



La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural

Francisco **Clemente**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

fclencis@gmail.com

Germán **Torregrosa**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

german.torregrosa@ua.es

Salvador **Llinares**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es evidenciar relaciones entre la identificación de configuraciones que inician el razonamiento configural y la trayectoria de resolución de problemas de probar en geometría. Los resultados indican que la identificación de una figura prototípica en la configuración inicial activa determinados conocimientos de geometría determinando la trayectoria de resolución. Estos resultados sugieren la necesidad de potenciar en la enseñanza de la geometría el reconocimiento explícito de la relación entre la identificación de sub-configuraciones y la generación de determinadas trayectorias de resolución.

Palabras clave: aprendizaje de la geometría, razonamiento configural, prueba, figura prototípica

Abstract

The goal of this research is to establish the relationships between the identification of configurations that initiate configural reasoning and the trajectory of the resolution of geometry proof problems. The results show that the identification of a prototypical figure in the initial configuration activates certain knowledge of geometry and determining a trajectory of resolution. These results suggest the need to enhance the teaching of geometry explicit recognition of the

relationship between the identification of sub-configurations and generating certain trajectories resolution.

Keywords: learning of geometry, configural reasoning, proof, prototypical figure

Introducción

El análisis de la relación entre los procesos de visualización y el conocimiento de geometría en la resolución de problemas de probar ha puesto de manifiesto las dificultades que tienen algunos resolutores en usar el conocimiento de geometría previamente aprendido (Chinnappan y Lawson, 1998; Battista, 2007, 2008; Gal y Linchevski, 2010). Duval (1995, 2007) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras en el proceso de resolución de problemas de probar que usan una configuración geométrica. En los procesos de resolución de estos problemas se han identificado dos momentos relevantes (Clemente & Llinares, 2013, 2014; en prensa; Llinares & Clemente, 2014; Prior & Torregrosa, 2013). En primer lugar, cuando el resolutor asocia algunas propiedades o definiciones a la configuración geométrica dada. El segundo momento, cuando los diferentes hechos geométricos se relacionan mediante cadenas lógicas de inferencias “si... entonces...”. Así, la resolución de problemas de probar se apoya inicialmente en dotar de sentido a la situación mediante algunos hechos geométricos identificados en la configuración como premisas de alguna relación previamente conocida. Es decir, hay que generar alguna conjetura basada en herramientas visuales que sugieren ideas que pueden ser usadas en la elaboración de relaciones lógicas.

Duval (1995), caracteriza dos aprehensiones que intervienen en este proceso. Las aprehensiones operativas se dan cuando el resolutor modifica una figura para considerar sub-configuraciones. Esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. En segundo lugar, denomina aprehensión discursiva cuando el estudiante asocia afirmaciones matemáticas a configuraciones o sub-configuraciones.

La idea de Razonamiento Configural, entendido como la coordinación de las aprehensiones operativas y discursivas nos está ayudando a comprender mejor cómo los estudiantes resuelven problemas de probar y el papel que desempeña la relación entre lo visual y el desarrollo de razonamientos deductivos. El Razonamiento Configural puede desembocar en “Truncamiento” (la coordinación proporciona la “idea” para resolver deductivamente el problema); o bien, en un “Bucle” (situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución) (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010).

Las figuras prototípicas son representaciones que corresponden a una organización regular del contorno, orientación y forma (Mesquita, 1998). Estas características refuerzan la percepción de unas determinadas representaciones respecto a otras y pueden tener un efecto heurístico, ya que incrementan la “visibilidad” de una figura particular y sus posibilidades de reorganización, que puede desempeñar un papel esencial en la búsqueda de una solución en un problema de geometría. Esto quiere decir que, de entre las varias figuras que el estudiante puede observar en la representación inicial, la que logra llamar su atención estará vinculada con alguna de las figuras prototípicas que guarda en su memoria (Gutiérrez & Jaime, 1999). En las situaciones en las que hay que construir una prueba y en la que hay que establecer algún vínculo entre la argumentación visual y la prueba se plantea la necesidad de estudiar el papel que desempeña la identificación de una sub-configuración a partir de la cual se inician

las coordinaciones entre las aprehensiones discursivas y operativas que constituyen el razonamiento configural.

