XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Sentido geométrico de objetos matemáticos no ostensivos que emergen en las prácticas computacionales de contexto algebraico

Larissa **Sbitneva**
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
larissa@uaem.mx
Nehemias **Moreno** Martínez
CINVESTAV
México
nehemias_moreno@live.com
Melissa **Cervantes** Badillo
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
melissa.e.cervantes@gmail.com
Rogelio **Valdez** Delgado
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
valdez@uaem.mx

Resumen

Las estrategias didácticas propuestas permiten lograr la comprensión de los conceptos fundamentales de álgebra lineal (producto vectorial, producto interno, significado geométrico de ecuación lineal en 3d), mismos que emergen como objetos matemáticos no ostensivos en el proceso de la realización de las prácticas computacionales en el contexto algebraico.

En la parte introductoria se proporciona una guía, como un recurso metodológico, para utilizar la definición y propiedades del determinante de 3×3 emergentes del proceso de solución de los sistemas lineales con tres variables, como un instrumento poderoso en aplicaciones. El aprendizaje significativo de los conceptos fundamentales del curso de Álgebra Lineal se logra a través de actividades de apoyo para evidenciar la naturaleza y significado de los objetos matemáticos. En este trabajo nos apoyamos en el marco teórico de Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Palabras clave: objetos no ostensivos, representaciones, significado.

Marco teórico: Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS)

"La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos ontológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos" (Godino, 2010 b, p. 3).

La transición desde las operaciones computacionales, hasta los objetos abstractos es larga y complicada y se desarrolla en tres etapas: interiorización (desarrollo de representaciones mentales), condensación (nacimiento del concepto) y reificación (salto cualitativo hacia el concepto).

Respecto a las consideraciones básicas de esta teoría, Sfard (1994) declara que:

"la concepción operacional (orientada por los procesos) emerge primero y que los objetos matemáticos (concepciones estructurales) se desarrollan después a través de la reificación del proceso. Hay muchas evidencias de que la reificación es difícil de adquirir" (Sfard, 1994, p. 191).

En el EOS se ha afrontado el problema de la significación y representación mediante la elaboración de una ontología matemática explicita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológico, lo que da cuenta del origen humano de la actividad matemática, sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas (Godino at al., 2007, Font at al., 2007).

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como útiles para el estudio de la cognición matemática individual.

Respecto a los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas:

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, grafica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, proposiciones, argumentaciones).

Las situaciones-problema son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficos, entre otros) representa las restantes entidades y sirve como instrumento para la acción, mientras que los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Nuestra propuesta está basada en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemática:

Lograr que el estudiante comprenda conceptos abstractos por medio del proceso de la construcción de los mismos, a través de la práctica matemática en el contexto computacional.

Esta estrategia implica el desarrollo del pensamiento geométrico (operaciones con vectores, planos y rectas, volúmenes y áreas).

Partiendo de objetos geométricos se puede dar interpretación geométrica de los objetos abstractos y lograr visualización que facilite la apropiación de los conceptos abstractos.

El modo de pensar algebraico es indispensable debido a las aplicaciones en computación, economía, medicina, finanzas sin mencionar física, mecánica, química, etc.

Prácticas discursivas respecto a las representaciones semióticas del determinante

Las investigaciones recientes pretenden sentar las bases para el estudio de razonamiento algebraico dentro del modelo operativo. Es un retorno a lo básico con el enfoque a resolución de problemas para lograr el aprendizaje significativo de contenidos y lograr el desarrollo del pensamiento algebraico.

En la parte introductoria se realizan prácticas discursivas con base en la guía teórica proporcionada a cada participante, como un recurso metodológico, para utilizar la definición y propiedades de determinante 3×3, obtenidos en el proceso de solución de los sistemas lineales respecto a tres variables, como un instrumento poderoso en aplicaciones. También se proporciona un cuestionario para autoevaluación de las competencias adquiridas.

Objetivo: Lograr que los participantes comprendan conceptos abstractos por medio del proceso de la construcción de los mismos a través de la práctica matemática en el contexto computacional.

