Producción de conocimiento geométrico de un colectivo – con – doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo

Zaida Margot **Santa** Ramírez
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
zaida.santa@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

El presente artículo[1] es resultado de una investigación en curso, la cual, a través de un diseño experimental cualitativo, pretende analizar cómo generar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente. Para ello, se expone un ejemplo de una actividad de formación relacionada con la trisección de un ángulo, mediante el doblado de papel, que posibilite la interacción de los maestros del colectivo para propiciar procesos de producción de conocimiento geométrico direccionados tanto al conocimiento disciplinar de la geometría, como al conocimiento de su enseñanza. Por lo tanto, se espera que, a través de construcciones con doblado de papel, el colectivo de maestros pueda discutir asuntos de la geometría al relacionarlos directamente con su práctica docente.

Palabras clave: producción de conocimiento, doblado de papel, *Humanos-con-medios*, colectivo de maestros, geometría.

[1]Este artículo se deriva del estudio: *Producción de conocimiento geométrico de un colectivo de "maestros–con–doblado de papel"*, que actualmente se lleva cabo en el marco del programa de Doctorado en Educación, línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia. Además, hace parte del macro proyecto CAPES-COLCIENCIAS, cuyo código es 111562838729, desarrollado entre la UNESP (Brasil) y la UdeA (Colombia).

Introducción

Nuestra experiencia docente e investigativa en programas de formación inicial o continuada de maestros de las regiones del departamento de Antioquia, nos permite evidenciar algunas dificultades relacionadas, en primer lugar, con el conocimiento disciplinar de la geometría y, en segundo lugar, con el conocimiento de su enseñanza. Lo anterior, junto con la poca literatura encontrada hasta el momento sobre el estudio de los procesos de producción de conocimiento que se generan en colectivos de maestros, nos llevó a plantear este trabajo de investigación, el cual, pretende analizar y describir los procesos de producción de conocimiento geométrico que emergen de un colectivo de maestros – con – doblado de papel.

Por consiguiente, el planteamiento del problema contempla el análisis de algunos antecedentes concernientes a la geometría del doblado de papel, su axiomática y una aplicación específica, que es la trisección de un ángulo; adicionalmente, se discuten algunas dificultades que se han evidenciado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, basados en la revisión del estado del arte. El marco teórico que fundamenta el estudio, aborda algunas ideas del constructo teórico *Humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), dado que se ha percibido que la producción de conocimiento está mediada por las interacciones de un colectivo de humanos – con – medios, que en este caso, sería un colectivo de maestros – con – doblado de papel. Finalmente, se fundamenta el uso de una metodología cualitativa, que se consolida en un diseño de tipo experimental a través de unas tareas de formación, de las cuales se presenta una como ejemplo concreto del estudio.

Planteamiento del problema

Antecedentes

Doblado de papel. De acuerdo con Santa y Jaramillo (2013b), un colectivo de maestros con una pieza de papel, puede hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás; de hecho, con base en estas, puede experimentar, visualizar, formular conjeturas, justificar procedimientos, comprender conceptos e, incluso, hacer demostraciones.

En esta perspectiva, Santa y Jaramillo (2010) afirman que:

> …el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la Geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático (p. 340).

En la revisión de la literatura, encontramos muchos autores que justifican el uso del doblado de papel en la construcción, análisis y comprensión de conceptos geométricos. Royo (2002), por ejemplo, concluye que: “el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel” (p. 186). En esta línea, Geretschläger (1995), también precisa que:

> La conexión entre geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras (como el educador alemán Friedrich Fröebel) el origami se puede utilizar para enseñar formas elementales geométricas (p. 357).