Mientras que el uso de una figura prototípica recuperada de la memoria y usada para identificar alguna sub-configuración puede ayudar a la resolución del problema, algunas veces el apoyo visual hace evidente a los resolutores relaciones no verdaderas lo que puede generar un razonamiento configural no adecuado. En este proceso inicial en la resolución de los problemas de geometría, la idea de la “tipicidad” de una representación (Hershkowitz, 1990) intenta poner de relieve la influencia que tiene el uso de representaciones prototípicas para mostrar más claramente algún atributo geométrico. La imagen prototípica que los estudiantes han generado a lo largo de su experiencia escolar influye en su capacidad de reconocer figuras o construir determinados objetos geométricos (Vinner, y Hershkowitz, 1980). En el caso particular de los problemas de probar, la importancia de la identificación de una sub-configuración, durante la resolución de los problemas que proporcionan una figura, radica en que ayuda a activar algunos conocimientos de geometría frente a otros. Es decir, el acceso y uso del conocimiento de geometría durante la resolución de problemas está influenciado por la naturaleza de las relaciones que el resolutor haya establecido entre los ítems de conocimiento. Por tanto, determinar cómo la identificación de una configuración permite movilizar determinados ítems de conocimiento puede aportar información sobre la naturaleza de la relación entre la visualización y el conocimiento usado de manera productiva durante la resolución del problema (Chinnappan, 1998; Gal & Linchevski, 2010). Considerando lo anterior, planteamos el siguiente objetivo de investigación centrado en caracterizar la relación entre la identificación de una sub-configuración, el conocimiento de geometría activado y la trayectoria de resolución seguida:

- Caracterizar el papel de la visualización (puesto de manifiesto al identificar una sub-configuración relevante) al iniciar el razonamiento configural determinando una trayectoria de resolución.

Método

Participantes

En este estudio participaron 182 estudiantes para maestros en un programa de formación inicial de maestros. Los estudiantes habían cursado una asignatura sobre Sentido Geométrico organizada según los procesos cognitivos de visualización, prueba y construcción (Duval, 1995). Parte del contenido y las actividades en esta asignatura estaban dirigidas a aprender a visualizar propiedades geométricas de figuras planas como polígonos, triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, y generar procesos de probar y construir. Aprender a visualizar propiedades geométricas significa desarrollar de manera explícita el conocimiento sobre las aprehensiones operativas y discursivas que permiten ser conscientes del inicio del razonamiento configural.

Instrumentos

Como parte de la evaluación del curso los estudiantes resolvieron dos problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica e información de algunos hechos geométricos vinculados a la configuración. El problema pedía probar la congruencia de dos segmentos en la configuración. Para su resolución, los estudiantes podían desarrollar aprehensiones operativas y discursivas para identificar alguna sub-configuración que les permitiera reconocer hechos geométricos que podían relacionar para generar la prueba.

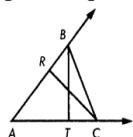
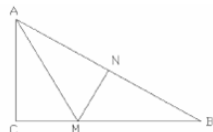
Problema 1	Problema 2
<p>Dado el triángulo $\triangle ABC$ de la figura, con $AB \cong AC$ y $\sphericalangle RCB \cong \sphericalangle TBC$, probar que $RC \cong BT$</p> 	<p>En la figura, AM es bisectriz de $\sphericalangle CAB$, $\triangle ACB$ es un triángulo rectángulo en C y $MN \perp AB$ en N. Probar que $CM \cong MN$</p> 

Figura 1. Problemas de probar.

En la Tabla 1 indicamos primero los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y, en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

Tabla 1

Contenido geométrico susceptible de ser usado en cada uno de los problemas (CAi= código usado para indicar el ítem de conocimiento geométrico susceptible de ser usado en algún momento de la resolución de los problemas. Por ejemplo, CA1: idea de triángulo)

