A arte pelo olhar da isometria e da geometria plana na prática: dos espelhos aos ângulos!

Cláudia Georgia **Sabba**
Universidade Nove de Julho
Brasil
cgsbba@gmail.com
Clécio Esteves **Cavalcante**
Universidade Nove de Julho
Brasil
clecioec@uol.com.br

Resumo

Neste trabalho, analisa-se meios para introduzir conhecimentos matemáticos para alunos do ensino médio, associando conceitos da matemática com imagens visíveis em todos os lugares da vida cotidiana. A partir do exame de livros sob o olhar de isometrias, ornamentos e a arte foram estabelecidas relações com conteúdos de livros didáticos, especificamente de geometria plana foi possível observar que em alguns livros não havia nesses temas a preocupação com esta relacionar tais conceitos com eventos do dia a dia dos alunos. Discute-se a importância de buscar alternativas simples no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Nesse cenário, afirma-se que a simetria provém um contexto muito abrangente, mas possibilita a atração dos olhares dos alunos para questões que podem ser relacionadas com o ensino da matemática. Como proposta didática para ação, apresenta-se a construção do caleidoscópio, pois sua montagem emprega materiais simples e de baixo custo.

Palavras chave: matemática, geometria, arte, isometrias, simetria, espelhos

Introdução

Os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, na última década, vêm passando por mudanças importantes e significativas. Muito se fala sobre o ensino focado na construção ou com aplicações práticas, de maneira que possibilite ao aluno um panorama daquilo que é ensinado, bem como os reflexos deste conhecimento possam gerar aplicações em situações de sua vida cotidiana.

Essa tendência permite tornar o conhecimento matemático, algo com mais sentido, ampliando o olhar dos alunos em outras direções além de representar apenas operações com números e letras sem apresentar, para alguns, um sentido lógico e aplicado.

Ainda no contexto da educação, os livros didáticos geralmente seguem uma tendência que separa os conteúdos de acordo com a capacidade cognitiva dos alunos, procurando introduzir conhecimentos em fases que os alunos possuem maturidade para absorvê-la.

Sendo assim, é fundamental adaptar o processo em busca de uma forma de introduzir o conhecimento matemático aproveitando a fase que o aluno está vivendo. Para isso é sugerido analisar a visão de que para esse jovem assimilar, é importante que ele consiga dar um sentido para as noções trabalhadas pelo professor.

Focando especificamente os tópicos de geometria plana introduzidos no ensino médio percebe-se uma característica comum, os conteúdos não despertam a percepção dos alunos. Esse aspecto está associado ao fato de que os conceitos apesar de simples, muitas vezes não são relacionados ao seu cotidiano ou não cativa a atenção para seus detalhes.

Para construir um conhecimento geométrico mais consistente, é necessário que o aluno tenha condições de perceber aplicações para esse conteúdo, ou visualizar tais aplicações em sua vida fora da escola.

Falar de retas, ângulos ou figuras geométricas regulares entre outros temas da geometria, não envolve definições muito complexas que inviabilizem o entendimento do aluno, pois se trata de conceitos relativamente simples. Trabalhar com um conteúdo simples, que não exige um grande nível de abstração do aluno, pode não ser tão motivador, propiciando que o aluno venha a desprezar esses conteúdos por não visualizar ali algo que chame sua atenção.

Segundo Sabba(2004), uma boa maneira de atrair o olhar dos alunos é por meio da beleza das coisas; a arte é algo que está inserido em tudo que se olha, e certamente é percebida pelos alunos, sem que haja nessa percepção a rigidez de alguns conceitos ou conteúdos da matemática. É necessário então aproveitar essa oportunidade, trabalha-la de forma tal que o aluno perceba e crie relações.

Não é necessário muito investimento para isso, basta buscar nas mídias aquilo que está na moda, sejam roupas, personagens, desenhos, filmes, etc. Apresentar essas imagens aos alunos e questiona-los sobre aspectos tais como: a) Porque as pessoas olham determinada imagem e a conceituam como bela? b) O que há de diferente no rosto de um determinado personagem que chame tanto atenção de um grande número de pessoas?

Perguntas como essas tem o propósito de estimular os alunos a uma reflexão, para tornar o tema interessante, facilitando assim seu envolvimento quando abordado pelo professor. Nesse momento, torna-se possível trabalhar temas como a simetria, inicialmente com uma abordagem mais artística, na qual o professor reúne diversas imagens de revistas, jornais, livros entre outras, promovendo um debate sobre as imagens para reunir informações sobre a percepção inicial dos alunos.