Adicionalmente, en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología, llevado a cabo en el año 1989, el ítalo japonés Humiaki Huzita expuso seis axiomas para la geometría del doblado de papel, en correspondencia con algunos axiomas de la geometría euclidiana y algunos hechos de la geometría analítica o el cálculo diferencial. De acuerdo con Lang (1996 – 2010), el japonés Koshiro Hatori presentó, en el año 2003, un séptimo axioma y, desde entonces, se denominaron Axiomas de Huzita – Hatori. Sin embargo, también se ha encontrado la denominación Axiomas de Huzita – Justin, debido a que aún está en duda la presentación de dicho axioma por parte de Hatori (Lang, 1996 - 2010), y se le atribuye a Jacques Justin, en el año 1989.

Santa y Jaramillo (2010) intentaron presentar la geometría del doblado de papel como un sistema axiomático. Sin embargo, este hecho no fue posible, dado que la característica de suficiencia no está completa aún, pues no se han desarrollado todavía teoremas para este tipo de geometría. Lo que sí se ha logrado, es una demostración de la completitud de los axiomas, por parte de Lang (1996 – 2010). Teniendo en cuenta su traducción original (Lang, 1996 – 2010) en Santa y Jaramillo (2010), estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

“Axioma 1: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos” (p. 343).

“Axioma 2: Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2” (p. 343).

“Axioma 3: Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2” (p. 344).

“Axioma 4: Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1” (p. 345).

“Axioma 5: Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2” (p. 346).

“Axioma 6: Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2” (p. 346).

“Axioma 7: Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1” (p. 349).

Trisección de un ángulo. Un problema clásico de la geometría planteado desde la antigüedad y que actualmente sigue siendo motivo de discusión, es la trisección de un ángulo a partir de las condiciones establecidas por los griegos: con una regla no graduada y un compás. Muchos matemáticos, a través de la historia, se han interesado por solucionar este problema; sin tener en cuenta dichas condiciones, han encontrado soluciones alternativas e ingeniosas. Arquímedes, por ejemplo, ideó, mostró y demostró de una manera particular, una forma de dividir un ángulo en tres partes iguales. El sofista Hipias de Elis, con una curva auxiliar a la que llamó cuadratriz (De Andrés, 2003 - 2004), logró también mostrar una solución al famoso problema. Es posible encontrar otros métodos poco convencionales como el de Hachuela o Tomahawk (Isaacs, 2002) y la construcción que se obtiene con el doblado de papel.

Este último método permite trisecar ángulos agudos y el ángulo recto, además constituye una técnica eficaz y asequible, pues solo requiere una hoja de papel de forma rectangular. La construcción que se obtiene mediante el doblado de papel podría permitir interacciones del colectivo de maestros, de tal manera que se posibiliten análisis y discusiones alrededor de los dobleces construidos y su justificación mediante la axiomática de Huzita – Hatori, lo que podría generar procesos de producción de conocimiento geométrico. Por lo tanto, el uso de este método constituye una de las tareas de formación a utilizar durante el estudio.

Pregunta de investigación

La geometría puede considerarse como un conocimiento intuitivo y cercano a los contextos de los estudiantes, previo a su etapa formal. Tal característica debería ser usada para facilitar procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma. Sin embargo, normalmente, la geometría se percibe como un cuerpo formal de conocimientos, donde se privilegia la demostración, por encima de cualquier otro proceso, como la visualización y la experimentación.

Por otro lado, nuestra experiencia docente tanto en programas de formación continua de maestros, como en formación inicial, nos permite afirmar que algunos maestros de las regiones del departamento de Antioquia, tienen dificultades para aprender, recordar, usar o comprender conceptos geométricos. De hecho, algunos de nuestros estudios investigativos (Santa, 2011; Santa y Jaramillo, 2013b) y el trabajo directo con maestros, en talleres a nivel local o nacional, nos posibilitó evidenciar esta problemática con casos concretos, por ejemplo, desconocimiento de la palabra lugar geométrico (Santa y Jaramillo, 2013b), dificultades en la clasificación de los cuadriláteros o considerar que un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales y un tercer lado desigual a los anteriores.

