Como um matemático embrulha presentes gastando pouco material?

Juliana Cordeiro da **Cunha**
Universidade de Brasília
Brasil
julianapndeath@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

A partir de relações trigonométricas, concluir que, tendo uma caixa retangular sem tampa, com um volume fixo, a de menor área lateral é a de base quadrada. Em seguida, na perspectiva de embrulhar um presente, será calculado o comprimento do lado do papel de presente a partir de relações conhecidas na caixa de base quadrada. O objetivo das atividades será encontrar o formato do papel de presente de forma a obtermos o menor desperdício de material ao embrulhar a caixa. A metodologia usada será construir caixas de diversos formatos e em seguida, calcular a área lateral de cada uma. Comparando-se as áreas laterais das caixas se concluirá a respeito da menor área. Em seguida as caixas de bases quadradas serão embrulhadas de acordo com o cálculo do comprimento do lado do papel de presente.

Palavras chave: figuras planas, volume, áreas, semelhanças, trigonometria.

Como um matemático embrulha presentes?

As sequências didáticas desta oficina foram construídas com base no questionamento de como embrulhar um presente obtendo o menor desperdício possível de papel. A partir disso, o estudante deverá ser levado a pensar em formas diferentes de fazer o embrulho, e desta maneira, tirar conclusões a respeito do formato da caixa e da quantidade de papel usada para embrulhar o presente.

A construção da atividade foi baseada no artigo *"Como um Matemático Embrulha Presentes"* da Revista Cálculo (2012).

Os conteúdos teóricos auxiliares na execução dessa atividade são a definição, as propriedades e relações métricas no triângulo retângulo, bem como os Teoremas de congruência em triângulos retângulos e o Teorema de Pitágoras (Barbosa, 1995).

Justificativa

As atividades foram produzidas no âmbito de atuação do PIBID, Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, com o objetivo de serem aplicadas no ensino básico. A atuação dos licenciandos de Matemática no PIBID tem promovido a articulação de conteúdos teóricos com a prática em sala de aula, o aprofundamento em assuntos escolhidos por eles para construção das atividades, mas sobretudo, tem possibilitado a construção de material didático inédito baseado na resolução de problemas para aplicação no ensino básico (Grebot, Gaspar, Dörr, 2013). Finalmente, as atividades poderão despertar o raciocínio lógico e a curiosidade dos participantes, servir de auxílio a professores do ensino básico em suas aulas, além de motivá-los à construção de suas próprias atividades didáticas.

O envolvimento dos participantes nas atividades propostas nesta oficina promove sua autonomia e eles serão induzidos à construção do conhecimento à medida que avançam na execução das tarefas. A metodologia é aplicada de modo que o grupo chegue às conclusões esperadas por meio da manipulação e observação do material construído e com a mediação do licenciando.

Os objetivos geométricos esperados serão alcançados por meio da construção prática de figuras geométricas. As questões propostas conduzirão os participantes a concluírem resultados que, se considerados desvinculados da prática, não tem significação para a aprendizagem e, portanto, não serão retidos pelos alunos.

Objetivo Geral

A partir de uma atividade prática, concluir que, tendo uma caixa retangular sem tampa, com um volume dado, a de menor área de superfície é a de base quadrada.

Objetivos Específicos

- Reforçar os conceitos de áreas de figuras planas;
- Trabalhar com manipulação de figuras espaciais de bases quadrada, triangular e retangular;
- Calcular áreas de superfícies de figuras espaciais;
- Observar padrões geométricos de figuras espaciais, a partir de situações práticas;
- Despertar e desenvolver o raciocínio lógico matemático.

Metodologia

Primeiramente será aplicada uma sequência de atividades que devem ser resolvidas e discutidas em grupo. Essas consistem inicialmente na construção de caixas de diversos formatos para as quais serão calculadas as respectivas áreas laterais. Em seguida, usando comparações entre suas áreas de superfícies, serão obtidas conclusões a respeito da menor área.

Finalizando as atividades, serão discutidos os temas e resultados que fundamentam geometricamente as conclusões obtidas nas atividades propostas.

Atividade I

Com o auxílio do papel cartão, construa uma caixa sem tampa em um dos seguintes modelos:

Tabela 1

Medidas das caixas de diferentes bases.

Bases	Comprimentos (cm)	
	Largura	Altura
Quadrada	10 x 10	5
Retangular	25 x 4	5
Triangular	15 x 15 x 15	5

Fonte: Atividades da oficina.

Calcule a área lateral da caixinha construída.

Usando a área lateral calculada e a de seus colegas, complete o quadro a seguir:

Tabela 2

Tabela para cálculo da área lateral e volume.

Bases	Valores (cm^2 e cm^3)	
	Área Lateral	Volume
Quadrada		
Retangular		
Triangular		

Fonte: Atividades da oficina.