A partir desse ponto, o professor poderá explorar o conteúdo, introduzir conceitos, fazer relações inclusive com gráficos que projetam de forma simétrica as informações, gerando com isso um ambiente de aprendizagem mais envolvente.

As isometrias, conteúdo que está ligado diretamente com essa pesquisa, também tem forte relação com simetrias. A ideia de um espelho, que é facilmente observado por qualquer pessoa, será o principal ponto de partida para o entendimento do assunto. Após apresentar alguns exemplos, sugere-se a definição dos principais conceitos relacionados a isometrias, entre eles, a reflexão isométrica para explorar o tema de forma mais prática e envolvente. Com o tema introduzido, chega o momento de o aluno refletir sobre aspectos da geometria plana, agora com uma nova visão. Como exemplo, podem-se utilizar os casos de congruência de triângulos, associando-os as aplicações de reflexo de isometrias.

Trata-se da retomada do assunto que antes fora abordado como conceito matemático para permitir que os alunos estejam no mesmo nível de entendimento, associada a utilização dos recursos disponíveis, para elaborar imagens e discutir com os alunos sobre construções isométricas muito comuns em seu dia a dia, com características simétricas, como visto em tapetes, pisos, cartões postais entre outros.

Uma vez que os alunos percebem algumas aplicações isométricas, é o momento de propor a construção de um caleidoscópio. Empregando materiais simples na sua construção, será possível explorar todos os conhecimentos aprendidos. O professor poderá propor algumas formas de montar o caleidoscópio com diferentes materiais, e estimular sua montagem pelos alunos. Aproveitando ainda a ideia do caleidoscópio o professor pode explorar outros estudos mais específicos, como as figuras geométricas que pavimentam um determinado espaço, conceituar essa pavimentação, comparando as figuras. Pode inclusive propor aos alunos que pesquisem se todas as figuras geométricas regulares são capazes de pavimentar o espaço, ou não. Se há alguma forma de misturar mais de uma figura para pavimentar e finalmente convidar os alunos para que tentem explicar porque não é possível em alguns casos a pavimentação. Ao desenvolver esse trabalho, os alunos aumentarão seu nível de conhecimento, pois terão que entender outros conceitos geométricos mais específicos.

Simetria

O mundo moderno dispõe de recursos audiovisuais muito sofisticados. Televisão, computador, máquinas fotográficas digitais, celulares entre outros que possibilitam um acesso visual virtuoso. É intrigante perceber que muitas pessoas se sentem atraídas por determinadas imagens sem se dar conta da similaridade que acontece com outros eventos. A simetria é certamente um desses aspectos!

No estudo da matemática, o tema é aplicado de forma tal, que não atrai os alunos para uma análise mais específica. Muitos alunos ao resolverem um exercício de função, esboçam gráficos e nem mesmo se dão conta do aspecto da simetria, que está inserida no contexto.

Quando um professor aborda o assunto de números opostos em uma operação de adição, os alunos novamente não percebem nesse contexto uma importante relação, que certamente poderia mudar seu entendimento no futuro sem muito esforço, e que está relacionado com a simetria.

Historicamente, a simetria vem sendo estudada, analisada, desenhada e, um bom caminho para atingir sua compreensão, é por meio da geometria. “Os sucessores de Galois logo perceberam que a relação entre grupos e simetria é mais fácil de ser compreendida no contexto da geometria. De fato, é assim que o assunto, em geral, é apresentado aos estudantes.” (Stewart, Ian, 2012, p. 144.).”

Com base na ideia de Stewart, pode-se afirmar que a utilização da geometria é uma boa estratégia para aplicar o conceito de simetria, assim como para se fazer entender sobre o tema. Durante muito tempo, o estudo da simetria foi associado a aspectos de beleza, elegância e proporção, mas sem um nível de formalização necessário para utilização na matemática. Várias são as definições sobre simetrias, sempre com um olhar muito focado para o aspecto de aplicação de que a define.

Vejamos algumas, “Simetria é uma ideia que o homem tem usado ao longo dos tempos para tentar compreender e criar ordem, beleza e perfeição”. (Serra, 1993, p. 304), “A noção de simetria é deveras importante em matemática, nas artes visuais e em diversas ciências como cristalografia e a física”. (Oliveira, 1997, p.70). Já “Em geometria, simetria define-se em termos de isometrias quando a imagem da figura, através de uma isometria diferente de identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria”. (Serra, 1993, p.2). Muitos estudiosos escreveram sobre o tema, e nesse contexto, buscou-se uma abordagem simples, para proporcionar ao leitor de forma imediata o entendimento sobre simetria.