Adicionalmente, la misma revisión de la literatura y la experiencia docente, nos llevó a plantear que los procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo particular, como el de la presente investigación, no son claros ni se han develado todavía. Lo anterior se constituye en una tercera dificultad para el estudio.

Por lo tanto, para intentar resolver las problemáticas mencionadas en párrafos anteriores, surge el doblado de papel como una estrategia que podría aportar a una parte de la solución de dichas situaciones, dado que podría mejorar el proceso de razonamiento en geometría, es decir, le puede permitir al maestro en formación o maestro en ejercicio, dentro de un colectivo: “hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, lanzar conjeturas, discutirlas, analizarlas y finalmente, probarlas” (Santa y Jaramillo, 2013b, p. 5). Lo que implica que la visualización de construcciones hechas mediante el doblado, puede posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros; sin embargo, estos procesos aún no se han caracterizado. De esta manera, con el estudio se pretende responder la pregunta de investigación ¿cómo generar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente?

Marco teórico

Constructo teórico *Humanos-con-medios*

Humanos-con-medios es un constructo teórico desarrollado por Marcelo Borba y Mónica Villarreal, en el que discuten que el conocimiento matemático es el resultado de una construcción hecha por un grupo de personas pensantes con determinados medios. En este sentido, se basa en dos pilares principales: el primero, es que “la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva” (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 518) y, el segundo, que la construcción del conocimiento incluye “herramientas, dispositivos, artefactos y medios” (p. 518). Por lo tanto, Borba y Villarreal (2005) precisan que el uso de diferentes tipos de medios puede conducir a la producción de diferentes tipos de conocimientos en colectivos diferentes.

El constructo teórico considera dos aspectos fundamentales, la experimentación y la visualización, que podrían permitir la reorganización del pensamiento al introducir cambios en la naturaleza del conocimiento generado. Borba y Villarreal (2005) afirman que la tecnología tiene un papel primordial en relación al uso de experimentos en matemáticas y, en particular, en Educación Matemática. Estudios realizados por algunos investigadores del grupo GPIMEM, han destacado, en diferentes contextos, la importancia de un enfoque de tipo experimental en la enseñanza de las matemáticas, cuando la tecnología se hace presente (Borba y Villarreal, 2005). Por su parte, los procesos de visualización con tecnologías, de acuerdo con los autores, son importantes porque constituyen una forma alterna de producir conocimiento, dado que se puede dar una transformación de la comprensión al considerar representaciones de tipo visual.

Procesos de experimentación

Borba y Villarreal (2005) establecen que un enfoque experimental en Educación Matemática, trae las siguientes implicaciones:

> El uso de procedimientos tentativos y ensayos direccionados que apoyen la generación de conjeturas matemáticas; el descubrimiento de resultados matemáticos previamente desconocidos por el experimentador; la posibilidad de probar formas alternativas de obtener un resultado; la posibilidad de proponer nuevos experimentos; una forma diferente de aprendizaje de las matemáticas (p. 75).

En este orden de ideas, los procesos de experimentación – con – doblado de papel, pueden permitir que el maestro en formación continua, en un colectivo, tenga la posibilidad de usar procedimientos y ensayos para generar conjeturas geométricas, descubrir nuevos resultados o maneras alternas de probar una afirmación, proponer nuevas construcciones que muestren otros hechos geométricos, repetir y perfeccionar sus construcciones, obtener representaciones visuales o táctiles en el mosaico de pliegues que generen los dobleces. Como consecuencia, el enfoque experimental – con – doblado de papel, propicia una nueva forma de producción de conocimiento, que se genera y valida al interior del colectivo de maestros – con – doblado de papel.

