sus propias preguntas.

**Dificultades.** La única dificultad que se avizora en el trabajo se refiere a su riqueza propositiva y es la pregunta de si es factible construir un ejemplo evidente, dentro de la geometría sintética que muestre una serie infinita convergente en un racional previamente fijado.



Esta dificultad de planear una construcción elemental que logre dar respuesta a la inquietud, es por sí sola un gran objetivo dado que una de las funciones sustantivas de la escuela no radica en llenar de conocimientos a las personas tal y como si fueran unas alcancías, sino de indicar caminos que consoliden, como ya se dijo, el organizar sus propias preguntas.

### Conclusiones

La actividad realizada contenida en el modelo de estudio de clase fue enriquecedora pues permitió inter-relacionar los conceptos que atañen los unos al área del análisis y los otros correspondientes con el modelo de la geometría sintética. La experiencia generó otros y diversos conocimientos al tiempo que fomentó el trabajo en grupo, su aspecto colaborativo y puso en acción al grupo docente dignificando y dándole sentido a la profesión docente.

Es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generen ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa. En este estudio de clase, se mostró como el equipo docente juega un papel protagónico representando el papel principal, pues prevé dificultades, modifica sus propias capacidades, toma medidas frente a las dificultades previstas y desarrolla su propia capacidad de equipo, elevando a la vez las capacidades y competencias de cada uno de sus miembros.

### Referencias y bibliografía

- Bailey, D., & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook*. En B. Engquist, & W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited-2001 and beyond*. New York: Springer-Verlag.
- Foro Mundial sobre la Educación. (2000). *Marco de acción de Dakar. Educación para todos: Cumplir nuestros compromisos comunes*. Dakar
- Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry environments as a source of rich learning context for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44.
- Landaverde, F. (1955). *Curso de Geometría*. Bogotá- Colombia. Editorial Retina, primera edición.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *ESTUDIO de Clase: Una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas Educativas*. Bogotá. DIGA Estudio de diseño.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: [http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)