Definir a simetria é fundamental para estabelecer um entendimento e também sua relação com o tema aqui estudado. Como o objetivo não é aprofundar no conceito de simetria e analisar todo o contexto a que ela está submetida (até porque haveria inúmeros), entender sua definição assim como, onde e de que forma é aplicado no desenvolvimento da pesquisa, sugere-se a seguinte definição: Uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto. A questão do estudo da simetria, não se trata de uma preocupação especifica para o ensino da matemática, segundo Caruso (2008, p.339):

> Assim como cabe aos pesquisadores desvendarem os princípios da simetria ainda ocultos na natureza, na busca de um entendimento maior do universo, deve caber ao professor do ensino médio uma tarefa de certa forma análoga: fazer ver ao aluno o quanto mesmo a física básica, objeto de seu estudo, também oculta conceitos de simetria, de cuja compreensão depende um aprendizado mais amplo e profundo da própria física.

Com base no exposto pelo autor, pode-se afirmar que a simetria é um conhecimento que deve ser abordado para alunos do ensino médio, para uma melhor compreensão da física. Esse contexto reforça a análise sobre o aspecto de que a simetria é algo cujo foco deve ser ampliado para uma melhor assimilação por parte dos alunos.

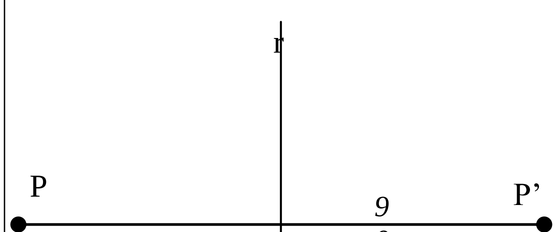

Figura 1- Ponto simétrico

Com a breve análise histórica sobre simetria, assim como instituída uma definição, vejamos agora alguns exemplos apoiados em imagem, para que o leitor consiga assimilar melhor o que fora explorado. Os exemplos serão inseridos sempre apoiados em uma definição, para tornar visível o que se deseja mostrar.

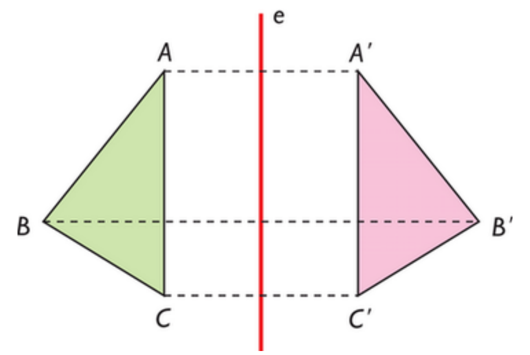

Figura 2 - simetria do triângulo

A partir da definição de reflexão de um ponto, é possível compreender alguns conceitos.

Ponto Simétrico – dois pontos, P e P' são simétricos em relação a uma reta r quando esses pontos estão na mesma distância da reta r e o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a r.

O ponto P' é dito reflexão de P (imagem) através da reta r (ou espelho). Note que r é o eixo simétrico.

Figuras simétricas – quando todos os pontos de uma figura geométrica tem seu simétrico em relação a uma reta r (espelho), dizemos que a figura formada pelos simétricos é simétrica em relação a figura original.

O olhar proporciona visualizar milhares de imagens a todo o momento. As pessoas raramente buscam nesse processo de visualizar compreender aspectos tão interessantes. A simetria é certamente um desses aspectos. Observemos então algumas imagens das mais simples e primárias até outras com nível de sofisticação e riqueza de detalhes, e notemos aspectos comuns: A figura 1 exibe o triângulo ΔABC e seu reflexo ΔA'B'C', com base no eixo de simetria e. Trata-se de um exemplo simples. Essa imagem representa dinamicamente o efeito da simetria sobre um plano geométrico.

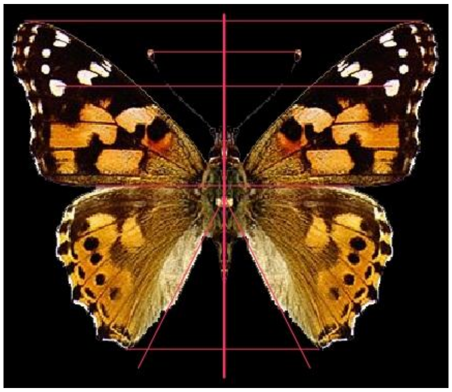

Figura 3 - Borboleta sob o eixo de simetria

A borboleta da figura 3 está orientada sobe uma linha vermelha e também é uma figura simétrica. Trata-se de uma imagem da natureza, na qual as pessoas não têm por hábito observar a perfeição do reflexo das asas.