Procesos de visualización

En el presente estudio, se considerará la visualización como ese camino entre las construcciones externas y las internas, es decir, se seguirá la perspectiva de Nemirovsky y Noble (1997, citados por Torroba, Etcheverry y Reid, 2009), quienes observan que la visualización "no se restringe ni a la mente ni a los medios externos (papel, computadora, etc.), sino más bien [la] definen […] como un medio de circulación entre ellos" (p. 5). De acuerdo con Borba y Villarreal (2005), "al ser el constructo teórico *Humanos-con-medios* asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, pues dicha dicotomía carece de valor ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo" (Citados por Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 519). Igualmente, estos autores afirman que no ven una dicotomía entre la visualización interna y externa, dado que están tan íntimamente ligados, que no tiene sentido hablar de una separación.

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, la geometría del doblado de papel se podría convertir en un medio que posibilite que un grupo de maestros logre procesos de visualización en las construcciones que se les proponga y, de esta manera, producir conocimiento geométrico. Desde esta perspectiva, el doblado de papel le permite al maestro pasar de un proceso inicial de observar y tocar la figura, a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras, relacionarlas, clasificarlas y llegar, incluso, a producir conocimiento. Por lo tanto, la visualización no solo se relacionaría con representaciones de tipo visual, sino también de tipo táctil. Lo que llevaría a una resignificación de dicho proceso, que sería uno de los posibles resultados de este estudio.

Conjeturas visuales. El doblado de papel es un medio que permite que los maestros puedan experimentar a través de construcciones de figuras con diferentes dobleces. La visualización sobre las figuras elaboradas, puede permitir la afirmación de diferentes conjeturas visuales, que pueden ser interpretadas, analizadas y debatidas en el colectivo, con el ánimo de llegar a una primera validación, mediante una prueba visual. Ahora, el proceso no necesariamente es lineal. De la experimentación, los maestros pueden generar conjeturas visuales, o pueden iniciar debates o, incluso, pruebas visuales. De la misma manera ocurre con los demás procesos, tal y como lo intentamos ilustrar en la figura 1.

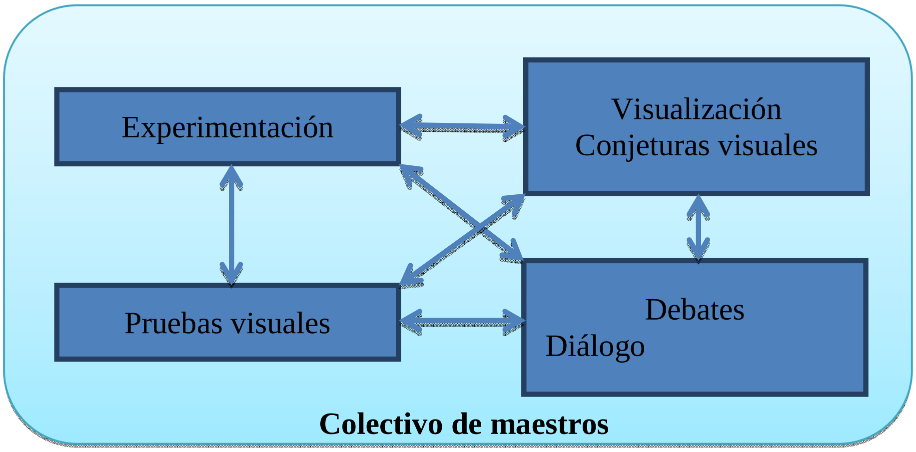

Figura 1. Generación y validación de una conjetura visual.

Metodología

Diseño

Considerando que el objetivo general de la presente investigación es analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico, en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente, entonces el paradigma que la orienta debe ser de corte cualitativo. Esto se debe principalmente a que se interpretará un fenómeno de tipo social (interacciones entre las personas y los medios) que “no sigue un proceso claramente definido” (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 8). Es decir, no es una investigación lineal en la que por ejemplo, los resultados están subordinados a la teoría o a las preguntas hechas, sino en un sentido de constitución mutua, donde se genera una interacción entre preguntas, visión del conocimiento, metodología, procedimientos, análisis y resultados. Además, de acuerdo con Borba (2012), conocer es un esfuerzo humano que tiene un componente subjetivo y, por lo tanto, los aspectos relacionados con esta acción deben ser representados por una investigación de tipo cualitativo, donde se usen técnicas como la triangulación de métodos o la revisión de pares, de tal manera que refleje y considere diferentes posibles interpretaciones de la información.

Por otro lado, el doblado de papel podría convertirse en un medio articulador entre el constructo teórico *Humanos-con-medios* y las ideas de desarrollo profesional docente de Ponte (2012), dado que posibilitaría la generación de procesos de producción de conocimiento que emergen de un colectivo – con – doblado de papel, que pueden permear y consolidar el desarrollo profesional de cada uno de los maestros del mencionado colectivo. Para ello, el proceso investigativo propuesto es: diseño y revisión de actividades o tareas de formación con doblado de papel; generación de procesos de producción de conocimiento al interior del colectivo, considerando tanto aspectos disciplinares de la geometría, como el análisis de su enseñanza; diseño, evaluación y puesta en marcha de actividades para y con los estudiantes. Por lo tanto, el diseño metodológico que guiará este estudio será un diseño experimental.

Participantes

La investigación pretende caracterizar un colectivo particular de maestros en formación continua que posee un interés marcado en la producción de conocimiento geométrico, que puede generarse mediante el doblado de papel. En este orden de ideas y, considerando que el estudio está centrado en la formación continua de maestros, se propone un seminario en un programa de maestría, en el que se puedan analizar las interacciones del colectivo de maestros – con – doblado de papel, además, contemplar la posibilidad de generar, evaluar y poner en práctica estrategias metodológicas para el uso del doblado de papel en las aulas de clase.

Se invitan a los maestros a participar del trabajo investigativo de manera voluntaria, siempre y cuando manifiesten tener un interés importante en la producción de conocimiento geométrico mediante el doblado de papel. De acuerdo con lo anterior, se pretende invitar maestros de primaria, de secundaria o de universidad, de las regiones del departamento de Antioquia, que estén motivados por fundamentar sus conocimientos sobre la geometría del doblado de papel, sobre su enseñanza y, en general, por modificar, descubrir o valorar su desarrollo profesional docente.

Ruta metodológica

Con el estudio se busca que los procesos de producción de conocimiento geométrico, direccionados hacia el desarrollo profesional docente, se logren a través de las interacciones de un colectivo de maestros – con – doblado de papel. Por lo tanto, se tiene previsto llevar a cabo la siguiente ruta metodológica:

- Conformación del colectivo de maestros. En este caso, serían los maestros en formación continua que acepten ser parte del seminario del programa de maestría.
- Interacción del colectivo a través de actividades o tareas de formación que involucren el doblado de papel y su axiomática.
- Entrevistas grupales e individuales, que permitan caracterizar la producción de conocimiento geométrico, direccionado hacia el desarrollo profesional docente.
- Diseño y puesta en marcha de actividades, en las que la producción de conocimiento esté mediada por el doblado de papel y se oriente al desarrollo profesional docente.

Ejemplo de una actividad de formación

A continuación se presentará una de las actividades de formación propuestas en este estudio, con la que se busca posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico a través de un colectivo de maestros, mediante la construcción de la trisección de un ángulo agudo. Los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con la actividad, son:

- Analizar los conceptos geométricos inmersos en la construcción de la trisección de un ángulo agudo.
- Discutir, de manera colectiva, los conceptos geométricos inmersos en la construcción de la trisección de un ángulo agudo
- Deducir algunos axiomas de la geometría del doblado de papel en la construcción de la trisección de un ángulo agudo.
- Reflexionar sobre la generación de estrategias pedagógicas que permitan la construcción de la trisección de un ángulo agudo, en el aula de clase.

Construcción. Los pasos para la construcción, se exponen en los siguientes apartados.

1. Tome una hoja de papel de forma rectangular, llámela $ABCD$ y elija uno de sus ángulos rectos como referencia. Sea $< A$ el ángulo elegido. Forme en él un ángulo agudo haciendo un doblez $\overline{AN}$.

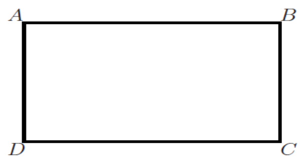

Figura 2. Paso 1.

2. Remárquelo bien y desdoble nuevamente. Sea el ángulo agudo $\angle DAN$ el ángulo a trisecar. Tenga en cuenta que este está formado por el doblez que ha hecho y uno de los lados del ángulo recto que tomó de referencia.

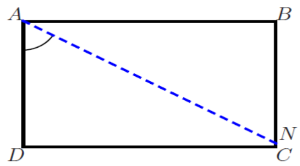

Figura 3. Paso 2.

3. Haga un doblez paralelo a $\overline{AD}$. Llámelo $\overline{ML}$ y desdoble. Se recomienda que la distancia de este doblez a $\overline{AD}$ sea un poco menor que la mitad de la medida de $\overline{AB}$.

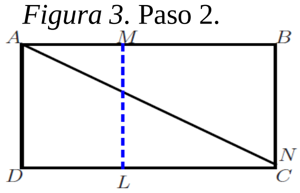

Figura 4. Paso 3.

4. Ponga $\overline{AD}$ sobre $\overline{ML}$ para formar una nueva paralela $\overline{PQ}$ que sea equidistante de las dos anteriores.

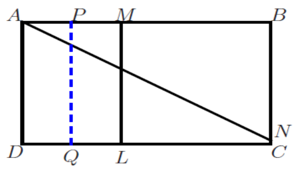

Figura 5. Paso 4.

5. Ahora, realice un doblez tal que, al deslizar el punto A del ángulo de referencia sobre la paralela $\overline{PQ}$, el punto M coincida con el doblez $\overline{AN}$ que hizo para formar el ángulo agudo. Nómbrelo $\overline{ZJ}$.

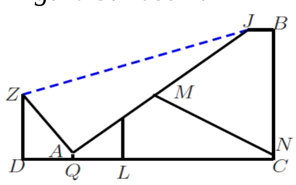

Figura 6. Paso 5.

6. Observe que ha hecho una simetría y la parte que ha doblado es un triángulo rectángulo (ΔZAJ). El doblez $\overline{ZJ}$ se corta con las paralelas $\overline{PQ}$ y $\overline{ML}$. Al punto donde se corta $\overline{PQ}$ con $\overline{ZJ}$ llámelo E. Encuentre la

mediatriz $\overline{GH}$ del segmento $\overline{ZE}$. Tenga en cuenta que esta mediatriz se intercepta con el lado del rectángulo CD en el punto H. Desdoble; es claro que A pertenece a la prolongación del segmento $\overline{GH}$.

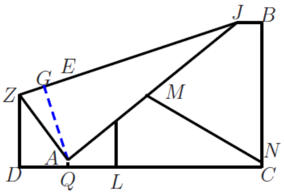

Figura 7. Paso 6a.

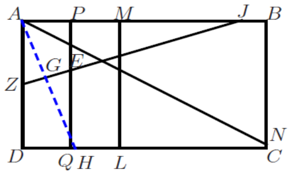

Figura 8. Paso 6b.

7. Finalmente, encuentre la bisectriz $\overline{AK}$ del ángulo $\angle HAN$. De esta manera, queda dividido el ángulo agudo $\angle DAN$ en tres ángulos iguales $\angle DAH$, $\angle HAK$y $\angle KAN$.

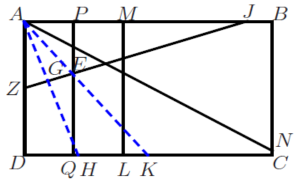

Figura 9. Paso 7.