A partir dos resultados da tabela, compare com o de seus colegas. O que se pode concluir?

Se fosse embrulhar, qual formato deveria ter a caixa para que se tenha o menor desperdício de papel? Explique o porquê da sua resposta.

Atividade II

Construa caixas quadradas de diferentes volumes.

Qual deverá ser o formato do papel de presente para embrulhar cada uma delas?

Como a caixa deverá ser posicionada no papel de presente, para que seja mais prático embrulhá-la e gastar menos papel possível?

Considere w a medida do lado, h a altura da sua caixa e c o comprimento do lado do papel de presente, conforme figura abaixo:

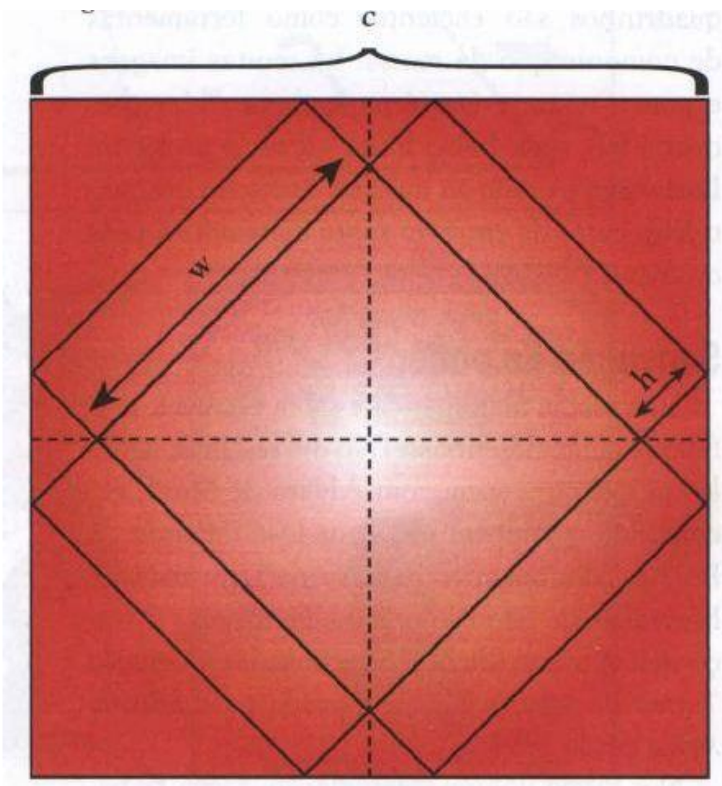

Figura 1. Caixa aberta sobre o papel de presente.

Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

A partir desta figura calcule c em função de w e h.

Atividade III

Quanto mede os lados e a altura da sua caixa?

Quanto mede o lado do seu papel de presente?

Agora embrulhe sua caixa de presente.

O que você observa? Podemos concluir que houve o menor desperdício possível de material?

Conclusões Finais

As atividades propostas nesta oficina foram construídas para integrarem as atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Esse programa visa o aperfeiçoamento e valorização da formação de professores para a educação básica e oferece bolsas aos participantes para atuarem em escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Os projetos do PIBID contribuem para a inserção dos licenciandos no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica e consistem no desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas sob a orientação de um docente da licenciatura da área e de um professor da escola. O projeto é fomentado pelo Ministério da Educação através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[1].

A implementação do PIBID na instituição de origem das autoras, tem produzido material pedagógico inédito para aplicação nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Nesta oficina os participantes poderão conhecer na prática uma dessas produções que foi aplicada com sucesso em grupos de alunos do ensino médio de uma instituição pública de ensino.

Com relação aos conteúdos matemáticos abordados nas atividades apresentadas nesta oficina, devido à sua importância para estudantes dos anos citados, por meio da questão inicial, os professores que as utilizarem terão a oportunidade de apresentar aos seus alunos a geometria de uma forma instigante. Em seguida, com o uso de manipulações algébricas e conteúdos matemáticos acessíveis ao seu nível, poderão ser introduzidos ao formalismo matemático das demonstrações, caso acharem conveniente.

Na aplicação das atividades no PIBID, foi verificado que o licenciando pode experimentar o cotidiano da sala de aula de uma instituição pública, participou da elaboração de uma atividade pedagógica prática, articulando assim a teoria acadêmica com a prática, cumprindo com os objetivos do PIBID, mas principalmente, foi criada uma oportunidade de desenvolvimento desse licenciando não somente como estudante, mas sobretudo como futuro educador matemático. Tal experiência deve ser compartilhada tanto com professores que atuam em licenciaturas, quanto com licenciandos de matemática.

Uma vez que as atividades são realizadas em grupos, esperamos que haja maior envolvimento dos participantes na busca das soluções das situações problemas a fim de levarmos assim aos educadores participantes uma alternativa às aulas tradicionais de matemática.

A situação prática inicial proposta deverá instigar a curiosidade dos participantes e promover a criatividade e a descoberta dos resultados geométricos esperados.

Consideramos que determinados conteúdos em matemática devam ser introduzidos por meio do uso de situações problemas. Tal prática ajuda a desmistificar a matéria como sem utilidade e gera interesse pela disciplina.

Para o bom andamento durante a aplicação das atividades, é importante a atenção e a interpretação dos enunciados. Assim, esta oficina também contribui para o desenvolvimento da leitura e interpretação de situações problemas.

Concluímos que as atividades propostas pela oficina cooperam para o alcance dos objetivos iniciais propostos e que elas poderão auxiliar educadores matemáticos que buscam alternativas para a aula tradicional por apresentar uma sugestão de trabalho que poderá ser aplicada em suas salas de aula. Esperamos que ao serem aplicadas, sejam motivadoras e os estimulem na construção de suas próprias atividades.

Referências e bibliografia

Barbosa, João Lucas Marques. (1995). *Geometria euclidiana plana*. Rio de janeiro: Soc. Bras. Mat. Coleção do professor de matemática.

Cálculo. *Revista Cálculo - Matemática para Todos*, *14*, 56-57. (2012). SP: Editora Segmento.

Grebot, G, Gaspar, M. T., & Dörr, R. C. (2013). Experiências matemáticas e experiências com alunos na

[1]Informações sobre o PIBID: https://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid

formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília, *Atas VII CIBEM*. Montevideo, Uruguai.

Apêndice A

Abordagem Geométrica do Problema

Temos a seguinte pergunta inicial:

"Havendo um presente dentro de uma caixa, como deveria ser embrulhada com o mínimo de desperdício de material?"

Sabendo que o formato da caixa é quadrado, pois assim obtemos o menor desperdício de papel, agora devemos pensar no papel de presente. Para isso, pegamos uma caixa quadrada qualquer, como mostra a figura a seguir:

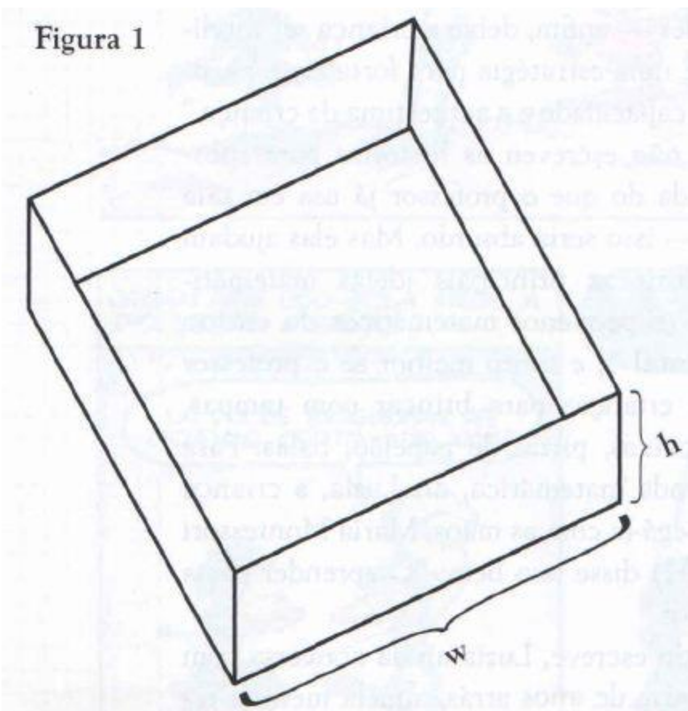

Figura 2. Caixa de base quadrada.

Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

Que tamanho deve possuir o papel de presente?

Sabemos que tanto a caixa quanto o papel de presente devem ser quadrados. Posicionando a caixa aberta sobre o papel de presente, vamos obter a seguinte figura:

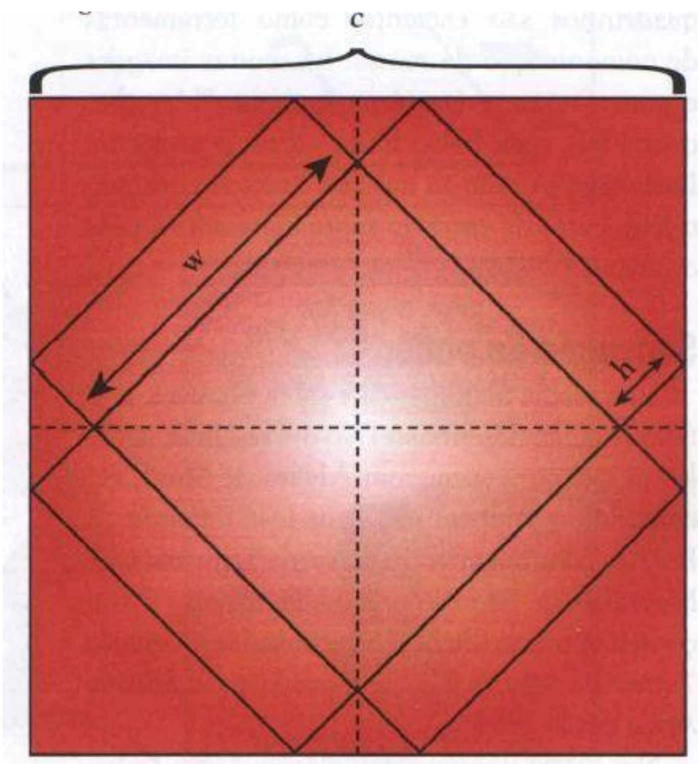

Figura 1. Caixa aberta sobre o papel de presente.

Fonte: Revista Cálculo Edição 14, 2012

Nosso objetivo será encontrar a medida do lado do papel de presente, que de acordo com a figura, chamaremos de c. Podemos perceber que a figura está dividida em quatro partes, concentremos nossa atenção na primeira parte do lado direito, a que contém a altura h. De posse de todos os elementos necessários para descobrir c, temos a seguinte figura da primeira parte em detalhes:

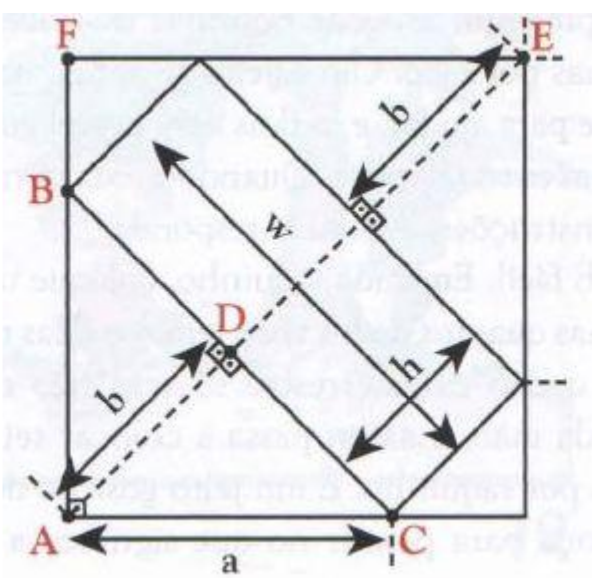

Figura 3. Primeira parte em detalhes.

Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

Agora começaremos os cálculos, com o objetivo de encontrar o valor de c. Para isso, buscamos na figura relações conhecidas. Olhando para a, podemos perceber que ele é a metade da diagonal de um quadrado de lado igual a w, ou seja, $2a$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a w. Com essas informações, podemos iniciar nossos cálculos:

$$(2a)^2 = \;{}^2 + w^2$$
$$4a^2 = 2w^2$$
$$a^2 = \frac{2w^2}{4}$$
$$a = \sqrt{\frac{{}^2}{2}} = \frac{\;}{\sqrt{2}} = \frac{\;\sqrt{2}}{2}$$
$$a = \frac{\;\sqrt{2}}{2}$$

Assim encontramos o valor de a, pois ele é necessário para encontrarmos o valor de b, que é um cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa igual a a e cateto oposto igual a metade de w. Assim, temos:

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{\;}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{\;\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{{}^2}{4}$$
$$\frac{2w^2}{4} = b^2 + \frac{{}^2}{4}$$
$$b^2 = \frac{2w^2}{4} - \frac{{}^2}{4}$$
$$b = \sqrt{\frac{{}^2}{4}} = \frac{\;}{2}$$

Logo, obtemos o valor de b. Agora, olhando novamente para nossa figura podemos perceber como será usado o valor de b para o cálculo de c: $b + h + b$ é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais à metade de c. Logo, sabemos como calcular o valor de c:

$$(2b + h)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$(2b + h)^2 = 2\frac{c^2}{4}$$
$$c^2 = 2(2b + h)^2$$

$$c = \sqrt{2(2b + h)^2}$$
$$c = \sqrt{2}\,.\,(2b + h)$$
$$c = \sqrt{2}\,.\left(2\frac{}{2} + h\right)$$
$$c = \sqrt{2}\,.\,(w + h)$$

Portanto, precisamos somente do comprimento do lado da caixa e sua altura para sabermos aproximadamente o tamanho do papel de presente que iremos usar. E se embrulharmos a caixa com papel de presente quadriculado ou com listras, eles irão coincidir perfeitamente. Assim, teremos um embrulho bonito e com o menor desperdício de papel possível.