Figura 4 - Reflexão sobre eixo do Taj Mahal

Pelas orientações inseridas na imagem, é possível visualizar que todos os pontos de uma das asas são refletidos na outra com riqueza de detalhes.

O Taj Mahal, um museu construído entre 1632 e 1653, considerado uma das sete maravilhas do mundo moderno. Trata-se de uma obra que permite uma visualização no foco da simetria em vários aspectos. Desde o reflexo na agua que reproduz a imagem invertida, até os demais detalhes que se projeta a partir do eixo de simetria.

Isometrias

Esse artigo foi idealizado com foco na situação atual da educação matemática e traz uma proposta alternativa na aplicação de certos conteúdos da matemática de forma tal que seja motivador para os alunos do ensino médio.

A geometria Euclidiana ensinada nas escolas baseia-se em figuras rígidas, isto é, a congruência de triângulos é o método principal de demonstrações. O conceito de transformações é tão central na geometria como a função para Análise Matemática. Falar de geometria das transformações (Felix Klein, 1849-1925), mesmo datado de outra época, é sem dúvidas um tema central e atual pela importância que pode oferecer nas estruturas matemáticas como, por exemplo, grupos e isomorfismos.

Do conteúdo desenvolvido até aqui, buscou-se ênfase na intuição geométrica sem prejudicar a precisão das demonstrações e sem alterar ou deixar de definir certos conceitos elementares (ângulos, segmentos, etc.), já que na atual conjuntura espera-se certa dificuldade por parte dos alunos, em conceitos básicos. A intuição geométrica é certamente na formação de um conhecimento matemático e principalmente na vida das pessoas.

A aplicação da teoria das isometrias no plano, pode ser relacionada a teoria dos ornamentos tais como flor ou fita, assunto muito bonito e simples que liga a matemática a arte.

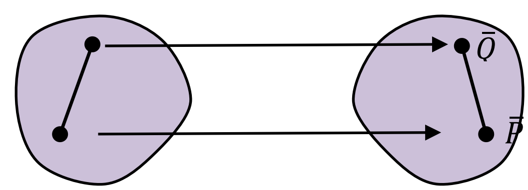

Figura 5 - Pontos congruentes

O conceito de transformação geométrica surgiu inicialmente considerando os movimentos dos corpos rígidos. Do ponto de vista geométrico, esses movimentos não alteram o tamanho nem a forma do corpo. É possível analisar por meio de correspondência os pontos antes e depois do movimento do corpo.

Seja M um ponto do corpo, onde M ocupa o ponto P no espaço, antes do movimento e seja $\bar{P}$ o ponto correspondente a P, ocupado por M depois do movimento. Se P é levado em $\bar{P}$, e Q em $\bar{Q}$, nesse movimento os segmentos [PQ] e [$\bar{P}\bar{Q}$] são congruentes, porque cada um deles corresponde a um segmento fixo entre dois pontos do corpo.

O aspecto da cinemática aqui não é o foco principal, ou seja, a preocupação não está no percurso ou velocidade da passagem do ponto P até o ponto $\bar{P}$, mas sim na correspondência entre os pontos antes e depois do movimento. Tais aplicações conservam a distância entre pontos; do ponto de vista geométrico estas aplicações são as mais simples, pois mudam unicamente a posição de uma figura, mantendo sua forma e seu tamanho.

Definição

1 – Isometria é uma aplicação de P_E em P_E, que conserva distâncias, chama-se isometria, isso é, se Ω é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários, e se $\bar{P}$ = (P)Ω e $\bar{Q}$ = (Q)Ω, então |PQ| = |PQ|.

Refletir sobre a teoria de isometrias, permite ao leitor ter uma visão que aplica a geometria plana em um universo mágico, já que busca-se visualizar imagens considerando sua beleza, mas com a propriedade da formalização matemática. Essa formalização não deve ser vista como um aspecto rígido, até porque em cada aplicação da isometria é possível perceber um teorema que acompanha um contexto agradável. Vejamos a seguir, a imagem de um rosto considerado simetricamente perfeito:

Figura 6 –
Rosto Simetricamente Perfeito

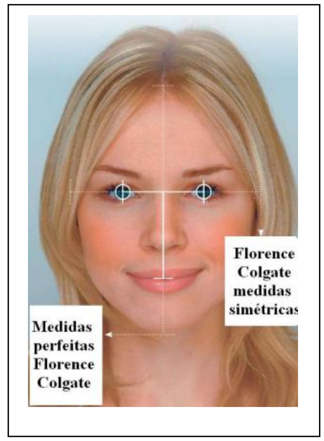

Figura 7
– Esquema de Análise Facial

A figura 6 é a foto da jovem Florence Colgate, uma estudante de 18 anos.