La estrategia didáctica está apoyada en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, la cual sugiere que el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos puede ser logrado a través de las prácticas en las que a partir de la organización de ciertos objetos matemáticos primarios y la realización de algunos procesos cognitivos emergen otros objetos matemáticos más complejos.

Para un sistema lineal de 3×3 dado
$$\begin{aligned} xa + yb + zc &= d \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= d_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= d_2 \end{aligned}$$

se obtiene la forma más simple de la primera ecuación:

$$\left(a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) z = (T)$$ (véase Apéndice).

Así, podemos llamar el determinante de 3×3 al coeficiente frente a z, y denotarlo con un símbolo que a su vez se representa por un registro semiótico complejo, el que a la vez codifica la regla de cálculo

$$\Delta_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Así la ecuación toma la forma $\Delta_{3\times 3} z = \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$,

de donde uno puede obtener la solución única para la incógnita z, siempre y cuando el determinante no sea cero.

Significado geométrico de la ecuación lineal 3d

Debido a que partiendo de objetos geométricos se puede dar interpretación geométrica de los objetos abstractos y lograr visualización que facilite la apropiación de los conceptos, nuestra estrategia implica el desarrollo del pensamiento geométrico (operaciones con vectores, planos y rectas, volúmenes y áreas).

Representaciones equivalentes de una ecuación lineal con tres incógnitas

Situación-Problema: ¿Cuál es el significado geométrico de la ecuación lineal

$Ax + By + Cz + D = 0$?

Primero vamos a obtener representaciones equivalentes a través de manipulaciones algebraicas según las reglas operativas.

Supongamos que hay tres ternas de valores, ($x_1, y_{1,}, z_1$), ($x_2, y_{2,}, z_2$), ($x_3, y_{3,}, z_3$), que satisfacen esta ecuación, es decir, al sustituir los valores numéricos de esas ternas en la ecuación dada, esta se convierte en la identidad.

Como resultado de sustitución, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas respecto a los coeficientes A, B, C (en el proceso de prácticas discursivas se aclaran las condiciones que deben satisfacer los valores numéricos de las ternas)

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 = -D$$

Entonces se puede usar las fórmulas de Cramer para las incógnitas *A, B, C* (véase Apéndice) y obtener:

(*) $\Delta_A x + \Delta_B y + \Delta_C z + \Delta D = 0$,

donde el símbolo Δ_A representa el determinante $\begin{vmatrix} -D & y_1 & z_1 \\ -D & y_2 & z_2 \\ -D & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ el cual se puede transformar en $\begin{vmatrix} -D & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = -Dw_1$, utilizando las propiedades de determinantes (véase Apéndice A).

El símbolo w_1 representa el determinante de 2×2 de la tabla de los elementos obtenidos al quitar la fila y columna que contienen al elemento D, es decir, el $Det\begin{pmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$.

El procedimiento análogo se realiza para representar los símbolos Δ_B y Δ_C, $\Delta_B = Dw_2$ y $\Delta_C = -D\, w_3$. Donde w_2 y w_3 son los determinante 2×2 de las tablas correspondientes a los elementos obtenidos al quitar la fila y columna que contienen al elemento D.

Para el determinante del sistema tenemos $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Realizamos las siguientes transformaciones que no lo cambien de acuerdo con las propiedades del determinante: restamos de los elementos del segundo renglón, los elementos correspondientes del primer renglón, del mismo modo los restamos del tercer renglón, y luego aplicamos la regla de desarrollo del determinante por los elementos del primer renglón de acuerdo con la definición del determinante de 3×3.

El resultado se puede expresar en la forma resumida utilizando notaciones para los determinantes de 2×2 correspondientes:

$$\Delta = x_1\, w_1 - y_1\, w_2 + z_1\, w_3 \cdot$$

Con lo cual la ecuación (*) se transforma (si $D \neq 0$) en

(**) $w_1\ (x - x_1) + (-w_2)(y - y_1) + w_3\,(z - z_1) = 0$.

En esta expresión reconocemos la ley de cálculo del determinante de 3×3, dado que cada símbolo w_i representa un determinante de 2×2, donde $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$ son elementos que forman el primer renglón.

