Geometria Analítica e Sistemas de Equações Lineares: Transição Ensino Médio e Superior

Marlene Alves **Dias**
Universidade Anhanguera
Brasil
alvesdias@ig.com.br
Sirlene Neves de **Andrade**
Diretoria Regional Sul 3 – São Paulo
Brasil
sirlene-neves@hotmail.com

Resumo

Apresentamos aqui parte da pesquisa sobre a transição ensino médio e superior para as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares. O objetivo da pesquisa sendo de analisar as relações institucionais esperadas e existentes para o desenvolvimento das noções de geometria analítica e sistemas lineares na transição entre os ensinos médio e superior. O referencial teórico central é a TAD, complementado pelas noções de quadro, ponto de vista e de níveis de conhecimento segundo a didática francesa. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, documental na qual analisamos documentos oficiais e livros didáticos e as macroavaliações do SARESP. Os resultados encontrados mostram uma preocupação institucional em articular ostensivos e não ostensivos associados às noções de geometria analítica e sistemas lineares, um abandono das questões associadas à geometria analítica nas avaliações institucionais do ensino médio e uma preponderância de tarefas intra e extramatemáticas para o estudo dos sistemas lineares.

Palabras chave: geometria analítica, sistemas de equações lineares, relação institucional e pessoal, didática da matemática.

Introdução

Os problemas gerais encontrados no ensino de matemática quando da transição entre o ensino médio e o ensino superior, tanto no Brasil como na França, são muito próximos, como é possível observar por meio do trabalho de Robert (1998), no qual a autora destaca algumas das insatisfações encontradas pelos professores em relação a essa passagem entre as duas etapas escolares consideradas. Algumas dessas insatisfações são: os fracassos numerosos, a perda de sentido, a falta de curiosidade, as dificuldades para entrar no pensamento científico por parte dos estudantes. Isto leva os professores às dificuldades de gestão das classes, que são cada vez mais heterogêneas, e à implementação de novas propostas, muitas vezes não bem compreendidas ou julgadas redutoras por parte dos mesmos. Essas propostas, em geral, demandam a aplicação de novas estratégias de trabalho, incluindo as novas tecnologias, que por sua vez têm especificidades próprias para cada conteúdo, de modo que exigem um preparo específico para que se possa utilizá-las de forma a atender os objetivos propostos.

Em função desse quadro de dificuldades encontradas, tanto pelos estudantes como pelos professores, propõem-se estudos cujo objetivo final seja a construção de cenários de aprendizagem em que estudantes possam trabalhar com seus conhecimentos retrospectivos de forma independente nas tarefas e atividades que lhes são propostas. No entanto, esse trabalho deve ser mediado pelo professor, pois é ele que propõe a tarefa por meio de atividades.

É preciso ainda considerar questões como as diferentes possibilidades de abordagem, das noções em um determinado quadro, conforme Douady (1984), que no caso dessa pesquisa são as noções de geometria analítica e de sistemas de equações lineares.

Além disso, Artigue (2004) ao abordar o tema da transição entre o ensino médio e superior observa a importância de se considerar o desafio imposto pelas questões a ele associadas, identificando para tal: a massificação do ensino, a introdução das mudanças tecnológicas, o desgaste da imagem da ciência e o fato da educação, apesar de ter um valor fundamental, levar a uma concepção que a torna uma mercadoria, submetendo, assim, os sistemas educativos às regras de mercado.

Artigue (2004) salienta também que os desafios ultrapassam o tratamento matemático e didático, mas ela afirma só ter condições de tratar algumas questões sob esta ótica. Após observar que a Matemática é apresentada como um edifício bem estruturado que possibilita um desenvolvimento e uma expansão constante, a autora considera esta imagem como parcial, pois a Matemática pode ser vista também como uma cultura.

Seguindo essa reflexão, a autora cita o trabalho de Hall (1998 apud Artigue 2004) que pondera sobre a existência de três níveis na cultura matemática, a saber:

- o *nível formal* que corresponde às crenças sobre o que é a matemática, quais são suas ferramentas e os métodos que a legitimam;

- o *nível informal* que está associado aos esquemas de ação e de pensamento, às formas não explícitas de desenvolver, de pensar e raciocinar em matemática que estão associadas à experiência e à prática;

- o *nível técnico* que corresponde às técnicas institucionalizadas e às teorias, isto é, à parte explícita do conhecimento matemático.

Na sequência, Artigue (2004) avalia que as fontes que permitem compreender como funcionam essas culturas são os programas, os textos oficiais e livros didáticos. Além destes, há ainda as ferramentas de avaliação e as observações diretas de estudantes e do funcionamento das diferentes classes.