Problema 1	Problema 2
<p>Asociación directa de elementos geométricos a la configuración:</p> <ul style="list-style-type: none"> • (CA1) Definición de triángulo • (CA4) Ángulos opuestos por el vértice son iguales <p>Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional:</p> <ul style="list-style-type: none"> • (CA2) Caracterización de triángulo isósceles (dos lados congruentes, y por tanto, dos ángulos congruentes). En un triángulo, los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes y los lados opuestos a dos ángulos congruentes son congruentes • (CA3) Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte lo que queda son ángulos congruentes • (CA9) Criterio de congruencia de triángulos A-L-A 	<p>Asociación directa de elementos geométricos a la configuración:</p> <ul style="list-style-type: none"> • (CA1) Definición de triángulo • (CA5) Definición bisectriz de un ángulo (es la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes) • (CA6) Definición de rectas perpendiculares • (CA7) Definición de triángulo rectángulo <p>Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional:</p> <ul style="list-style-type: none"> • (CA8) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° (conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero) • (CA9) Criterio de congruencia de triángulos A-L-A

Por otra parte, en ambos problemas es posible identificar diferentes subconfiguraciones (Figura 2) que podían generar diferentes trayectorias de resolución. La identificación de estas sub-configuraciones mediante alguna aprehensión operativa permitía reconocer triángulos con ángulos congruentes y lados congruentes como premisas de alguno de los criterios de congruencia de triángulos que conllevaba la resolución del problema.

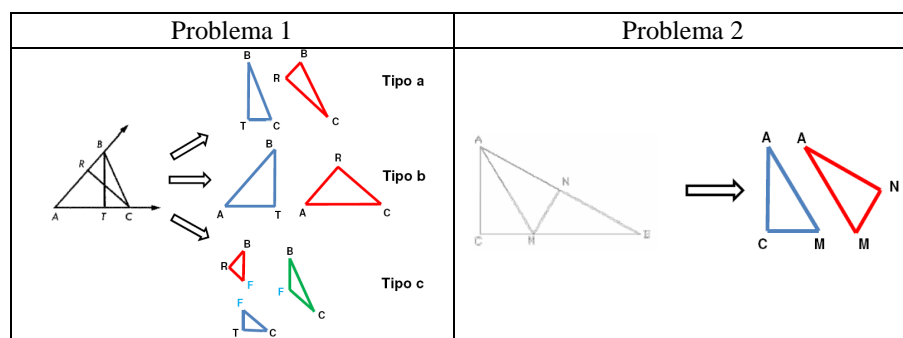


Figura 2. Posibles sub-configuraciones que era posible usar en la resolución de los problemas

Análisis

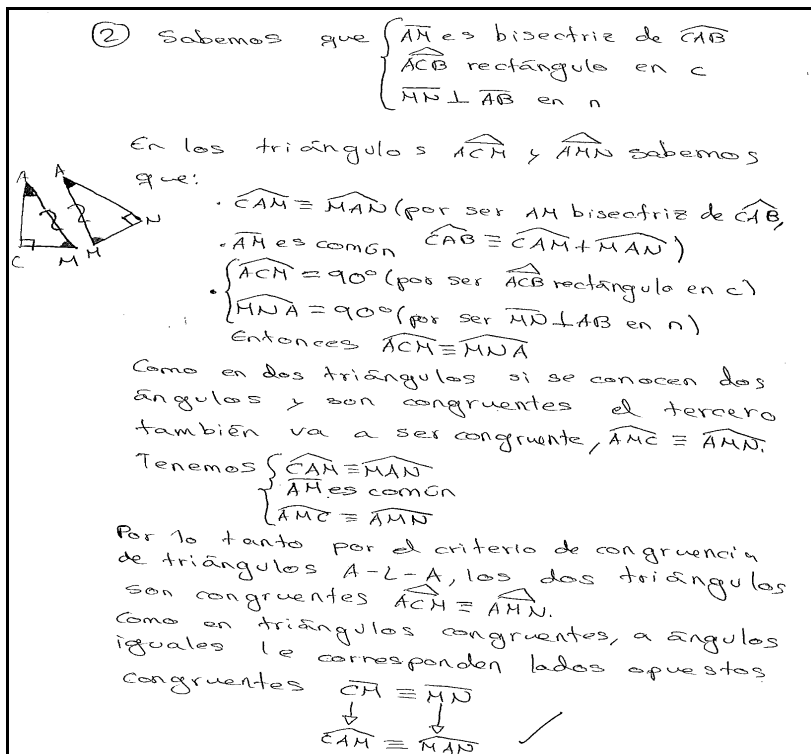
Los datos usados en esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes a estos dos problemas. Inicialmente identificamos en el discurso textual generado en cada resolución los elementos significativos que indicaban cómo el estudiante estaba generando el razonamiento configural como consecuencia de algunas aprehensiones operativas y discursivas y su coordinación. A estos elementos del texto escrito en la resolución los denominamos unidad de análisis (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada & Penalva, 2010).