Entonces el resultado de nuestra exploración de la ecuación lineal se presenta utilizando el determinante de 3×3

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente tanto a la ecuación (**) como a la (*).

Todas las representaciones son equivalentes a la ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$, con tres soluciones dadas: $(x_1, y_{1,}, z_1)$, $(x_2, y_{2,}, z_2)$, $(x_3, y_{3,}, z_3)$.

La solución única respecto a A, B, C se garantiza por la condición que el determinante del sistema no es cero: ¿Cuál es el sentido geométrico que expresa esta condición?

Interpretación geométrica y significados de las diferentes representaciones y símbolos

Si asumimos que cada terna representa las coordenadas cartesianas de los puntos M, K y L; entonces todas las representaciones son ecuaciones del plano que pasa por estos tres puntos, los cuales lo determinan de manera única, en concordancia con nuestra intuición geométrica.

¿Cómo se puede averiguar?

Necesitamos dar sentido geométrico a los símbolos w_i y a la expresión

(**) $w_1\ (x - x_1)\ + (-w_2)(y - y_1) + w_3\ (z - z_1) = 0$.

Vamos a dar interpretaciones geométricas de los registros semióticos de objetos emergentes y significado de los símbolos.

Consideramos las ternas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) como coordenadas cartesianas de los puntos K, M, L, respectivamente. Entonces las ternas

$x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1$
$x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ \ z_3 - z_1$

representan las coordenadas correspondientes de los vectores $\boldsymbol{KL}$ y $\boldsymbol{KM}$. Denotamos ahora como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{KL}$, con coordenadas u_1, u_2, u_3, y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{KM}$, con coordenadas v_1, v_2, v_3.

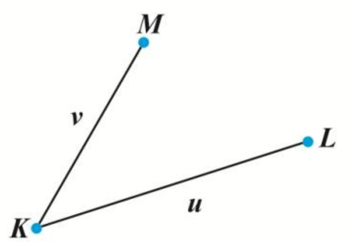

Figura 1. Vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Así el vector $\boldsymbol{w}$ tiene coordenadas

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

y lo llamamos producto vectorial.

Prácticas discursivas: ortogonalidad. En el caso 2d tenemos $|\boldsymbol{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$, $|\boldsymbol{b}|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2$ y si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ entonces $|\boldsymbol{c}|^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$.

Si además tenemos que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, se cumple el teorema de Pitágoras; lo que nos sugiere ver la expresión $(a_1 b_1 + a_2 b_2) = 0$ como la condición de ortogonalidad, expresada analíticamente a través de las coordenadas de los vectores.

Así podemos interpretar la ecuación (**) como ortogonalidad de los vectores $\boldsymbol{KP}$ y $\boldsymbol{w}$, donde $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ es un punto arbitrario, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (**) y la ecuación (*). Y en general, la expresión algebraica de la izquierda, en (**), es llamada producto interno (o escalar) de los vectores $\boldsymbol{KP}$ y $\boldsymbol{w}$.

Nuestra intuición geométrica y experiencia visual nos permite deducir que los puntos $\boldsymbol{P}$ forman un plano.

Para percibir otras propiedades del vector $\boldsymbol{w}$, notamos que se verifica

$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$

$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$

Es decir, $\boldsymbol{w}$ es ortogonal a $\boldsymbol{KL}$ y a $\boldsymbol{KM}$.

Mediante otros ejercicios computacionales, podemos obtener que $|\boldsymbol{w}|$ es el área del paralelogramo formado con los vectores $\boldsymbol{KL}$ y $\boldsymbol{KM}$, y que al valor absoluto del determinante se puede dar el sentido geométrico como el volumen, entre otras interpretaciones.

Agradecimientos:

Nuestro trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de la investigación PICA14 con un apoyo de Secretaría de Investigación UAEM a través de la Dirección General de Desarrollo de la Investigación.

Referencias y bibliografía

Godino, J., (2010 b). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.*

Departamento de Didáctica de la Matemática. *Universidad de Granada*, Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C., (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemátiques*, *14*(3), 325-355

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. Alderete, & M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp.1—20). Mendoza, Argentina: Universidad de Cuyo. Versión ampliada del artículo en *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), pp.2-7.