Artigue (2004) observa que existem restrições relativas aos momentos e à introdução dos conceitos que fazem com que os estudantes tenham diferentes meios para que possam experimentar e conjecturar em função das situações que lhes são propostas e das especificidades de seus cursos. Existe ainda uma diversidade de dispositivos de ensino que tornam mais difícil a estruturação dos saberes aliado com a peculiaridade de diferentes professores para o encaminhamento de cada dispositivo. A autora salienta a dificuldade enfrentada pelos professores, em função de sua formação universitária e da necessidade de conduzir um ensino pluridisciplinar.

Isso conduz Artigue (2004) a ponderar que, para os estudantes, a cultura se caracteriza pelo encontro de diversos quadros e problemas de forma superficial, o que não permite que os discentes operacionalizem, estabilizem e estruturem seus conhecimentos. Ela observa ainda que algumas práticas pedagógicas contribuem para fortalecer essas dificuldades.

A partir dessas reflexões, Gueudet (2008) faz uma síntese de pesquisas em didática da matemática sobre a transição entre ensino médio e ensino superior, estudando especialmente aquelas associadas à entrada na universidade.

Gueudet (2008) faz um estudo das pesquisas existentes por meio das categorias por ela consideradas, isto é, as quatro diferentes formas de olhar a questão da transição, a saber: o *olhar sobre o modo de pensar*, que corresponde aos saberes intrinsecamente mais complexos os quais necessitam de novos modos de pensar, o *olhar sobre a organização dos conhecimentos* que corresponde à nova organização em rede dos conhecimentos, que coloca em evidência a necessidade de fazer alusão às novas práticas de referência, o *olhar sobre a linguagem e os modos de comunicação* que corresponde a empregar uma linguagem matemática diferente, que exige novos símbolos e um novo tipo de discurso e finalmente o *olhar centrado na instituição*, observando que a matemática praticada no ensino médio é diferente daquela que será trabalhada no ensino superior.

Além disso, as abordagens associadas a essas diferentes formas de olhar a questão da transição necessitam que determinadas noções estejam disponíveis e para tanto é preciso levar em conta outros fatores, como por exemplo, culturais, condições dos diferentes sistemas educativos e expectativas em relação ao trabalho dos estudantes. Esses fatores são diferentes de uma etapa escolar a outra e propiciam novos estudos que ajudam estudantes a trabalhar com diferentes formas de pensamento.

Assim, a existência de diferentes formas de tratamento de noções matemáticas deixa evidente a importância de se considerar as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino médio que podem auxiliar o professor a determinar a maneira de abordar os conceitos e noções matemáticas em função do seu grupo de estudantes, não esquecendo de considerar os conhecimentos retrospectivos dos mesmos.

Dessa forma, esse estudo tem como objetivo analisar as relações institucionais esperadas e existentes por meio da análise de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias em função dos objetos ostensivos e não ostensivos a elas associados.

Sendo assim, a análise das tarefas é fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992,1996) e Bosch e Chevallard (1999), na abordagem teórica de Robert (1998), em termos de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, na abordagem teórica de Douady (1984, 1992), em termos de quadros e na noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001).

A análise das relações institucionais esperadas e existentes, assim como das relações pessoais que se espera ter sido desenvolvidas pelos estudantes, foi realizada considerando as noções de pontos, retas e planos para cursos de geometria analítica e sistemas de equações lineares trabalhadas no ensino médio e no ensino superior. Consideram-se aqui relações pessoais os conhecimentos disponíveis dos estudantes após terem sido submetidos ao ensino de uma noção matemática.

Ressaltamos que essa pesquisa nos auxilia, por meio das análises das relações institucionais esperadas e existentes assim como a análise das expectativas institucionais sobre a relação pessoal dos estudantes, a compreender as dificuldades enfrentadas nos cursos de introdução à Geometria Analítica e Álgebra Linear no ensino superior e assim possibilita a identificação de ações didáticas a serem propostas para superar essas dificuldades.

Referencial teórico da pesquisa

Como anunciado acima, o referencial teórico central da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1996) e Bosch e Chevallard (1999) que permite analisar as relações institucionais e os traços dessas relações sobre as possíveis relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes. Para melhor compreender os aportes dessa teoria, apresenta-se uma breve descrição das noções utilizadas nas análises.

Para Chevallard (1996), a atividade matemática, como toda atividade humana, se decompõe em certo número de tarefas. Para o cumprimento destas tarefas, são desenvolvidas técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando desta forma lugar ao desenvolvimento das tecnologias ou discurso sobre as técnicas. Estas tecnologias são objetos de outras tecnologias que Chevallard identifica como as teorias.

A importância deste tipo de análise é que ela permite identificar as técnicas matemáticas existentes para efetuar as diferentes tarefas, precisar os diferentes níveis de discurso que são suscetíveis de acompanhar estas técnicas, tanto como comentários quanto como justificativas, e explorar, eventualmente, as distinções entre tecnologias e teorias.