En segundo lugar, identificábamos los momentos del proceso de resolución en los que intervenía un conocimiento de hechos geométricos externos a los datos del problema y la secuencia en la que mediaba la identificación de sub-configuraciones relevantes mediante una aprehensión operativa. Esta manera de describir la trayectoria de resolución nos permitió identificar qué estudiantes parecía que asignaban un status lógico a algunos hechos geométricos al poderlos considerar premisas de alguna proposición a partir de la identificación de una sub-configuración relevante, frente a los estudiantes que solo mantenían los hechos geométricos en el dominio de la visualización.

En el momento de la resolución del problema en el que intervenía el razonamiento configural y antes de desembocar en el desarrollo de un razonamiento deductivo, el análisis se centró en identificar:

- *Evidencias de que los estudiantes han generado alguna aprehensión operativa identificando sub-configuraciones relevantes.*
- *Si los estudiantes reconocían los objetos geométricos dados como datos del problema en la configuración.*
- *Si los estudiantes usaban un conocimiento externo a los datos del problema para generar información adicional.*
- *Si los estudiantes volvían a usar un hecho geométrico externo a los datos del problema para generar información adicional sobre la configuración, utilizando información obtenida previamente como premisas en una cadena deductiva.*

La figura 3 muestra las evidencias encontradas al analizar la respuesta de uno de los estudiantes al problema 2.



Respuesta de un estudiante para maestro al problema 2

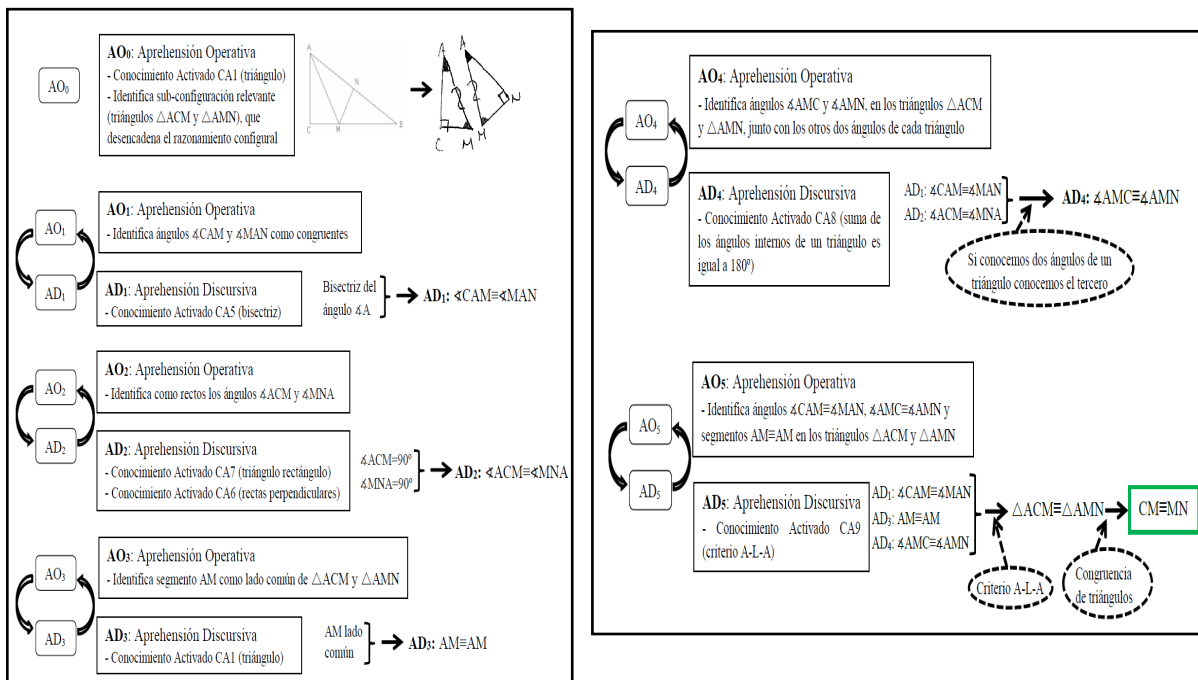


Figura 3. El discurso textual generado por los estudiantes es descompuesto en unidades de análisis (AD_i = Aprehensión discursiva; AO_i = Aprehensión Operativa) y se agrupa en dos momentos del proceso de razonamiento configural.

