



Concepções de função de estudantes do Ensino Médio e Superior

Rogério Fernando **Pires**
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Brasil

rfpires25@hotmail.com

Benedito Antonio da **Silva**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Brasil

benedito@pucsp.br

Resumo

O presente artigo é resultado de um estudo mais amplo que teve por objetivo identificar as concepções de função manifestadas por estudantes do Ensino Médio e Superior, e a partir delas desvelar algumas peculiaridades envolvidas no processo de aprendizagem desse conceito; tendo como fundamentação teórica as ideias de Sfard e Sierpinska. A pesquisa de caráter qualitativo, contou com a participação de 128 estudantes de duas escolas públicas de Ensino Médio e uma universidade pública localizadas no interior do estado de São Paulo. Os dados foram coletados por meio de duas listas de atividades que foram realizadas por todos os participantes em dois momentos distintos. Os resultados mostraram que no Ensino Médio as concepções transitavam entre a operacional e a estrutural, sendo muito presente a concepção pseudoestrutural, e no Ensino Superior as concepções eram bem próximas da estrutural, porém, não foi possível identificar a reificação do conceito.

Palavras chave: função, concepções de função, aprendizagem, obstáculos epistemológicos, ensino médio e superior.

Introdução

O conceito de função é um tema amplamente debatido no âmbito da Educação Matemática, as questões relacionadas ao ensino e a aprendizagem dessa noção frequentemente motivam a realização de pesquisas na área.

Uma das explicações para o grande volume de produções a respeito da temática pode residir no fato de que mesmo sendo um assunto bastante discutido, os fenômenos inerentes ao ensino e a aprendizagem da noção de função apresentam características intrínsecas que contribuem para a constituição de um vasto campo de exploração, do qual vários aspectos já foram desvelados, porém ainda existe muita coisa a ser investigada.

Nessa perspectiva, o presente estudo procurou trazer a tona algumas particularidades relacionadas a aprendizagem da noção de função que são reveladas por meio das concepções desse conceito que são apresentadas por estudantes dos ensinos Médio (alunos de 15 a 17 anos) e Superior, considerando que a concepção que o indivíduo apresenta sobre um objeto matemático tem relação estreita com o nível e profundidade do conhecimento que o sujeito carrega consigo sobre o assunto em questão.

No Brasil, documentos que orientam a atuação do professor como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), sugerem que o trabalho com as noções preeliminares de função tenha seu início nos anos finais do Ensino Fundamental e as orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+, 2000) enfatizam que nesse nível de escolaridade, tal assunto deve ser explorado com mais intensidade e profundidade, devido a importância e a riqueza do tema no próprio Ensino Médio e para o prosseguimento dos estudos em nível Superior. Entretanto, apesar de toda a atenção dada ao assunto na Educação Básica brasileira, relatórios de macroavaliações como a do Sistema de Avaliação de Rendimento escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 2010) e da Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEBC, 2009) mostram que os estudantes concluintes do Ensino Médio apresentam déficits no aprendizado quando o assunto em questão são as noções de função.

Diante desse panorama, a intenção dessa pesquisa foi trazer a tona alguns elementos que possam auxiliar no entendimento de como certas concepções apresentadas por estudantes estão relacionadas com o seu fazer Matemática e com o nível de entendimento apresentado por esses sujeitos no que se refere ao objeto função.

Fundamentação teórica

As dificuldades apresentadas pelos estudantes com a noção de função, tem sido foco de diversos estudos relacionados ao ensino e a aprendizagem de Matemática. Estudiosos como Sierpinska (1992) e Sfard (1992) ressaltam isso e enfatizam que na maioria das vezes eles não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam funções, tais como: $f(x)$, $x \mapsto y$, $sen(x + t)$, etc. Contudo, fazer tais relações e manipular tais símbolos não é tarefa simples, pois o que gerencia essas ações é o processo de compreensão que se trata de algo um tanto quanto complexo.

De acordo com Sfard (1992), os objetos matemáticos são vistos como algo inquestionável, pronto e acabado e é dessa maneira que as noções de um objeto matemático são apresentadas aos estudantes. Contudo, logo após essa introdução, espera-se que eles manipulem o novo objeto com a naturalidade de alguém que olha para ele como algo real que faça parte de sua vida. No entanto, muitos estudantes não são capazes de desenvolver essa habilidade, e não conseguem olhar e manipular os objetos matemáticos com tanta naturalidade. Basta olhar para o longo e dificultoso processo de nascimento de um objeto matemático para entender que o processo de

compreensão é permeado de caminhos sinuosos e cheio de obstáculos. Então, a gênese do objeto pode ajudar a desvelar algumas das origens das dificuldades apresentada pelos estudantes.