Um concurso elegeu o rosto feminino mais próximo da perfeição no Reino Unido. "A beleza dessa jovem foi determinada com utilização de uma visão matemática, com critérios que levaram em conta aspectos da simetria do rosto." (Abril online, 2012)

Por meio de uma análise não muito aprofundada, é possível perceber aspectos harmônicos no roso da jovem. A figura 7 possui um esboço, que divide o rosto ao meio, e evidencia a distância entre os olhos, a projeção das sobrancelhas, cuja curvatura é quase idêntica. Os traços do nariz possuem uma similaridade quase total.

Nessa leitura, comprova-se a aplicação da reflexão dos pontos da face por meio de um eixo de simetria, que pode ser justificado pela teoria de isometrias. Visualizam-se traços quase idênticos.

A discussão sobre simetria com utilização de isometrias é sem dúvida um tema muito abrangente, que possui um conteúdo matemático bem denso, porém é facilmente contornado por se tratar de algo de fácil projeção no meio em que se vive.

Os teoremas e definições introduzidos nesse artigo, não foram esgotados dentro daquilo que a teoria de isometrias abrange, mas certamente procurou-se reproduzir os mais relevantes para seguir no desenvolvimento do trabalho.

Serão mencionadas algumas definições a seguir de forma superficial, o que se justifica para evitar que o foco central desse artigo seja desviado por uma teoria densa e rica de detalhes. Recomenda-se ao leitor que busque nas referencias bibliográficos mais detalhes sobre definições e apêndices que possam ser do interesse, para o caso de maior rigor de detalhes.

Teoremas sobre isometrias

Entre os teoremas sobre isometrias é importante discutir sobre a relação entre reflexões em retas e isometrias em geral. O produto de isometrias é também uma isometria, pois cada isometria conserva o comprimento; seu produto também o conserva.

A identidade I é uma isometria, assim como a inversa de uma isometria é isometria. Um conjunto de isometrias forma um grupo em relação à operação composição. Toda isometria é o produto de no máximo três reflexões. Translação – toda translação t($\vec{v}$) pode ser representada de infinitas maneiras como o produto de duas reflexões em retas. Basta tomarmos duas reflexões em retas arbitrárias, paralelas, com vetor distância $\vec{d} = \frac{\vec{v}}{2}$. De forma mais imediata, uma translação nada mais é do que uma mudança de eixo simétrico por alguma reta paralela.

Rotação – O produto de duas reflexões em retas concorrentes caracteriza uma rotação. Para uma melhor visualização do mencionado sobre translação e rotação, serão exibidas imagens com tais características.

Figura 8 - Aplicação Isométrica - Translação

Figura 9 - Aplicação Isométrica - Translação

Figura 10 - Aplicação Isométrica - Rotação

Figura 11 - Aplicação Isométrica - Rotação

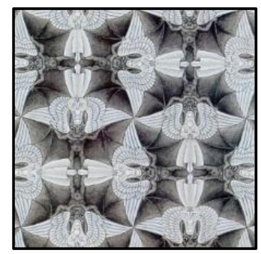

Figura 12 - Aplicação Isométrica - Rotação

A figura 10 representa uma aplicação da isometria com rotação. A intrigante imagem de M. C. Escher mostra a fusão de anjos e demônios, em um cenário tão perfeito, que muitas vezes passam despercebidas as relações que compuseram a imagem. O artista relacionou as silhuetas, com uso da rotação dos eixos isométricos, e criou uma imagem por meio dos opostos em uma visão filosófica da religião.

Caleidoscópio

O Caleidoscópio é uma espécie de instrumento óptico constituído em um pequeno tubo de papelão ou metal, com pequenos fragmentos coloridos. Os fragmentos podem ser de diversos tipos de materiais dos mais simples aos mais sofisticados. Entre eles, citam-se vidros, lantejoulas em diversos formatos, ou mesmo, pequenos recortes de papeis coloridos, etc. No interior do tubo, especificamente nas laterais são fixados pequenos espelhos inclinados que refletem através da luz exterior as diversas combinações de imagens, para formação de agradáveis efeitos visuais.