Resultados

Los dos problemas analizados tuvieron niveles de éxito diferentes. En el problema 1, de los 164 estudiantes que siguieron alguna de las trayectorias de resolución vinculadas a las tres sub-configuraciones relevantes, 75 consiguieron generar procesos deductivos correctos (45,7%). Los niveles de éxito en cada trayectoria fueron 39,7% (a), 66,7% (b) y 33,3% (c).

En el problema 2, de los 165 estudiantes que siguieron la trayectoria de resolución definida por la única sub-configuración identificada, 94 generaron procesos deductivos completos (57%).

Identificación de una sub-configuración y la trayectoria de resolución

Un aspecto que nos ayuda a caracterizar el proceso de resolución seguido por los estudiantes es la relación entre la identificación de una determinada sub-configuración y la trayectoria de resolución seguida. Las características de los problemas usados permitían subrayar este aspecto ya que se diferenciaban en el número de sub-configuraciones que permitían generar trayectorias de resolución. El problema 1, tres sub-configuraciones relevantes y el problema 2 solo una. La Tabla 2 indica que en el problema 1, la trayectoria de resolución vinculada a la sub-configuración *tipo a* requiere activar (al menos) tres conocimientos de geometría, la vinculada a la *tipo b* requiere activar cuatro (los tres anteriores más CA3, propiedad aditiva de los ángulos congruentes) y la vinculada a la *tipo c* requiere activar cinco (los cuatro anteriores más CA4).

Tabla 2

Relación entre la sub-configuración identificada y la trayectoria de resolución seguida (CAi= ítems de conocimiento geométrico activo en la trayectoria de resolución seguida según han sido dados en la tabla 1)

Problema	Sub-configuración	Conocimientos de geometría requeridos	Estudiantes	Total
P1	Tipo a	CA1+CA2+CA9	116	164
	Tipo b	CA1+CA2+CA3+CA9	39	
	Tipo c	CA1+CA2+CA3+CA4+CA9	9	
P2	Única	CA1+CA5+CA6+CA7+CA8+CA9	165	165

El número de estudiantes que iniciaron cada una de estas trayectorias de resolución en el problema 1 han sido 164 (116 para tipo a, 39 para tipo b y 9 para tipo c). En el problema 2, 165 estudiantes identificaron la sub-configuración relevante siguiendo una trayectoria de resolución que implicaba la activación de seis ítems de conocimiento geométrico. Las diferentes trayectorias adoptadas por los estudiantes (Tabla 2), y en particular en relación con el problema 1, indican que los estudiantes generaban diferentes trayectorias de resolución en función de la sub-configuración que habían sido capaces de identificar.

Influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural

En relación con la influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural, nuestro análisis ha permitido identificar tres comportamientos en los estudiantes que determinan rasgos de la influencia de las figuras prototípicas en el razonamiento configural. La importancia de estos tres comportamientos no nos los da la frecuencia con la que aparecen, sino la información que proporcionan para determinar la manera en que la visualización y el conocimiento intervienen en la generación del razonamiento configural.

Comportamiento 1. Figura prototípica de triángulo isósceles: rotación de la figura inicial.

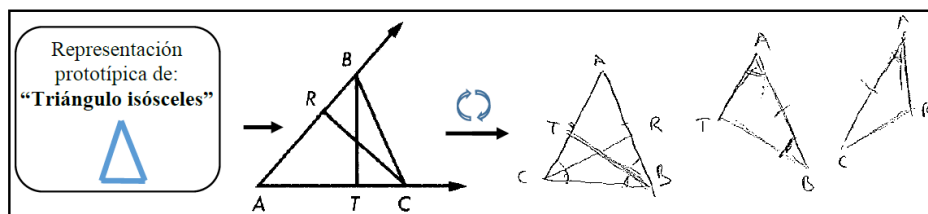


Figura 4. Fragmento de la respuesta de un estudiante al problema 1 en donde se muestra la rotación de la figura inicial, obteniendo a continuación la sub-configuración relevante tipo b.

De los 39 alumnos que en el problema 1 escogieron la *sub-configuración b*, 9 realizaron una rotación de la figura inicial mediante una *aprehensión operativa* para obtener la representación prototípica de triángulo isósceles (Figura 4). Esta manera de proceder no se ha observado en los estudiantes que han escogido las sub-configuraciones tipo a y c.

Comportamiento 2. Figura prototípica de ángulos opuestos por el vértice: identificación de los segmentos RC y BT que intersecan en el punto P (ángulos opuestos por el vértice son iguales).

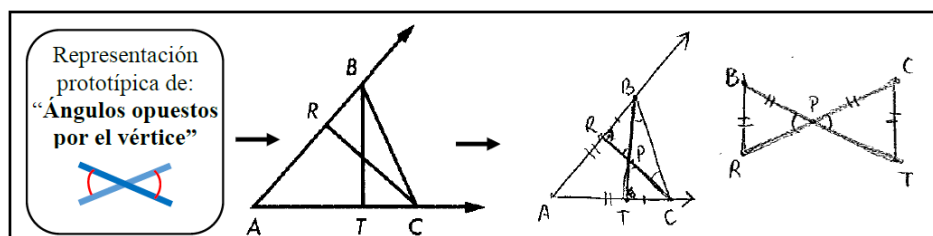


Figura 5. Fragmento de la respuesta de un estudiante al problema 1 en donde se muestra la identificación de ángulos opuestos por el vértice, obteniendo a continuación la sub-configuración relevante tipo c (en esta respuesta se observa que el estudiante realiza además una rotación de la sub-configuración obtenida; falta representar $\triangle BPC$).

Por otra parte, 7 de los 9 alumnos que en el problema 1 escogieron la *sub-configuración c*, identificaron el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes (ángulos opuestos por el vértice, Figura 5).

Comportamiento 3. Figura prototípica de triángulo rectángulo: percibe (erróneamente) en la figura inicial triángulos rectángulos, cree ver que $AC \perp BT$ y $RC \perp AB$; es decir, el estudiante admite una propiedad exclusivamente por las características de la figura inicial, priorizando el aspecto intuitivo frente al formal. Es decir, en este tercer comportamiento algunos estudiantes admiten erróneamente una propiedad ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) a partir de la percepción de la figura inicial, priorizando el aspecto visual frente al formal (Figura 6).

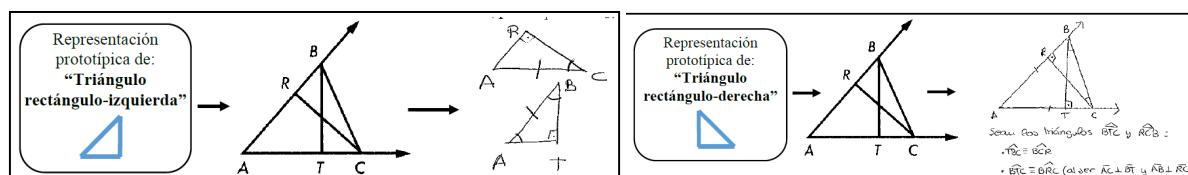


Figura 6. Fragmento de las respuestas de dos estudiantes al problema 1 en donde se muestra la identificación errónea de triángulos rectángulos; respectivamente: triángulo rectángulo-izquierda ($\triangle TAB$; ángulo recto hacia la izquierda, obteniendo la sub-configuración tipo b); y triángulo rectángulo-derecha ($\triangle TBC$; ángulo recto hacia la derecha, obteniendo la sub-configuración tipo a, expresada mediante texto).

La Tabla 3 indica las frecuencias de estos comportamientos para el problema 1:

Tabla 3

Comportamientos derivados de la influencia de las figuras prototípicas (problema 1)

Figuras prototípicas en el problema 1				
Caso	Figura prototípica	Descripción	Sub-configuración	Nº de respuestas
1	Triángulo isósceles	Rotación de la figura inicial	b	9
2	Ángulos opuestos por el vértice	Identifica el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes	a c	2 ⁽¹⁾ 7
3	Triángulo rectángulo	Admite explícitamente una propiedad errónea ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) y marca los ángulos rectos. Prioriza el aspecto intuitivo frente al formal por las características de la figura inicial	a b	10 3

Discusión y conclusiones

Esta investigación intenta establecer características de las relaciones entre la identificación de configuraciones que inician el razonamiento configural y el conocimiento de geometría determinando diferentes trayectorias de resolución de problemas de probar. Los resultados muestran que la identificación de una sub-configuración relevante activa determinados ítems de conocimiento geométrico cuya coordinación define una determinada trayectoria de resolución. Estos resultados evidencian el papel de la relación entre la visualización y el conocimiento geométrico en el inicio del razonamiento configural.

En el problema 1, de los 39 alumnos que escogieron la sub-configuración tipo b, 9 de ellos realizaron mediante una aprehensión operativa una rotación de la figura inicial para obtener la representación prototípica de triángulo isósceles (Mesquita, 1998). Por otra parte, 7 de los 9 estudiantes que en el problema 1 escogieron la sub-configuración tipo c, identificaron el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes (representación prototípica de ángulos opuestos por el vértice). Finalmente, 13 estudiantes admiten erróneamente una propiedad ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) para obtener la representación prototípica de triángulo rectángulo, iniciando a continuación la trayectoria de resolución vinculada a la sub-configuración *tipo a* (10 estudiantes) y *tipo b* (3 estudiantes). Los hechos observados en las respuestas indican que el reconocimiento de una sub-configuración relevante para la resolución del problema se inicia con la identificación de una figura prototípica en la configuración inicial, que activa determinados conocimientos de geometría poniendo de manifiesto el cambio del anclaje visual al anclaje discursivo. Además, el reconocimiento de una configuración concreta en la figura inicial puede responder a la activación de uno o varios conocimientos de geometría que permite visualizar una sub-configuración entre varias posibles, lo que pondría de manifiesto a su vez el cambio del anclaje discursivo al anclaje visual.

Los resultados obtenidos muestran que las distintas trayectorias que llevan a la resolución de los dos problemas están determinadas por la identificación de una sub-configuración relevante que facilita el uso de determinados ítems de conocimiento geométrico. Estos resultados permiten generar una hipótesis de trabajo futuro en el sentido de que si los maestros fueran equipados con conocimiento de las relaciones entre la identificación de la configuración y los ítems de conocimiento activados podrían manejar adecuadamente las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al desarrollar el

⁽¹⁾ Estos dos estudiantes posteriormente también identifican la sub-configuración *tipo a* continuando con esta trayectoria de resolución

razonamiento configural. Los maestros con este conocimiento especializado de geometría pueden proporcionar a sus estudiantes varias estrategias para encontrar diferentes sub-configuraciones posibles que permitan movilizar los conocimientos de geometría pertinentes para la resolución del problema. Es decir, la hipótesis de trabajo que generan estos resultados es el potencial que puede tener formar a los maestros en estos aspectos que apoyan el desarrollo del razonamiento configural. Más investigación es necesaria para apoyar esta línea de trabajo centrada en la relación entre la visualización, la generación del razonamiento configural y la resolución de problemas de probar en el sentido de aportar información específica para la toma de decisiones en la formación de profesores.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.
- Clemente, F., & Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 229-236) Bilbao: SEIEM. DOI: 10.13140/2.1.1181.8242
- Clemente, F., & Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM. DOI: 10.13140/2.1.2912.4487.
- Clemente, F., & Llinares, S. (en prensa). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In Sutherland, R., & Mason, J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183.

- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1999). Preservice Primary Teachers' Understanding of the Concept of Altitude of a Triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(3), 253-275.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En P. Nesher & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.70-95).Cambridge University Press: Cambridge.
- Llinares, S. & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250.
- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Prior, J., & Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. [Configural reasoning and verification procedures in geometric context]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 339-368.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría [Coordination of cognitive processes in geometry]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización [Configural reasoning as coordination of visualisation process]. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th PME conference* (pp. 177-184). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.