Nessa direção, Sierpinska evidenciou dezesseis obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de função e dezenove ações importantes para a compreensão da noção desse mesmo objeto. Porém, para efeito desse trabalho, foram selecionados apenas quatro obstáculos e cinco ações. Quanto aos obstáculos epistemológicos, foram considerados os seguintes:

- 1) Identificação dos sujeitos da mudança ao identificar a mudança. Trata-se de um obstáculo relacionado ao fenômeno de transformação, que apresenta estreita relação com a noção de função, uma vez que transformação pode ser considerada pelo estudante como sendo um dos significados de função.
- 2) Uma heterogeneia concepção de número. Outro fato que está relacionado à noção de função é o uso de letras na álgebra, assumindo o papel de número ou grandeza abstrata. Essa abstração não evidencia a distinção entre números discretos e grandezas contínuas. Na resolução de um problema, por exemplo, usamos algumas letras para denotar números ou grandezas contínuas, e essa distinção desaparece no momento em que manipulamos as equações. Durante essa manipulação, a letra assume papel de variável, a equação traduz uma relação quantitativa e, em algumas situações, a variável passa a ter domínio numérico.
- 3) Forte crença no poder das operações formais em expressões algébricas.
- 4) Apenas relações descritas por fórmulas analíticas (registros algébricos) são dignas de receber o nome de função.

Segundo a autora, nos séculos XVII e XVIII os matemáticos, na procura de meios para descrever relações, já haviam acumulado uma larga experiência com a diversidade dos resultados encontrados até aquele momento, e os mais bem-sucedidos eram aqueles obtidos por meio da relação de expressões analíticas. Assim, as ferramentas algébricas para descrever relações se tornam mais importantes do que as próprias relações.

Com relação as ações, as cinco que foram consideradas neste estudo são as seguintes:

- 1) Discriminação entre dois modos de pensamento matemático: Um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, outro em termos de quantidades variáveis e constantes. Os papéis desempenhados pelas variáveis x e y no contexto funcional não são simétricos, por isso a importância de saber identificar a variável dependente e a independente, pois elas não desempenham o mesmo papel e uma não pode assumir o lugar da outra em uma relação funcional. Essa assimetria entre as variáveis, segundo Sierpinska, leva a segunda ação de compreensão.
- 2) Discriminação entre a variável independente e a variável dependente.
- 3) Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas (algébricas) usadas para descrever essas leis. Essa ação de compreensão tem um papel fundamental no entendimento do conceito de função, uma vez que uma relação funcional não está diretamente ligada a uma representação algébrica de tal relação.
- 4) Discriminação entre definições matemáticas e descrição de objetos. A discriminação entre definição de um objeto e a descrição dele é fundamental para o processo de compreensão, pois isso ajuda a entender o verdadeiro sentido das definições, que não é descrever objetos,

e sim determinar o objeto por ela definido. Isso faz com que o indivíduo desenvolva um poder de síntese, levando-o a uma concepção geral do objeto.

5) Discriminação entre os diferentes meios de representação de funções e as próprias funções.

Isso remete a uma discussão feita por Duval (2011) sobre a importância de não se confundir o objeto de conhecimento com a sua representação. A não distinção entre a representação e o objeto impede a compreensão do conceito.

Além das ações importantes para a compreensão da noção de função e dos obstáculos epistemológicos relacionados a esse conceito, também está em jogo o que Sfard (1992) chama de dualidade ontológica das concepções matemáticas. Ela destaca que normalmente um novo conceito é introduzido a partir de outro já conhecido pelos estudantes e cita como exemplo a introdução dos números complexos que comumente é apresentado como um par ordenado (x, y) de números reais.

Essa abordagem que utiliza um conceito já conhecido como ponto de partida para chegar em outro, a autora chama de abordagem estrutural, na qual os conceitos que são familiares aos estudantes são tidos como os tijolos da construção de uma casa que vão se encaixando visando o produto final que é a casa. Na Matemática esses conceitos vão sendo utilizados visando o surgimento de um novo conceito, todavia, esse tipo de abordagem não possibilita um posicionamento crítico do aprendiz, uma vez que o ponto de partida normalmente é um conceito já conhecido e é tido como algo pronto e acabado, e o objetivo dessa abordagem é a combinação de estruturas visando um produto final, como na construção de uma casa que muitas vezes não há preocupação com o processo de edificação.

A autora ainda destaca que esse tipo de concepção estrutural parece prevalecer entre os matemáticos modernos, não sendo aceitas definições que admitam abordagens bastante diferentes, como a operacional, em que uma noção é concebida como um processo operacional e não como uma construção estática. Esse tipo de dualidade é muito frequente no tratamento de função, que em alguns casos descreve processos computacionais e em outros, relações estáticas.

Ao se referir a concepção operacional e estrutural, a autora está se reportando às crenças implícitas dos alunos sobre a natureza das construções matemáticas, e não à suas habilidades e competências, e ainda afirma que há a existência de uma concepção inferior a estrutural, a pseudoestrutural, que se manifesta quando o indivíduo descreve função como uma fórmula computacional, ao associar tal objeto a uma expressão algébrica.

Diante desse fato, pode-se questionar se não é natural associar função a uma expressão algébrica, haja vista que historicamente isso também aconteceu com Euler. No entanto, há uma grande diferença entre o conceito pseudoestrutural e o que aconteceu historicamente. Euler associava função a duas entidades distintas, as expressões analíticas e as curvas e sempre que possível procurava estabelecer uma relação entre elas. Já os estudantes têm uma forte tendência em associar função a uma expressão algébrica, mas o mesmo não acontece com mesma intensidade com os gráficos, e muitas vezes não vêem relação entre as duas representações.

Assim, as ideias aqui apresentadas procuraram evidenciar alguns aspectos envolvidos no processo de compreensão da noção de função que vão desde as concepções do sujeito até obstáculos relacionados a gênese do conhecimento (obstáculos epistemológicos).

Metodologia

O estudo de cunho qualitativo contou com a participação de 128 estudantes, sendo 73 alunos da primeira e terceira série do Ensino Médio de duas escolas públicas (instituição A e B) localizadas no interior do estado de São Paulo e 55 estudantes do Ensino Superior que cursavam o primeiro semestre dos cursos de licenciatura em Matemática, Física, Química e Biologia em uma universidade pública (instituição S) também localizada no interior de São Paulo.

Esses estudantes compuseram oito grupos, o GEM1A e o GEM3A – (Grupo de Estudantes da 1ª e 3ª série respectivamente do Ensino Médio da instituição A), o GEM1B e GEM3B – (formado por estudantes da 1ª e 3ª série do Ensino Médio da instituição B), o GESM, GESF, GESQ e GESB – (constituídos por alunos dos cursos em licenciatura em Matemática, Física, Química e Biologia da instituição S).

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de duas listas de atividades contendo treze tarefas cada uma, relacionadas as noções de função que foram realizada pelos alunos em momentos distintos. A primeira lista denominada teste I foi apresentada aos estudantes do Ensino Médio de ambas as instituições no início do ano letivo, momento em que eles ainda não tinham estudado tal assunto na escola aquele ano. Já os estudantes do Ensino Superior tiveram contato com o teste I na primeira semana de aula do curso, pois durante o semestre cursaram uma disciplina chamada Fundamentos de Matemática Elementar 1, na qual tiveram contato com a noção de função.

A segunda lista que recebeu o nome de teste II continha as mesmas tarefas do teste I, porém organizadas em disposição diferente daquela apresentada no primeiro teste. Os alunos dos cursos de licenciatura realizaram o teste II no final do primeiro semestre, ou seja, por volta de quatro meses após a realização do teste I, já os do Ensino Médio desenvolveram a mesma lista de atividades oito meses após terem realizado o teste I, o que assegurava que todos os sujeitos já tivessem contato com a noção de função em suas respectivas instituições naquele período de tempo.

Quanto as atividades que compuseram os testes, para efeito de formatação desse relato, algumas serão apresentadas no momento discussão dos resultados. Contudo, vale frisar que as doze primeiras versavam sobre as funções afim e quadrática e envolviam no enunciado ou na realização as representações algébrica, gráfica, tabular ou em língua natural desses dois tipos de função. E a décima terceira era um questionamento, no qual foi perguntado para o estudante “qual é o significado de função?”; com essa pergunta o intuito era trazer a tona algumas concepções de função que eles explicitavam.

Análise e discussão dos resultados

Os resultados aqui apresentados e discutidos tratam de uma síntese da análise realizada na pesquisa, na tentativa de evidenciar os principais resultados obtidos. Nesse sentido, para efeito desse relatório foram destacadas algumas atividades que trouxeram resultados considerados mais significativos. Os dados aqui presentes ilustram os principais achados que foram recorrentes em todos os grupos.

Inicialmente destaca-se que foi possível notar que no testes I nas atividades realizadas pelos estudantes da 1ª série do Ensino Médio de ambas as instituições (A e B) que prevaleceu o que Sfard chama de aspectos computacionais, fato que permitiu que muitos alunos tivessem sucesso na realização de atividades como a representada pela figura a seguir.

Atividade 09: Um técnico em informática cobra R\$ 26,00 por hora de serviço mais um valor fixo de R\$ 14,60 de taxa de visita. Nessas condições, qual será o valor cobrado pela manutenção da rede de computadores de uma empresa que demorou 12 horas e 15 minutos para ser concluída?

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

Resposta: R\$ 333,10

Figura 1. Atividade realizada no teste I por um estudante do GEM1A.

Essa predominância de procedimentos puramente computacionais foi observada em grande parte dos estudantes tanto do GEM1A, quanto do GEM1B no teste I (momento em que eles ainda não haviam tido contato com a noção de função na escola) o que lhes garantiu sucesso na realização da tarefa. Contudo, no teste II para desenvolver a mesma atividade começam a fazer uso de procedimentos algébricos, conforme é possível observar na seguinte ilustração.

Atividade 10: Um técnico em informática cobra R\$ 26,00 por hora de serviço mais um valor fixo de R\$ 14,60 de taxa de visita. Nessas condições, qual será o valor cobrado pela manutenção da rede de computadores de uma empresa que demorou 12 horas e 15 minutos para ser concluída?

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

Resposta: R\$ 203,39

Figura 2. Atividade realizada no teste II por um estudante do GEM1B.

A figura ilustra um fato que foi bastante recorrente nos dois grupos da 1ª série. No teste II momento em que os alunos já haviam estudando função, eles passaram a utilizar artifícios algébricos para realizar a mesma atividade que no teste I utilizavam procedimentos puramente aritméticos, e surpreendentemente eles passaram a apresentar erros no tratamento algébrico no teste II.

Uma explicação para esse fenômeno possa estar em um dos obstáculos epistemológicos elencados por Sierpínska, que é a crença no poder das operações formais em expressões algébricas, pois antes de terem um contato formal com a noção de função de função, os estudantes realizavam a atividade em questão sem muitos problemas fazendo uso de procedimentos aritméticos. Porém, no teste II após o contato com a noção de função, eles começaram a usar expressões algébricas na excussão da tarefa, o que leva a entender que para eles, o emprego de tais elementos algébricos seria a garantia de sucesso na execução da tarefa, no entanto, o desempenho apresentado mostra o contrário, revelando resultados incorretos.

Ainda no GEM1A e GEM1B, no teste I quando foi perguntado qual o significado de função poucos alunos tentaram responder algo, a grande maioria dizia não saber. Já no teste II, foi possível observar a predominância da concepção pseudoestrutural, associando o objeto matemático a uma expressão algébrica, cálculos, etc., conforme mostra a figura.

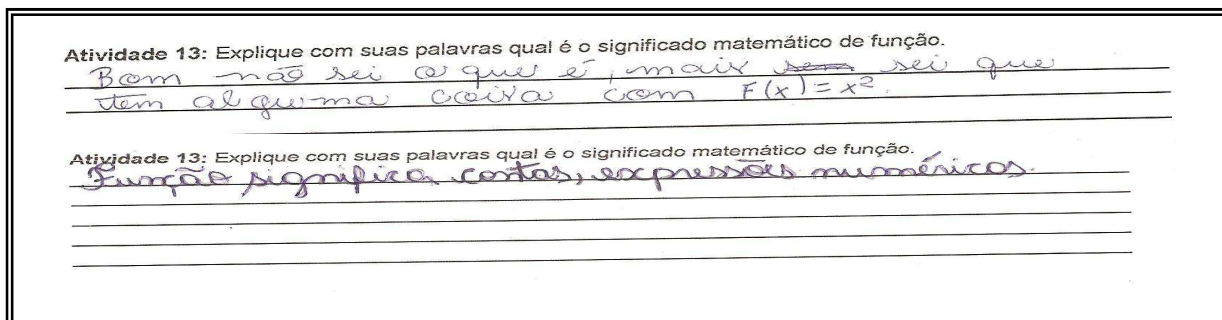


Figura 3. Atividade realizada no teste II por um estudante do GEM1A e outro do GEM1B.

Pela figura, é possível notar que na segunda etapa da pesquisa, momento em que os estudantes tinham trabalhado com a noção de função em suas instituições, eles passaram a associar ao objeto Matemático uma de suas representações, o que segundo Sfard é indicio de uma concepção pseudoestrutural, que é inferior a concepção estrutural e pode trazer consequências não tão boas para o aprendizado, uma vez que se corre o risco do estudante não associar o objeto à suas diferentes representações.

Ainda quanto ao entendimento de função explicitado pelos estudantes na décima terceira atividade, os alunos da terceira série no teste I mostraram um entendimento diferente daquele observado nos estudantes da primeira série o que é ilustrado na figura.

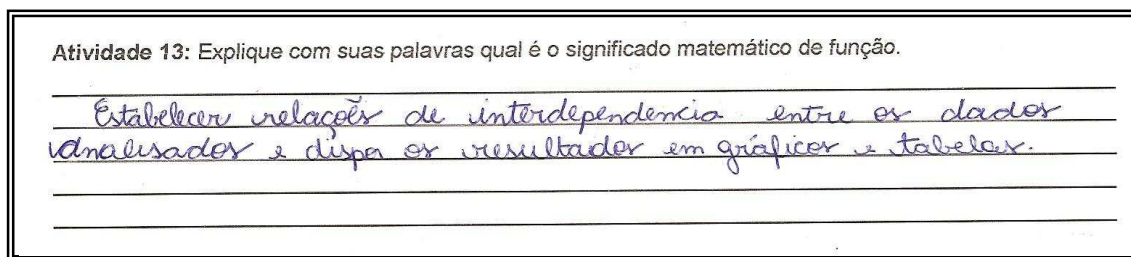


Figura 4. Atividade realizada no teste I por um estudante do GEM3A.

Nessas turmas foi possível observar a predominância do entendimento de função como sendo uma relação, ficando mais próximo de uma concepção estrutural, porém suas respostas ainda apresentavam aspectos da concepção pseudoestrutural. Assim, foi possível inferir que as concepções apresentadas por esses sujeitos estavam em uma fase de transição da pseudoestrutural para a estrutural. Contudo, no teste II não foi possível notar uma evolução nas concepções apresentada por eles, pois suas respostas para essa atividade permaneceram quase que as mesmas.

No ensino superior, com as mesmas atividades foi possível evidenciar outros aspectos que não sobressaíram nas respostas dadas pelos estudantes do Ensino Médio. Um exemplo disso pôde ser observado na atividade 03 ilustrada pela seguinte figura.

Atividade 03: Seu Juca pretende construir um campo de futebol para seus netos, para tanto, dispõe de 100 metros lineares de tela para fechar o campo. Para ter um melhor aproveitamento da tela, ele decidiu fazer o cercado encostado na parede de sua casa, como mostra a figura a seguir.

parede

x x

$100-2x$

Nessas condições, preencha a tabela abaixo.

Largura do cercado	5 m	7,8 m	12 m	25 m	30 m	x m
Comprimento do cercado	90	84,4	76	50	40	$100-2x$
Área do cercado	450	638,32	912	1250	1200	$x(100-2x)$

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

5m) $x=5$
 comprimento $\Rightarrow 100-2x = 90$ m
 Área $\Rightarrow 90 \times 5 = 450$

7,8m) $x=7,8$
 comprimento $\Rightarrow 100-2 \times 7,8 = 84,4$ m
 Área $\Rightarrow 84,4 \times 7,8 = 658,32$

12m) $x=12$
 comprimento $\Rightarrow 100-2 \times 12 = 76$ m
 Área $\Rightarrow 12 \times 76 = 912$ m

25m) $x=25$
 comprimento $\Rightarrow 100-2 \times 25 = 50$
 Área $\Rightarrow 50 \times 25 = 1250$

30m) $x=30$
 comprimento $\Rightarrow 100-2 \times 30 = 40$
 Área $\Rightarrow 40 \times 30 = 1200$

$x \times x$
 comprimento $\Rightarrow 100-2x = P(x)$
 Área $\Rightarrow x \cdot P(x) = A$

Analise a tabela que acabou de preencher e, escreva algebricamente a relação existente entre a área, largura e o comprimento do cercado e, explique com suas palavras como é essa relação.

Área $A(x) = P(x) \cdot x$ sendo $P(x) = 100-2x$ sendo o comprimento e x sendo a largura. Área $A(x)$ é dependente uma da outra onde a largura é independente e o resto dependente dela.

Atividade 03: Seu Juca pretende construir um campo de futebol para seus netos, para tanto, dispõe de 100 metros lineares de tela para fechar o campo. Para ter um melhor aproveitamento da tela, ele decidiu fazer o cercado encostado na parede de sua casa, como mostra a figura a seguir.

parede

x x

$100-2x$

Nessas condições, preencha a tabela abaixo.

Largura do cercado	5 m	7,8 m	12 m	25 m	30 m	x m
Comprimento do cercado	90	84,4	76	50	40	$100-2x$
Área do cercado	450	638,32	912	1250	1200	$100x - 2x^2$

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

90 84,4
 15,6
 $100-2x = 90$ $100x - 2x^2$

Analise a tabela que acabou de preencher e, escreva algebricamente a relação existente entre a área, a largura e o comprimento do cercado e, explique com suas palavras como é essa relação.

o comprimento é constante enquanto a largura e em função de x .

Figura 5. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESM e outro do GESF respectivamente.

O primeiro protocolo é um exemplo do que mais se repetiu nos dois grupos nessa atividade, e o outro ocorreu com menos frequência. Observando o que foi apresentado na primeira situação presente na figura, é possível perceber que ao explicar como acontece a relação entre o comprimento, a largura e a área do cercado, o estudante reconhece que o comprimento depende da largura e a área está em função dessas duas dimensões, e, além disso, ele demonstra entender que a largura assume o papel de variável independente e o comprimento e a área de variáveis dependentes, pois ao alterar a largura, o comprimento e a área também se alteram. Isso mostra que grande parte dos estudantes desses dois grupos fizeram uso de uma das ações necessárias para a compreensão da noção de função que segundo Sierpinska é a discriminação entre a variável dependente e a independente. Saber identificar e discriminar esse dois elementos da relação funcional é fundamental, principalmente quando se olha função como uma transformação, pois somente essa discriminação é que dará ao indivíduo condições de saber qual foi a transformação e o que causou essa transformação.

Com relação ao segundo protocolo, o que chamou a atenção foi o fato de o estudante ao explicar como era a relação entre a largura, o comprimento e a área do cercado, ter dito que o comprimento era constante e a largura estava em função de x . Diante disso, é possível notar que ele não percebe que o comprimento varia em função da largura e conseqüentemente a área também varia. Isso, segundo Sierpinska, se constitui em um dos obstáculos para a compreensão da noção de função, reconhecer a transformação, mas não reconhecer o que e quem realiza tal transformação.

Do grupo dos estudantes do curso de Licenciatura em Física, foi possível extrair um protocolo que representa um erro bastante recorrente com os estudantes do Ensino Superior, que está ilustrado pelo protocolo da figura a seguir.

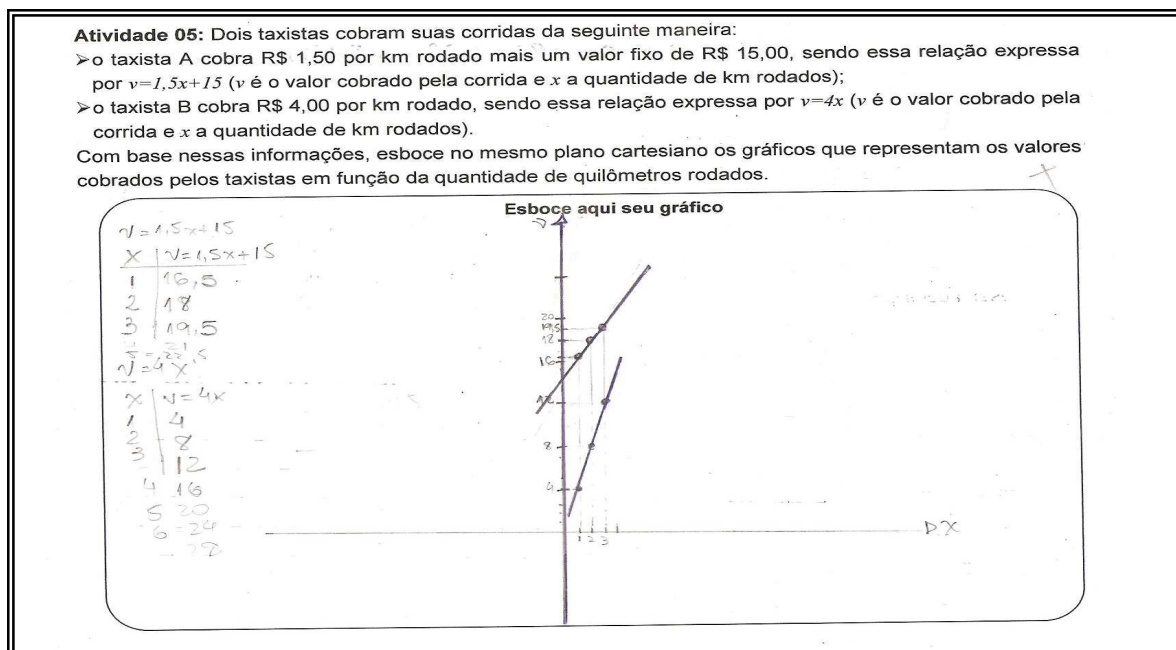


Figura 6. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESF.

No teste I, os estudantes do Ensino Superior, e principalmente aqueles dos cursos de Química e Biologia responderam que a partir do sétimo quilômetro seria mais vantajoso viajar com o taxista A. Uma possível explicação para isso pode estar no fato de que para a construção dos gráficos, eles utilizaram apenas valores inteiros no eixo das abscissas, isso pode ter feito com que eles não atentassem para o fato de que o domínio das funções é $\mathbb{R} > 0$, o que acarreta que entre dois valores inteiros do domínio há infinitos outros valores, ou seja, para qualquer valor maior que 6 no domínio, não sendo necessariamente 7, a quantidade de quilômetros que está associada ao valor cobrado pelo taxista A será menor que o valor praticado pelo taxista B, quando percorridas distâncias iguais. Esse fato possivelmente esteja ligado a outro obstáculo epistemológico elencado por Sierpinska que está relacionado com a noção de número, pois muitas vezes o uso da letra na álgebra assumindo o papel de número ou grandeza abstrata faz com que a abstração não deixe evidente a distinção entre números discretos e grandezas contínuas.

Quanto ao entendimento de função explicitado pelos alunos do Ensino Superior, a princípio o que chamou a atenção foram as resposta dadas pelos alunos do GESM e do GESF no teste I, cujas respostas mais recorrentes podem ser observadas na figura a seguir.

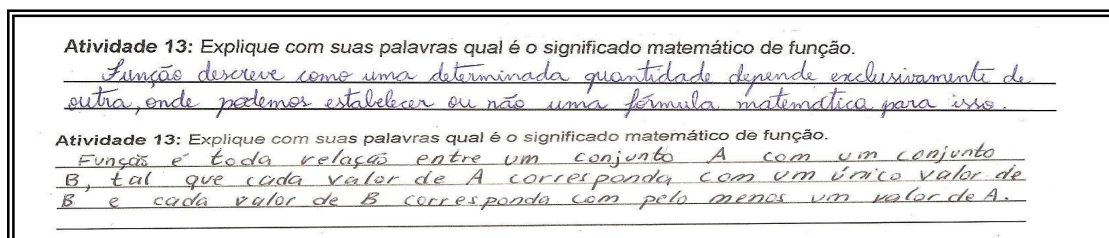


Figura 7. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESM e outro do GESF respectivamente.

O entendimento expressado pelo primeiro estudante foi o que mais se repetiu em ambos os grupos. Observando o protocolo é possível notar que o aluno entende que função é uma relação de dependência entre quantidades. Apesar de restringir essa relação a apenas quantidades, ressalta que essa relação pode ser ou não expressa por uma fórmula matemática, que indica que tal relação pode ter uma regularidade ou não. Assim, deixa explícito que reconhece função como uma relação, mesmo não sendo possível observar uma regularidade, o que caracteriza, de acordo com Sfard, um entendimento que aponta para uma concepção estrutural.

Já o que expôs o segundo estudante aconteceu com menos intensidade nos dois grupos. Apesar de conceber função como uma relação, ele explicita essa relação entre elementos de dois conjuntos, o que também aponta para uma concepção estrutural como a que foi evidenciada no entendimento expresso no primeiro protocolo. Vale ressaltar que ambos os entendimentos comentados indicam semelhanças com a definição apresentada por Dirichlet no sentido de não levar em consideração a presença de uma expressão analítica, e ainda, a última parte explicitada no protocolo do segundo estudante somente é verdadeira no caso de a função ser sobrejetora.

No GESQ e no GESB foram encontradas concepções diferentes daquelas explicitadas no GESM e GESF. Um exemplo pode ser observado na seguinte figura.

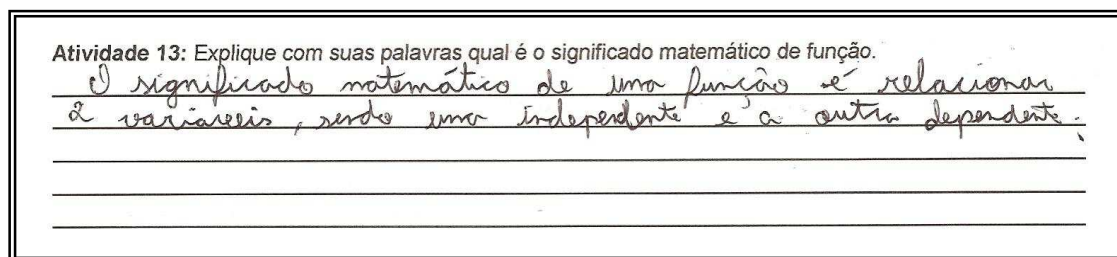


Figura 8. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESQ.

Esse tipo de entendimento expressado por um estudante do GESQ, também foi bastante recorrente no GESB. Pelo exposto pelo aluno, é possível perceber que ele e outros pertencentes aos dois grupos entendiam função como uma relação, seja ela entre grandezas, como mostra a figura, bem como entre números ou elementos de dois conjuntos, enfatizando a dependência entre as variáveis como também foi evidenciado em outras respostas. Essa maneira expressa pelos alunos de entender função aponta para uma concepção estrutural.

Destaca-se que no teste II em todos os grupos do Ensino Superior não foram observadas alterações nas concepções apresentadas pelos estudantes.

Ao concluir a análise das estratégias empregadas pelos estudantes na realização das atividades e examinar o que eles disseram na décima terceira em ambos os testes, em suma, é relevante destacar que nos grupos do Ensino Médio foi evidenciada uma predominância das concepções operacional e pseudoestrutural, sendo possível observar em alguns momentos a transição de uma concepção para outra e o aparecimento de alguns aspectos relacionados a concepção estrutural comparando os dois testes. Já no Ensino Superior a situação foi um pouco diferente; houve uma predominância de uma concepção que aponta para a estrutural nos dois testes, porém não foi possível observar se esses sujeitos chegaram à reificação do conceito, uma vez que sem ela, segundo Sfard, o processo é puramente operacional, e que isso é algo demorado que não acontece em um curto espaço de tempo, podendo levar anos e às vezes, dependendo do conceito, não acontece.

Ainda segundo Sfard, a predominância da concepção operacional sobre a estrutural normalmente acontece com os estudantes, porque eles vêem função como um processo, e não como um objeto permanente.

Considerações finais

A realização dessa pesquisa permitiu que ao final da análise do material coletado fosse feita uma reflexão a respeito dos aspectos desvelados que estão envolvidos no processo de compreensão da noção de função. Isso permitiu entender que a aprendizagem de um conceito matemático envolve além das noções relacionadas a tal conceito, muitas vezes elementos que remetem a gênese do conhecimento em questão (obstáculos epistemológicos) e também, sofre interferência da maneira como o indivíduo concebe o objeto matemático.

Identificar as concepções de um sujeito a respeito de um objeto matemático, permite entender um pouco do dinamismo envolvido na aprendizagem, como também pode ajudar a explicar a recorrência de alguns erros. Contudo, identificar uma concepção e classificá-la não foi tarefa simples, pois muitos indivíduos, e principalmente aqueles em que a compreensão de função estava em processo de construção, mostraram estar passando por uma fase de transição da operacional para a estrutural, e, como toda transição cognitiva, o encadeamento não segue uma única direção. Isso dificultou determinar com certeza se a concepção de função que o indivíduo apresentava era operacional ou estrutural.

Partindo dessa perspectiva, a concepção operacional foi facilmente identificada e mais frequente em boa parte dos estudantes, e principalmente naqueles provenientes do Ensino Médio, no teste I. No entanto, a evolução apresentada por eles no teste II, em especial daqueles do Ensino Superior, culminou em um tipo de concepção que trazia em seu bojo aspectos da concepção estrutural. Todavia, para se chegar à tal concepção, a evolução do conceito no indivíduo deve passar por três estágios: a interiorização, a condensação e a reificação, sendo este último indispensável para uma concepção estrutural, pois, se não existir a reificação, todo processo é puramente operacional. Assim, nos estudantes do Ensino Médio foi possível notar no teste II um tipo de concepção intermediária que estava entre a operacional e a estrutural, a pseudoestrutural. Já nos estudantes do Ensino Superior a classificação do tipo de concepção não foi tão simples, pois a consistência de algumas respostas apontava para a concepção estrutural, porém, em virtude de certas limitações dos instrumentos de coleta, não foi possível identificar se esses sujeitos atingiram ou não a reificação.

Quanto às concepções operacional e pseudoestrutural, vale ressaltar que, enquanto a primeira é saudável no processo de ensino e aprendizagem, sendo indispensável para dar respostas a questões matemáticas, a segunda, não, pois ela limita a compreensão, podendo ser prejudicial para o processo, porém de certa forma ela é quase inevitável quando se faz uma abordagem estrutural.

Diante dos resultados, foi possível vislumbrar que ainda existem muitos aspectos a serem explorados a respeito das concepções de estudantes no que se refere ao conceito de função. No que tange à essa investigação, a abrangência do estudo merece destaque, no sentido de contemplar tanto o Ensino Médio quanto o Superior, todavia a quantidade de informações coletadas fez com que algumas dificuldades surgissem no momento da interpretação delas. Assim, uma adequação dos instrumentos de coleta, diminuindo o número de atividades realizadas pelos estudantes, propondo questões mais abertas e permitindo que eles expressem seu raciocínio de maneira mais espontânea, poderia fornecer dados mais esclarecedores acerca dos

estágios das concepções apresentadas. Entrevistas com alguns alunos poderiam ajudar a desvelar outros aspectos, como a reificação.

No que se refere a pesquisas futuras, um trabalho no Ensino Médio e Superior a longo prazo, como por exemplo, o acompanhamento de uma mesma turma ao longo de todo o Ensino Médio poderia fornecer dados bastante significativos a respeito do processo de aprendizagem e da forma como vão se manifestando as concepções dos estudantes, visando a construção do conceito.

Por fim, vale salientar que as análises e as reflexões realizadas ao longo deste estudo, bem como os apontamentos feitos no decorrer das considerações finais, se constituem em interpretações possíveis nos limites desta pesquisa. Assim, mesmo acreditando nos argumentos e achados que foram explicitados aqui, existe a necessidade de vislumbrar os resultados alcançados com certa criticidade, devido ao caráter desta pesquisa, uma vez que outros estudos podem ser realizados e trazer elementos que ampliem ou até mesmo consolidem as ideias aqui defendidas.

Referências e bibliografia

- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação* (Tradução de Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Talmo Mourinho Baptista). Porto: Porto Editora.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. (2000). *PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEMTEC.
- Brasil. Ministério da Educação. (2009). *Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: Matrizes de referência, tópicos descritores*. Brasília: MEC/SAEB/Inep.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar os registros de representação semiótica* (Tradução de Marlene Alves Dias). São Paulo: Proem.
- São Paulo. (2010). *Relatório pedagógico 2009 SARESP: Matemática*. São Paulo: SEE.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy*. MMA notes 25 (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy*. MMA notes 25 (pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.