O nome caleidoscópio deriva das palavras gregas: *καλός* (*kalos*) – belo, bonito; *είδος* (*eidos*) – imagem, figura; *σκοπέω* (*scopeo*) – olhar para, observar. Há registros que o caleidoscópio fora inventado na Inglaterra por volta de 1817 pelo físico escocês Dawid Brewster (1781 – 1868). Afirma-se ainda que o caleidoscópio já fosse conhecido no século XVII. Conta-se que um homem muito rico adquiriu um desses aparelhos por 20.000 francos. O aparelho era feito com perolas e gemas preciosas no lugar de vidros coloridos.

O caleidoscópio é utilizado como um simples brinquedo por muitos, assim como pode ser utilizado no processo de observação de padrões de desenhos. Com advento do caleidoscópio, foram desenvolvidos equipamentos que são capazes de reproduzir seus padrões de imagens, e hoje, com o desenvolvimento da tecnologia, existem softwares que reproduzem em imagens fotogravadas os efeitos do caleidoscópio, cujos propósitos são variados, desde criar cenários até sua utilização para estudo.

O caleidoscópio de Brewster consistia em um tubo com pequenos fragmentos de vidro colorido e três espelhos que formavam um ângulo de 45º a 60º graus entre si. Os pedaços de vidro refletiam-se nos espelhos, formando imagens simétricas. Juntos, os reflexos formavam imagens em cores.

Atualmente os caleidoscópios são edificados em tubos de matérias mais simples, e no seu interior, espelhos são dispostos em ângulos de 45º, 60º e até 90º graus.

Figura 13 - Alguns modelos de Caleidoscópio

Figura 14 – Caleidoscópio com fragmentos de vidros

Figura 15 - Caleidoscópio formado por imagens

Um caleidoscópio pode gerar inúmeras imagens, assim como pode ser estruturado de várias formas.

Ao mencionar aspectos sobre simetria, reflexos e ângulos, abordam-se assuntos que já foram discutidos dentro de um contexto necessário para que haja um entendimento formal e assim seja possível visualizar e entender a estrutura matemática por traz do fenômeno do caleidoscópio. Há ainda, aspectos relacionados a física, mais especificamente a óptica. Tais conceitos não serão foco no desenvolvimento desse trabalho.

Retomando agora a ideia central desse trabalho, ou seja, de utilizar o caleidoscópio como peça para chamar atenção dos alunos no estudo da geometria, considera-se: Na geometria ensinada de maneira "informal", geralmente são utilizados cartões, com os quais se desenvolvem várias experiências geométricas. Percebeu-se que mostrando figuras agradáveis e coloridas, as crianças tem um maior rendimento, pois em um primeiro momento não se dão conta o fato de que as brincadeiras são na verdade uma estratégia para exercícios de matemática.

Em se tratando de uma maneira informal de ensinar, não se busca muita precisão nos resultados e pode-se enfatizar a ideia, o entendimento, a noção do pretendido. Ações como essa deixam as crianças livres para manifestar suas opiniões e com isso, é possível argumentar sobre suas visões, corrigi-las sempre em um clima harmoniosos e divertido, obtendo no final o envolvimento e o entendimento dos conteúdos abordados.

Finalizando, as vantagens desse tipo de trabalho residem no fato do próprio aluno poder produzir seu material de aprendizado, construir seu conhecimento por ele mesmo, pois descobrirá os conceitos pela própria experiência, exercitando seu raciocínio.

Caleidoscópio Educacional

Como já vimos, o caleidoscópio de dois espelhos articulados mostrou-se interessante no estudo de polígonos regulares e suas propriedades, já que todos os polígonos regulares têm linhas simétricas e o caleidoscópio produz padrões simétricos

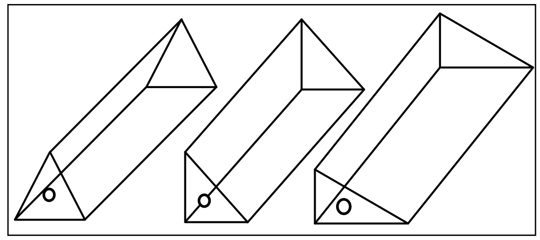

Figura 16 - Tipos de Caleidoscópios

Assim sendo, analisemos agora o caleidoscópio Educacional de três espelhos planos formando uma superfície lateral de um prisma triangular, o qual se apresenta especialmente indicado para produzir pavimentações do plano por polígonos regulares.

Como acontecem com os dois espelhos, para que tenhamos imagens coincidentes e repetição perfeita das figuras obtidas, cada ângulo deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de 360º; portanto, sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ os ângulos dos espelhos, devemos ter: $\frac{360º}{2\hat{a}} = \frac{180º}{\hat{a}} = n_1$; $\frac{180º}{\hat{b}} = n_2$ e $\frac{180º}{\hat{c}} = n_3$.