Sfard, A., (1994) The gains and pitfalls of reification, the case of algebra*. Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 191-228

Apéndice A

Una guía como asesoría teórica.

Introducción a exploración para desarrollar el eje *Extensivo – Intensivo* en EOS.

Motivación: trayectorias emocionales. Evidenciar la naturaleza de objetos matemáticos.

Los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos llegaron los primeros métodos del pensamiento lineal.

Un problema publicado en 152 a.C.

“Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos gavillas de segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidos en una gavilla de cada clase?”

Los sistemas de este tipo surgen en gran cantidad de problemas de aplicaciones en física, biología, química, ingeniería, estadística, economía, finanzas, psicología y sociología, teoría de códigos, etc..

Nivel Extensivo. Para un sistema lineal de 3×3 tenemos:

$$\begin{aligned} xa + yb + zc &= d \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= d_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= d_2 \end{aligned}$$

Si aplicamos el método de eliminación de variables: (o las fórmulas de Cramer para las incógnitas x y y) en las últimas dos ecuaciones, obtenemos las expresiones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}}{\Delta}, \text{ donde } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Al sustituirlas en la primera ecuación obtenemos: $\left(a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) z = (T)$

donde T denota el término libre. Para facilitar los cálculos es indispensable usar las propiedades del determinante de 2×2 que se verifican directamente $\begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 \\ c & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}$.

Así, podemos llamar el determinante de 3×3 al coeficiente frente a z, y denotarlo con un símbolo que a su vez se representa por un registro semiótico complejo, el que a la vez codifica la regla de cálculo:

$$\Delta_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Entonces la ecuación se puede escribir como $\Delta_{3\times 3} z = a\begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$, y reagrupando los términos en la parte derecha, obtenemos la ecuación en la forma

$$\Delta_{3\times 3}z = \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Y así obtenemos las fórmulas de Cramer $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Nivel Intensivo. Ejercicio para generalización de los resultados.

Si uno sigue la técnica de reducción al caso de la dimensión anterior, se puede obtener para el caso de $n = 4$ la regla de cálculo del valor numérico asignado a la tabla de los coeficientes del sistema $\sum_{i=1}^{i=n} a_{ki}x^i = b_k, k = 1,...,n$, que se puede explicar como el procedimiento siguiente:

- nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando a_{ij} por el determinante de la tablita de 3×3 obtenida al eliminar el primer renglón y la *j*-ésima columna,
- después sumamos todos estos términos, pero alternando los signos positivo y negativo: negativo antes de a_{12} y a_{14} .

Propiedades de determinantes. Como resultado de unos ejercicios divertidos se encuentran varias propiedades, que son inmediatas de las definiciones.

(a) Al intercambiar dos renglones, o dos columnas, el signo del determinante se cambia. Y en consecuencia:
(a´) Si una matriz tiene dos renglones (o dos columnas) iguales, el determinante es cero.
(b) Se puede sacar un factor común a cualquier renglón o columna de una matriz y los determinantes se relacionan de una manera algebraica de factorización.

(c) Si a un renglón (o columna) le sumamos otro renglón (o, respectivamente, columna), no se cambia el valor del determinante.

d) $\begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 \\ c & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}$.

Esta propiedad se cumple para el determinante de 3×3,

det $\left(a^{\uparrow}, b_1^{\uparrow} + b_2^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right)$ =det$\left(a^{\uparrow}, b_1^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right)$ +det $\left(a^{\uparrow}, b_2^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right)$,

donde el símbolo $u^{\uparrow} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ denota las entradas de una columna de un determinante de 3×3.

Y en general, se cumple para determinantes de $n \times n$, lo que uno puede comprobar por la inducción utilizando una de las dos definiciones para determinantes que se encuentran en los libros, mismas que uno puede concebir por su propia cuenta.

Como una aplicación de las propiedades, en el cuestionario se propone una actividad lúdica con el determinante de $n \times n$ llamado circulante, del cual se puede obtener todos los números de Fibonacci.