Axiomas de la Geometría del doblado de papel. Después de realizada la construcción con doblado de papel, se proponen las siguientes actividades:

1. Analizar las implicaciones geométricas euclidianas de cada uno de los pasos. Para ello, en subgrupos de tres maestros, diligenciar la siguiente tabla:

Tabla 1

Implicaciones geométricas en la construcción de la trisección de un ángulo.

Doblez realizado	Implicaciones geométricas
Paso 1	
Paso 2	
…	

Para lograrlo, se les proporciona a los maestros el siguiente aporte de información:

Pueden tomarse como verdaderas algunas proposiciones del doblado de papel, cuando se hacen diferentes combinaciones entre puntos y dobleces.

2. Hacer una lista de proposiciones que consideren verdaderas, con respecto al doblado de papel, de acuerdo con la construcción realizada anteriormente.
3. Socialización y discusión de las proposiciones.

Análisis geométrico. Posterior al análisis de la axiomática del doblado de papel, se les propone a los maestros las siguientes acciones:

1. Si tuvieran que realizar una prueba de la anterior construcción, ¿con qué hipótesis iniciarían?
2. En equipos de tres maestros, probar que el ángulo $\angle DAN$ queda dividido en tres ángulos iguales, de acuerdo con la construcción mediante el doblado de papel.
3. Un representante de cada equipo presenta su prueba.
4. Discusión de las pruebas y de los conceptos geométricos inmersos en la construcción.

Construcción de Arquímedes. Después del análisis geométrico de la construcción, se les presenta a los maestros la siguiente información y algunas preguntas asociadas:

Entre los aportes a las ciencias, Arquímedes (287 - 212 a.C.) diseñó un método fácil e interesante para trisecar cualquier tipo de ángulo. Sin embargo, su ingeniosa construcción no resuelve el problema de trisección con compás y regla no graduada, pues se vale de dos marcas en esta para trasladar una distancia determinada.

Sea $m(< AOB) = x$ *el ángulo dado. Se traza por el vértice O una circunferencia de radio r. Se prolonga el segmento* $\overline{AO}$ *del ángulo inicial y por B se traza una secante hasta un punto P (que pertenece a la prolongación) que corte a la circunferencia en el punto M, tal que* $m(\overline{MP}) = r$ *(es necesario una regla graduada para transportar dicha medida). Entonces* $m(< NOM) = z$ *es la tercera parte del ángulo dado.*

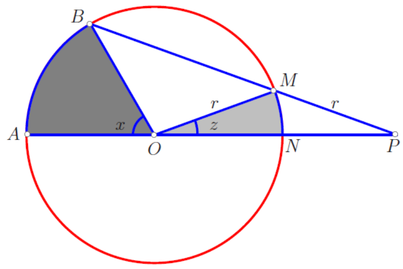

Figura 10. Trisección de Arquímedes.

1. Si tuvieran que hacer una prueba de la anterior construcción, ¿con qué hipótesis iniciarían?
2. En equipos de tres maestros, probar que el ángulo $< z$ es la tercera parte del ángulo $< x$.
3. Un representante de cada equipo presenta su prueba.
4. Discusión de las pruebas y de los conceptos geométricos inmersos en la construcción.

Relación de la construcción de Arquímedes con la del doblado de papel. Analizada la construcción de Arquímedes, se plantean las siguientes acciones, junto con las preguntas correspondientes, para probar que en la construcción con doblado de papel, se realiza, de manera implícita, la trisección de Arquímedes.

1. En su construcción con doblado de papel, realice los siguientes dobleces auxiliares que se proponen en color azul.

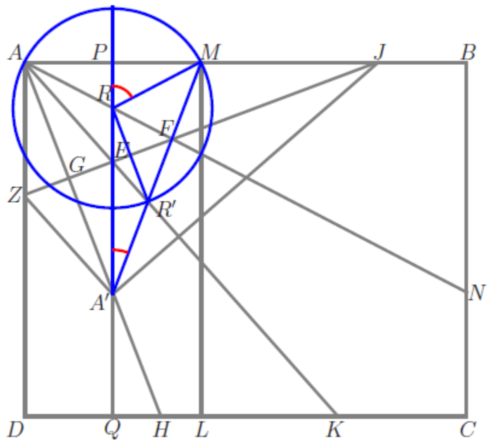

Figura 11. Relación de la trisección del doblado de papel con el método de Arquímedes.

2. ¿Cómo probar que $< DAN \cong < PRM$, de acuerdo con la construcción?
3. ¿Cómo probar que $< PA'R' \cong < EAF$, de acuerdo con la construcción?

4. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} // \overline{AA'}$, de acuerdo con la construcción?
5. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} \cong \overline{A'R'} \cong \overline{AR} \cong \overline{RM}$, de acuerdo con la construcción?
6. ¿Qué se puede concluir al respecto?

Proceso de evaluación. Para finalizar el trabajo con el colectivo de maestros, se dialoga sobre las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se aprendió de la actividad?
2. ¿Cómo se aprendió?
3. ¿Las discusiones en el colectivo de maestros contribuyeron con la producción de conocimiento geométrico? ¿Por qué?
4. ¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo – con – doblado de papel?

Resultados y conclusiones esperadas

Se espera que el colectivo esté conformado por maestros "dispuestos a compartir espontáneamente algo de interés común, pudiendo presentar visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, los saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática" (Fiorentini, 2008, p. 49). En otras palabras, los maestros vinculados al colectivo deben hacerlo por voluntad propia; al interior de este, debe darse un ambiente de apoyo mutuo, espontaneidad, confianza y respeto; debe permitir reflexiones sobre la práctica misma y, en general, sobre el desarrollo profesional docente.

En esta perspectiva, Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009), afirman que los maestros aprenden: i) sus conocimientos profesionales (el conocimiento sobre la enseñanza, la didáctica de las matemáticas y el conocimiento de las matemáticas como un área escolar), ii) sus valores profesionales, iii) sobre sus roles profesionales y iv) a desarrollar su identidad, entre otros, en estrecha relación con otros profesores. Por lo tanto, las actividades de formación propuestas al colectivo de maestros – con – doblado de papel, deben garantizar que ellos generen procesos de producción de conocimiento geométrico, que aporten a su desarrollo profesional docente, el cual involucra "el desarrollo progresivo de potencialidades y la construcción de nuevos saberes; está marcado por las dinámicas sociales y colectivas, y depende de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado" (Ponte, 2012, p. 9).

Referencias bibliográficas

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), 801 - 814. Doi: 10.1007/s11858-012-0436-8

De Andrés, L. (2003 – 2004). De las trisectrices, la cicloide y otras curvas. En *DivulgaMat. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas*. España: Real Sociedad Matemática Española. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10884%3Aun-paseo-por-la-geometria&catid=136%3Acursos-y-ciclos-de-conferencias&Itemid=44&limitstart=9

Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba y J. Araújo. (Ed.), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 43-72). Balderas, México: Limusa.

Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine, 5*, 357 – 371.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Isaacs, M. (2002). *Geometría universitaria*. México: Thomson Learning.

Lang, R. (1996 – 2010). *Origami and Geometric Constructions.* Recuperado de http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., … Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. R. Even, D. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 185 - 209). United States: Springer. Doi: 10.1007/978-0-387-09601-8 17

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas, 21*, 175 – 192.

Santa, Z., & Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado el 15 de septiembre de 2010, de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Santa, Z. , & Jaramillo, C. (2013b). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.

Torroba, E., Etcheverry, E., & Reid, M. (2009). Explorando el Rol de la Visualización en Experiencias de Cátedra. En: *TEyET Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, *3*, 1 – 7.

Villa-Ochoa J., & Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. En: *Revista Educ. Matem. Pesq. 12*(3), 514 – 528. São Paulo.