Além disso, do ponto de vista das representações, Chevallard enfatiza que a dimensão semiótica da atividade matemática (escritas, símbolos, palavras e gestos) não é um simples subproduto da conceituação. Para a análise desta dimensão Chevallard introduz as noções de ostensivos e não ostensivos e o princípio da existência de relações dialéticas no desenvolvimento desses objetos. Ressaltamos que os objetos ostensivos são as escritas, os símbolos, as palavras e os gestos mobilizados na atividade matemática, por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou um esquema gestual que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade, e os objetos não ostensivos são noções, conceitos, idéias que aparecem associadas às técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, conforme Bosh e Chevallard (1999).

Chevallard insiste no fato que a utilização de palavras na atividade matemática só pode ser compreendida a partir da idéia de instrumento semiótico. Para Chevallard, todo sistema de trabalho supõe a combinação de vários registros semióticos: oral, escrito e gestual.

Além da Teoria Antropológica do Didático, como mencionado acima, escolheu-se como referenciais teóricos de apoio a noção de quadro de Douady (1984, 1992), a noção de níveis de conhecimento de Robert (1997) e a noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001), pois as relações institucionais associadas às noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares podem ser diferenciadas por meio de mudanças de quadros e de pontos de vista. Essas relações institucionais permitem a escolha dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes para o desenvolvimento do objeto matemático em questão e das noções em jogo nas tarefas que podem ser desenvolvidas tanto no ensino médio como no ensino superior.

A seguir, apresenta-se uma breve descrição desses referenciais.

A noção de quadro definida por Douady (1984) evidencia a dualidade dos conceitos matemáticos que, em geral, funcionam inicialmente como ferramentas implícitas e depois ferramentas explícitas da atividade matemática antes de ter "status" de objeto e ser trabalhado como objeto do saber. A autora observa, ainda, o papel das mudanças de quadro na atividade e na produção matemática. Desta forma, Douady transpõe estas características do funcionamento do matemático ao domínio da didática, por meio das noções de dialética ferramenta objeto e jogo de quadros. (Douady, 1884, 1992).

Na realidade, a noção de quadro se fundamenta sobre o fato que um mesmo conceito pode funcionar em níveis conceituais e técnicos, e que a forma de funcionamento em cada um destes níveis apresenta características específicas. Vale ressaltar que as diferenças existentes são justamente um dos motores e ferramentas da criação matemática. Para Douady, os jogos de quadros são meios privilegiados para suscitar, ao mesmo tempo, desequilíbrios cognitivos e permitir a superação desses desequilíbrios em equilíbrios de nível superior. No desenvolvimento da geometria analítica e dos sistemas de equações lineares, necessita-se trabalhar com pelo menos dois quadros. O quadro da geometria euclidiana e o quadro algébrico por meio dos sistemas de equações lineares.

Para auxiliar na escolha dos diferentes quadros que se deseja introduzir nos ensinos médio e superior considera-se a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes introduzida por Robert (1998). São eles: o nível técnico que corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplos: Localizar pontos no sistema cartesiano ortogonal. Resolver um sistema de duas equações a duas incógnitas. O nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição ou até mesmo uma organização de saberes num certo quadro. Neste nível o conceito a ser utilizado é explicitamente pedido. Por exemplo: discutir as possibilidades de solução de um sistema de equações lineares com parâmetros em função dos mesmos. O nível disponível significa que o sujeito responde corretamente o que lhe é proposto, sem indicações. Nesse nível encontram-se os estudantes capazes de dar exemplos e contra-exemplos, mudar de quadros, fazer relações, aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece, servem de espaço de experimentação, ao fato de dispor de referências, de questionamentos e de uma organização. Por exemplo: dado um sistema de equações lineares com parâmetros determinar as possibilidades de solução e reconhecer o subespaço afim associado à solução encontrada.

A noção de ponto de vista, segundo Rogalski (1995), em notas manuscritas de um seminário de pesquisa apresentado em São Paulo, e utilizada na tese de doutoramento de Dias (1998), é definida por:

> Dois pontos de vista diferentes sobre um mesmo objeto matemático são duas maneiras diferentes de enxergá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Neste sentido, enxergar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista. Mas, podemos ter vários pontos de vista em um mesmo quadro. (Rogalsky, 1995, tradução nossa).

Isso permite considerar dois pontos de vista em geometria analítica, a saber: o ponto de vista paramétrico, que corresponde a conceber o espaço afim como a soma de uma solução particular ao espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores. O ponto de vista cartesiano que corresponde a conceber o espaço afim como o conjunto solução de um sistema não homogêneo de equações lineares. Por exemplo: Representar uma reta em IR^3 por meio de uma equação paramétrica ou por um sistema de duas equações lineares independentes.