Segue de $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180º$, que a condição para n_1, n_2, n_3, é $\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2} + \frac{1}{n3} = 1$, cujas soluções inteiras podem ser deduzidas, e são: (3, 3, 3), (2, 4, 4) e (2, 3, 6), o que corresponde a termos os valores de $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, iguais a (60º, 60º, 60º), (90º, 45º, 45º) e (90º, 60º, 30º). Caleidoscópios com tais ângulos recebem os nomes de Equilátero, Isósceles e Escaleno, respectivamente.

Nos caleidoscópios são formadas imagens múltiplas, pois as obtidas num dos espelhos forma novas imagens nos outros dois, e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano.

A construção desses caleidoscópios é de simples execução tanto por professores como pelos alunos, possibilitando amplo emprego em várias atividades educacionais.

A seguir, mostraremos tipos de caleidoscópios e suas construções, para uso individual ou em grupo.

Construção do caleidoscópio equilátero

Material

a) 3 espelhos planos retangulares grandes. Medidas sugeridas: dois espelhos de 25 cm x 22 cm e um de 35 cm x 15 cm.
b) 2 pedaços de papelões. Um papelão deverá conter a medida (aproximadamente de 51 cm x 22 cm, dependendo da espessura dos espelhos utilizados) dos dois espelhos iguais + 2 vezes a espessura do mesmo, pois o papelão deve revesti-los à forma de um livro.
c) $\frac{1}{2}$ folha de cartolina ou papel cartão.

Construção

Fixar com cola os espelhos nos respectivos papelões (os dois espelhos iguais deverão ser colados nas extremidades do papelão, deixando entre eles uma distancia que possibilite sua articulação para obtenção dos ângulos). Desenha na folha referida em (c) um conjunto de semirretas de mesma origem para vários ângulos de 0º a 180º, como uma folha transferidor, para ajustamento dos espelhos.

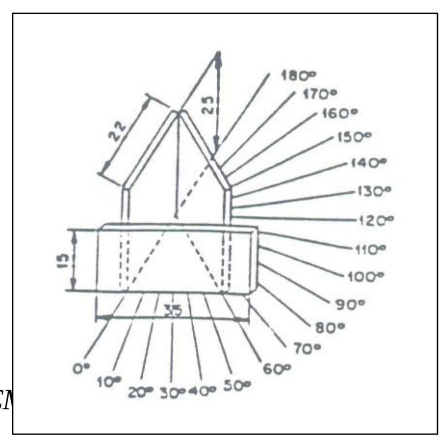

Figura 17- Caleidoscópio modificado

Utilização

O caleidoscópio pode ser utilizado na forma equilátero, isósceles ou escaleno, dependendo da abertura dos ângulos. Especifiquemos quando equilátero:

Caleidoscópio Equilátero: dispor os dois espelhos articulados sobre a folha transferidor formando um ângulo de 60º. Encostar o outro espelho conforme indica a figura. Notar que o terceiro espelho é mais baixo que o conjunto articulado, possibilitando uma boa visão superior.

Para as medidas sugeridas, as bases substituíveis serão triângulos equiláteros de lado 22 cm, que podem ser feitos de cartolina com os desenhos adequados. Tais bases serão colocadas no interior do caleidoscópio obtido cobrindo a folha transferidor.

As pavimentações que se obtém, nos diversos tipos de caleidoscópios são: a)No equilátero: (3, 3, 3, 3, 3), e (6, 6, 6); b) No Isósceles: (4, 4, 4, 4), e (4, 8, 8); c) No escaleno: (3, 3, 3, 3, 3, 3), (6, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (4, 6, 12) e (3, 12, 12).

Quando tratamos da descoberta de pavimentações planas, podemos encontrar varias configurações geradas nos caleidoscópios equiláteros, isósceles e escalenos, por meio de bases substituíveis colocadas na parte inferior dos caleidoscópios. Estas bases são triângulos feitos, geralmente, de material transparente com segmentos de retas desenhados para obtenção de imagens múltiplas.

Considerações Finais

O momento atual é marcado por um grande desenvolvimento tecnológico, no qual se observa uma grande expansão do fluxo de informações acessíveis por vários canais, entre eles a internet que sem dúvidas, é um poderoso veículo de acesso a informação. Esse cenário de evolução vem se moldando de forma veloz, deixando para traz uma estrutura de educação que parece ter parado no tempo. Muitos profissionais não estão acompanhando esse avanço e alimentando a ruina que se visualiza na atualidade em relação às escolas.