Na seqüência, apresentam-se os objetivos e a metodologia escolhida para alcançá-los.

Objetivos da pesquisa

O objetivo central da pesquisa é estudar a transição entre o ensino médio e superior para as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares. Em particular, investigar quais conhecimentos retrospectivos sobre pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares podem ser considerados disponíveis para os estudantes do ensino médio em um curso de introdução à geometria analítica e álgebra linear no ensino superior, partindo desses conhecimentos.

Dessa forma, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as relações institucionais esperadas para o desenvolvimento das noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares para os estudantes do ensino médio;
- Verificar quais relações pessoais são consideradas como desenvolvidas pelos estudantes do ensino médio;
- Identificar as relações institucionais mais utilizadas para desenvolver as noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares em um curso de introdução à geometria analítica no ensino superior;
- Verificar se existe uma coerência entre o trabalho proposto para o ensino médio e as expectativas de continuidade no ensino superior.

Para alcançar os objetivos acima expostos propõe-se a seguinte metodologia:

- Analisar das propostas institucionais esperadas para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino médio, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineare via documentos oficiais.
- Analisar das propostas institucionais existentes para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino médio, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares via livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM).
- Analisar dos resultados do SARESP (Sistema de Avaliação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo) para as questões de geometria analítica e sistemas de equações lineares, que tratam das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares.

- Analisar das propostas institucionais existentes para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino superior, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares via livro didático.
- Comparar os resultados das análises propostas acima.

Metodologia da pesquisa

A metodologia da pesquisa segue as técnicas da pesquisa documental que segundo segundo Lüdke e André (1986) está associada à pesquisa qualitativa, pois permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Assim, a análise das relações institucionais esperadas foi desenvolvida via estudo dos documentos oficiais, ou seja, PCN para o Ensino Médio (2000), PCN+ Ensino Médio (2006) e o Currículo do Estado de São Paulo (2010) e das relações institucionais existentes via livro de Dante (2013) do PNLEM/ 2012 e caderno do professor (2011) distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo na sua rede de escolas.

A finalidade dessa análise é identificar os traços dessas relações institucionais sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio. Assim, para analisar as relações pessoais esperadas dos estudantes estudaram-se os resultados do SARESP (2005, 2007, 2008) para as questões associadas às noções matemáticas de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares.

No que se refere às relações institucionais existentes no ensino superior, foi analisado o livro didático de Geometria Analítica de Boulos e Camargo (2008), para verificar se os conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes do ensino médio estão em conformidade com os esperados para o ensino superior. A escolha dessa obra justifica-se, uma vez que esses livros são indicados nas bibliografias dos cursos de licenciatura em matemática de grande parte das universidades publicas e privadas brasileiras, conforme estudos das relações institucionais esperadas via planos de ensino para os cursos de formação inicial de professores (licenciatura em matemática) de universidades publicas e privadas.

Para comparar as relações institucionais existentes com as relações pessoais esperadas dos estudantes foi elaborada uma grade de análise para distinguir as diferentes formas de abordagem dos conteúdos estudados nessa pesquisa e identificar articulações associadas às formas de tratamento de uma tarefa.

A grade de análise

A grade de análise é uma ferramenta que permite analisar os conhecimentos retrospectivos e os novos conhecimentos das noções e conceitos asociados à geometria analítica e ao estudo dos sistemas lineares:

–em função do *panorama matemático* das noções e conceitos considerados neste estudo;

–em função das *tarefas* habitualmente desenvolvidas em um curso de introdução à geometria analítica e sistemas de equações lineares tanto no ensino médio como no ensino superior;

–em função das *variáveis dessas tarefas*. Destacam-se as variáveis associadas aos ostensivos e não ostensivos utilizados na definição da tarefa ou na sua solução.

Aplicação da grade de análise com um exemplo de seu funcionamento

A aplicação dessa grade em um *panorama matemático* em função das noções e conceitos apreciados neste estudo foi realizada considerando-se:

– O estudo da geometria analítica no plano IR^2 e no espaço IR^3 considera as noções essenciais de pontos, retas, planos e aplicações afins. A generalização da geometria analítica real está fundamentada na álgebra linear, uma das noções fundamentais da matemática devido ao seu caráter formalizador, unificador e generalizador. Na generalização utilizam-se ostensivos de representação escrita em sua forma reduzida.

– O estudo da geometria analítica euclidiana no plano IR^2 e no espaço IR^3, trata de munir IR^2 e IR^3 de seus produtos escalares usuais e dessa nova definição resultam as noções de: distância, ortogonalidade e ângulo.

– O estudo dos sistemas de equações lineares no ensino médio é centrado sobre o método do escalonamento de Gauss para a resolução de sistemas 2x2 e 3x3, em particular, para a aplicação como ferramenta para a solução de tarefas intra e extramatemática. Essa mesma abordagem é retomada no ensino superior, especialmente, para tratar as aplicações em outros domínios da matemática como, por exemplo, a geometria analítica e a álgebra linear.

Para o estudo das *tarefas* no plano IR^2 e no espaço IR^3 apresenta-se abaixo um funcionamento dessa grade sobre noções de retas e planos afim e sistemas de equações lineares:

-	Dadas uma ou mais figuras, no plano, através de seus pontos demonstrar uma de suas propriedades. (passagem de ponto para vetor);
-	Determinar a intersecção de retas, planos, retas e planos;
-	Dadas retas, planos, retas e planos através de suas representações paramétricas ou cartesianas demonstrar uma determinada propriedade;
-	Dado um ponto e um ou dois vetores dar uma representação paramétrica e uma representação cartesiana da reta ou do plano determinado pelo ponto e pelos vetores dados;
-	Dados pontos do plano que satisfazem determinadas propriedades, demonstrar uma nova propriedade.
-	Resolver um sistema de equações lineares dado.
-	Modelar problemas do cotidiano e de outras ciências por meio de um sistema de equações lineares.

Para especificar as tarefas em relação à dialética entre ostensivos e não ostensivos,considera-se as seguintes *variáveis das tarefas*.

-	o tipo ou os tipos de espaços afim dados;
-	os ostensivos e não ostensivos dos subespaços afim considerados;
-	os ostensivos e não ostensivos de pontos e vetores considerados;
-	as dimensões do espaço e dos subespaços afim considerados;
-	os pontos de vista utilizados na solução da tarefa;
-	os níveis de conhecimento implicados na solução da tarefa em função dos ostensivos e não ostensivos;
-	quadros em jogo na solução da tarefa.

Apresenta-se a seguir um exemplo de uma tarefa com suas respectivas variáveis da tarefa:

Seja P o plano definido pelo ponto A (0, 1, -2) e os vetores $\vec{u}$ (1, 0, 4) e $\vec{v}$ (0, 2, 1). Dar uma representação paramétrica de P. Dar uma representação cartesiana de P.

- <u>o tipo ou os tipos de espaços afim dados</u> : IR^3

- <u>os ostensivos e não ostensivos dos subespaços afim considerados</u>: as denominações plano, representação paramétrica, representação cartesiana, conceito de plano;
- <u>os ostensivos e não ostensivos dos pontos e vetores considerados</u>: denominação ponto e vetor, representação por meio de coordenadas e representação simbólica intrínseca, conceitos de ponto e vetor;
- <u>as dimensões do espaço e dos subespaços afim considerados</u>: 3 e 2;
- <u>os pontos de vista utilizados na solução da tarefa</u>: ponto de vista cartesiano e paramétrico;
- <u>os níveis de conhecimento implicados na solução da tarefa em função dos ostensivos e não ostensivos:</u> nível mobilizável para as representações paramétricas e cartesianas e nível disponível para determinar o vetor $\vec{AM}$ no *método 1* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano afim: $M \in P \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu$ tais que $M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. Em seguida, escrever uma representação cartesiana via a noção de determinante, isto é, det $(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Nesse caso, devemos determinar o vetor definido pelos pontos A(0, 1, -2) e M(x, y, z). Nível mobilizável para as representações paramétrica e nível disponível para a passagem de uma representação paramétrica a uma representação cartesiana para o *método 2* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano P como no método 1. Uma vez determinada uma representação paramétrica do plano, aplicamos o método de Gauss sobre o sistema encontrado que nos conduz a um sistema de equações independentes (no caso, uma equação). Esse sistema de equações independentes é uma representação cartesiana do plano P. Nível mobilizável para determinar as representações paramétrica e cartesiana e nível disponível para determinar um vetor normal ao plano no *método 3* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano P como no método 1. Nesse caso, o método para determinar uma representação cartesiana consiste em determinar um vetor normal ao plano, isto é, determinar o produto vetorial dos vetores
  $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que geram o plano. Obtemos em seguida uma representação cartesiana do plano P escrevendo que para qualquer ponto M desse plano o produto escalar $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ (devemos determinar o vetor $\vec{AM}$).
- <u>quadros em jogo na solução da tarefa</u>: quadro algébrico, vetorial, das matrizes e dos determinantes para o método 1, quadro algébrico, vetorial e dos sistemas de equações lineares para o método 2 e quadro algébrico e vetorial para o método 3.

Análise das relações institucionais esperadas encontradas nos documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para ensino médio (PCNEM e PCN+)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio é dada ênfase ao papel da linguagem da matemática enquanto instrumento de expressão e comunicação. Assim, o PCNEM e PCN+ consideram a noção de ostensivo. É possível destacar a preocupação com essa função da matemática, que consiste em considerá-la uma ferramenta de comunicação e expressão, que permite explicar os conhecimentos científicos, planejar, executar e avaliar ações de intervenção na realidade. Isto corresponde a levar em conta não somente a linguagem escrita, mas a possibilidade de utilizar a matemática para explicar o funcionamento do mundo por meio dos ostensivos orais, gestuais, visuais e táteis.

Além disso, quando se considera, mais especificamente, as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares e suas possíveis abordagens para o ensino médio constata-se que a proposta evidencia a importância da passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico, sugere a articulação entre álgebra e geometria ou ainda entre figura geométrica e equação e vice-versa. Isto coloca em evidência a necessidade de utilização de diversos ostensivos em relação aos não ostensivos que aqui podem ser consideradas as propriedades geométricas e equações e as possíveis relações entre elas. Apesar de privilegiar o ponto de vista cartesiano a proposta prevê a introdução da noção de vetor, por meio da representação gráfica, isto é, segmento orientado, e por meio da representação por coordenadas o que supõe a articulação de ostensivos orais, visuais e táteis principalmente para o espaço IR^3. Nesse caso é possível dispor de um discurso que leve em conta esses ostensivos e utilizar materiais para melhor visualizar as condições de solução dos sistemas 2x2, 2x3 e 3x3. E por meio do discurso oral é possível discutir e justificar as possibilidades de solução dos sistemas lineares articulando quadro algébrico e geométrico e pontos de vista cartesiano e paramétrico.

O Currículo do Estado de São Paulo

O currículo do Estado de São Paulo, que foi implementado a partir de 2008, coloca em evidência o fato que a matemática, assim como as outras disciplinas, deve servir de meio para a formação dos estudantes enquanto cidadãos e como pessoas, isto é, o ensino da matemática deve situar-se no desenvolvimento das competências pessoais dos estudantes. Assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, a matemática é considerada uma linguagem que permite representar a realidade. Mais especificamente, pode expressar os fenômenos das ciências naturais.

Quando se considera especificamente o quadro da geometria analítica observa-se que a nova proposta propõe o estudo das coordenadas por meio da localização em mapas e o estudo das simetrias e homotetias já no ensino fundamental e faz como recomendação que a geometria deve ser tratada de forma espiralada, isto é, os grandes temas devem ser trabalhados tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

A grade curricular específica de geometria analítica é proposta no primeiro bimestre da terceira série do Ensino Médio. Em função das noções consideradas pode-se concluir que o desenvolvimento dos conteúdos deve privilegiar o estudo de retas e curvas no plano por meio do ponto de vista cartesiano uma vez que não existe nenhuma referência ao estudo matemático da noção de vetor.

Análise de um livro didático do ensino médio, de um livro do ensino superior e do caderno do professor

O livro didático brasileiro é atualmente uma das ferramentas mais adaptadas para analisar as relações institucionais existentes para o ensino de uma determinada noção, pois são avaliados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) sob a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que segundo nosso referencial teórico corresponde à relação institucional esperada. Além disso, escolhe-se analisar o caderno do professor, pois ele permite identificar a relação institucional existente para uma determinada noção quando se considera o currículo do Estado de São Paulo.

A análise do livro didático apresentado e do caderno do professor foi estruturada em torno das seguintes questões:

- A abordagem das noções de ponto, retas e planos e sistemas de equações lineares se restringe aos espaços IR^2 e IR^3?
- Quais os pontos de vista trabalhados ensino médio e superior?
- Que ostensivos são relacionados aos pontos de vista considerados?
- Quais as articulações levadas em conta e se elas possibilitam uma mudança de quadros?
- Quais os conhecimentos retrospectivos esperados dos estudantes e qual o nível esperado para esses conhecimentos segundo definição de Robert (1998)?

– Se existe um discurso tecnológico, isto é, um discurso que acompanha as técnicas desenvolvidas nas tarefas apresentadas como exemplos para os estudantes?

Análise da obra: Matemática – Luiz Roberto Dante – 2013.

A obra de Dante (2013) foi escolhida por ter sido bem avaliada pelo PNLEM e tratar as noções matemáticas seguindo as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio de forma articulada o que pode proporcionar a participação ativa do estudante e o faz retomar seus conhecimentos retrospectivos no período em que frequenta o ensino médio.

Observa-se que o autor inicia o capítulo de geometria analítica com a noção de distância entre dois pontos no plano e considera os ostensivos de representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal utilizando a representação gráfica como recurso para visualizar o que o cálculo da distância representa geometricamente. Após definir distância e ponto médio, o autor introduz a noção de coeficiente angular de uma reta no plano articulando esse novo conhecimento com a noção de função afim suposta mobilizável para os estudantes. Isso permite trabalhar com o ponto de vista funcional (y = ax + b) para tratar o não ostensivo reta que será expresso por meio desse mesmo nome e dos ostensivos de representação dos pontos de vista cartesiano, isto é, equação geral (ax + by = c), equação segmentária ($\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$) e equação reduzida (y = mx + n).

O autor aborda apenas as noções de pontos e retas no espaço IR^2 e, consequentemente, o único ponto de vista considerado é o cartesiano. Para esse ponto de vista são trabalhados ostensivos escritos que permitem ao professor justificar as articulações consideradas com a noção de função afim. Além disso, as noções de determinante, coeficiente angular, segmentos, tangente, função afim, posições relativas de retas, ângulos, áreas, triângulo e o teorema de Tales e sistemas de duas equações e duas incógnitas são considerados disponíveis. São tratadas como conhecimentos retrospectivos disponíveis pelo autor.

A articulação entre esses conhecimentos e os novos conhecimentos é acompanhada de um discurso tecnológico e da introdução de novas técnicas para o desenvolvimento do trabalho algébrico, que já se supõe tenha sido visto por meio de construções geométricas no ensino fundamental.

Análise do caderno do professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2011)

No caderno do professor verifica-se que a abordagem proposta considera apenas o plano IR^2 e consequentemente estudo de pontos e retas no plano. Dessa forma, o ponto de vista privilegiado é o cartesiano. A articulação com a noção de função afim também é levada em conta nessa proposta.

As figuras geométricas são consideradas por meio da representação gráfica de regiões definidas por meio de inequações, isso conduz a considerar como conhecimentos prévios disponíveis as noções de função afim, equação linear, inequação linear e sistemas de equações lineares com duas incógnitas.

No caso da equação geral da reta a proposta indica que o professor deve explorá-la por meio de exercícios. Esta abordagem sugere que a forma de apresentação do conteúdo seja feita pelo professor deixando a justificativa das novas técnicas a cargo do mesmo.

Análise da obra: Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial – Paulo Boulos e Ivan de Camargo – Ensino Superior – 2008

Escolheu-se essa obra por se tratar de uma das mais utilizadas nos cursos de ciências exatas no ensino superior.

Os autores iniciam a noção de vetores por meio do espaço V^3. Definem a adição de vetores, a multiplicação de um vetor por um número real e suas propriedades, isto é, introduzem a estrutura de espaço vetorial de V^3 mesmo se não explicitam essa noção. Na seqüência tratam da soma de um vetor com um ponto e suas propriedades, da dependência e independência linear e propriedades e base de V^3 introduzindo assim a representação de um vetor por meio de suas coordenadas. Em seguida aborda a noção de mudança de base, produto escalar em que se supõe disponível ângulo entre duas retas e produto vetorial para a qual o conhecimento prévio suposto disponível é a noção de determinante de uma matriz. Na seqüência são consideradas as noções de duplo produto vetorial e produto misto e concluem o desenvolvimento das noções de geometria vetorial euclidiana em V^3 que foram apresentadas por meio dos ostensivos de representação escrita como os nomes das diferentes noções e suas propriedades. Visuais por meio do ostensivo de representação gráfica, escritos e orais por meio do ostensivo de representação intrínseca de vetor ($\vec{u}$) e por meio de suas coordenadas no espaço V^3 que necessitam de um discurso que justifique a passagem de uma representação para a outra.

O estudo da geometria analítica é considerado apenas para o espaço V^3 iniciando com a definição de sistema de coordenadas, seguido da introdução da noção de retas no espaço V^3 para a qual o ponto de vista paramétrico é privilegiado mesmo se o ponto de vista cartesiano é introduzido por meio da representação simétrica de uma reta em V^3. Sendo assim, a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico não é considerada explicitamente pelos autores.

Para a noção de planos em V^3 observa-se que os autores seguem a mesma abordagem considerada para a noção de retas em V^3, mas também consideram a noção de equação geral do plano ou representação cartesiana do plano que é trabalhada supondo disponível a noção de determinante de uma matriz o que não conduz a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

Finalmente a abordagem proposta não considera o espaço IR^2 e privilegia o ponto de vista paramétrico, sem levar em conta os conhecimentos de Geometria Analítica, que possam ter sido adquiridos no Ensino Médio.

Para a obra considerada apenas as noções de geometria e determinante de uma matriz são consideradas como conhecimentos prévios disponíveis pelos autores.

Uma breve análise das relações pessoais esperadas dos estudantes via Saresp 2005, 2007, 2008

A análise das relações pessoais esperadas dos estudantes é feita nessa pesquisa via Saresp 2005, 2007 e 2008.

Observou-se que em 2005 dava-se uma grande ênfase às questões de geometria analítica, pois se encontrou 7 questões que demandavam a distância entre dois pontos, as coordenadas do ponto médio, a área de um triângulo, a equação geral de uma reta, a verificação da pertinência de um ponto a uma reta, a passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana e a posição relativa de uma reta. É importante observar que o nível de conhecimento esperado dos estudantes variava entre o mobilizável e o disponível. O que sugere uma preocupação em verificar se os estudantes ao final do ensino médio dominavam as noções relativos a pontos e retas no plano e sistemas de equações lineares, ou seja, se as relações pessoais dos estudantes atendiam as necessidades esperadas para a aplicação em tarefas associadas a estas noções.

Em 2007 é nítido o abandono das questões de geometria analítica, pois somente 2 (duas) questões que demandavam as coordenadas de pontos no Sistema Cartesiano Ortogonal e a intersecção de duas retas são consideradas, mas o nível de conhecimento esperado dos estudantes é o disponível.

Em 2008 somente uma questão de geometria analítica é demandada e trata-se de determinar as coordenadas de pontos no sistema cartesiano ortogonal exigindo apenas o nível mobilizável.

Assim sendo as análises das avaliações 2007 e 2008 não nos permitiu verificar as possíveis relações pessoais atendiam as necessidades esperadas.

Para a noção de sistemas de equações lineares espera-se que os estudantes sejam capazes de aplicar essa noção na modelagem de problemas cotidianos e das outras ciências.

Conclusão

A análise da relação institucional esperada dos estudantes via documentos oficiais mostra que existe uma preocupação em desenvolver pelo menos para IR^2 os pontos de vista cartesiano e paramétrico no ensino médio e que os ostensivos escritos são privilegiados. Quanto aos ostensivos verbais, gestuais e táteis estes dependem mais especificamente do trabalho do professor.

Para as relações institucionais existentes observa-se que mesmo articulando as noções de geometria analítica com outras noções trabalhadas no ensino médio, em particular, com a noção de sistemas de equações lineares, não existe uma preocupação de desenvolver o ponto de vista paramétrico. Consequentemente, não se articulam os pontos de vista cartesiano e paramétrico. Esse trabalho é deixado para os cursos de geometria analítica e álgebra linear do ensino superior que para o caso da geometria analítica, em geral, são desenvolvidos apenas no espaço IR^3 sem fazer referência aos conhecimentos trabalhados no ensino médio.

Finalmente, o estudo da transição entre o ensino médio e superior, no que se refere a geometria analítica e os sistemas de equações lineares, utilizando a Teoria Antropológica do Didático, as noções de quadro, de ponto de vista e de níveis de conhecimento para analisar os documentos institucionais desta investigação, nos leva a concluir que parece existir um abandono na avaliação da geometria analítica nos últimos anos do SARESP. Isto pode eventualmente fazer com que estes conceitos sejam menos abordados no ensino da disciplina. Mesmo presente no livro didático, o ensino da geometria analítica restringindo-se ao IR^2, pode dificultar o trabalho a ser realizado com os estudantes do ensino superior, pela falta da extensão do campo conceitual IR^2 para IR^3, tanto no ensino médio como no superior.

O trabalho com IR^2 e IR^3 permitiria uma melhor visualização e compreensão das noções e técnicas associadas ao estudo da geometria analítica e sua articulação com a noção de sistemas de equações lineares que poderia facilitar a generalização para o espaço IR^n e consequentemente a introdução da álgebra linear.

Referências e bibliografía

Artigue, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?.* Acesso em 13 de setembro de 2014 de http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/liaisons/post_bac/informations/colltoulouse.pdf

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs, *Recherche en didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio* + : Ciências da Natureza e suas tecnologias**.** Acesso em 20 de abril de 2014 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Brasil. (2012). *Catálogo do programa Nacional do Livro para o Ensino Médio PNLEM/2012.* Matemática. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12(1),* 73-112.

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petitx, 42*, 33-57.

Dias, M.A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre les points de vue « cartesien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre lineaire* (Tese de Doutorado). Universidade de Paris VII. França.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de Doctorat). Université de Paris VII. França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Gueudet, G. (2008). Investigating secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237-254.

Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Rogalski, M**.** (1995). *Notas manuscritas do seminário em São Paulo*. Brasil.

Rogalski, M**.** (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Paris. França.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

São Paulo (estado). *Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas***.** Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP. São Paulo, 2005, 2007, 2008. Acesso em 20 de abril de 2014 de http://saresp.edunet.sp.gov.br/2005/>, <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/>, <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2008/

São Paulo (estado). (2011). *Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio***.** São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo

São Paulo (estado). (2010). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: Secretaria Estadual da Educação de São Paulo.

Vergnaud, G. (.1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10 (2/3)*,133-170.

Livros analisados

Boulos, P., & Camargo, I. (2008). *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. São Paulo: McGraw-Hill.

Dante, L. R. (2013). *Matemática*. São Paulo: Ática.