Como consequência disso, a realidade que se observa é de alunos totalmente desinteressados, já que sua vida fora da escola é regrada dos principais mecanismos de comunicação e tecnologia tais como, celulares, notebook, Ipad, Tablet, entre outros. Ao chegar à escola, esses indivíduos, são "obrigados" a deixar todos os recursos de lado, para ser fixar em aulas monótonas, com poucos recursos disponíveis e ao invés de chamar sua atenção para o desenvolvimento intelecto-cultural, o que se observa é um efeito bem contrário.

Não é concebível que educadores se fixem em estruturas não funcionais de educação, e acreditem que terão bons resultados. Muitos jovens são deixados de lado, pelo fato de não se adequarem ao processo. Chega-se ao absurdo de qualificar grupos de alunos com dificuldade em aprender, ou se adequar ao processo, como portadores de déficit de atenção sem se perceber, que esses jovens são capazes de executar tarefas relacionadas a mais de uma atividade, bastando para isso que sejam estimulados, e o principal, que esses alunos visualizem alternativas diferentes das aplicadas atualmente.

Uma das propostas desse trabalho foi de relacionar a geometria plana, com eventos do cotidiano do aluno, com um objetivo principal, demonstrar ao mesmo, que a matemática não é uma ciência "morta" voltada só a cálculos e expressões como se pensa.

No desenvolvimento dos conteúdos necessários para montar um caleidoscópio, analisamos aspectos de simetria, que demonstram que até o conceito de beleza pode ser explicado e formalizado por aspectos matemáticos. Aproveitar-se desse tipo de mecanismo certamente é um dos caminhos que o educador deve trilhar para desenvolver seu trabalho de forma mais agradável para obter melhores resultados. Como resposta desse esforço, teremos alunos engajados e envolvidos em estudar e desenvolver o conhecimento, pois não há dúvidas que a assimilação dos conteúdos é muito mais efetiva quando há participação efetiva dos alunos.

A proposta de relacionar a matemática com a arte é sem dúvida uma grande oportunidade de explorar com mais intensidade essa ciência. A todo o momento as pessoas saem às ruas, observam imagens, caminham por ruas pavimentadas, olham para cores, formas, figuras, e não se dão conta do universo de informações constantes nesse meio que estão diretamente relacionadas com a matemática.

O aspecto de montar um caleidoscópio possui o contexto de que o professor reunirá grupos para expor as práticas que deverão ser utilizadas pelos alunos para montar o objeto. Indiretamente, os alunos perceberão aplicações que podem ser associadas à ideia de função, tema esse que não desperta o menor interesse em aulas comuns de matemática. Também terão acesso ao aspecto das relações, tanto de ângulos, que formarão imagens diferentes, de acordo com sua disposição, como também com temas mais específicos, como figuras geométricas regulares, e sua junção, formando planos virtuais muito agradáveis.

Os alunos poderão perceber que há muito mais mistérios na projeção de um reflexo por meio de um espelho, do que se imagina e que esse fenômeno está envolvido com diversas definições matemáticas. São eventos simples que, se reunidos e organizados de forma racional, se tornam um diferencial no processo de ensino aprendizagem.

A educação pode ter um novo horizonte, que depende do envolvimento de muitas partes: Governo, Pais, Alunos e Professores. Esses últimos pode/devem gerar estímulos utilizando os recursos disponíveis para conscientizar e envolver alunos em um novo cenário.

Referências e bibliografia

Agranionih, N. (2001) *A Teoria da Transposição Didática e o Processo de Didatização dos Conteúdos Matemáticos, Revista de Educação Matemática*, Vol. 1, n.1.

Caruso, F. (2008). *Revista Brasileira de Ensino de Física*, V.30, n. 3, 3309. www.sbfisica.org.br

Dolce, O.(2001). *Fundamentos de Matemática 9 Elementar – geometria plana*. São Paulo: Ed. Atual.

Escher, M. (1989).*Gravura e Desenhos*. Holanda: Cordon Art Baar.

Gombrich, E. (1995). *Arte e Ilusão – Um estudo da psicologia da representação pictórica*. São Paulo: Martins Fontes.

Ledergerber-Ruoff, E (1982). *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano*. São Paulo: Ed. Atual.

Murari, C & Perez, G. (2002) *Caleidoscópios: Pavimentações em Espelhos*.

Sabba, C.(2004). *O Olhar humanístico matemático de Leonardo da Vinci: Reencantando a matemática por meio da arte*. São Paulo: FEUSP

Stewart, I. (2012). *Uma história da Simetria na Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar.