Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal[1]

Ofelia **Angulo** Vallejo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ofeliava@gmail.com

Resumen

Este informe se basa en los resultados del proyecto enfocado en caracterizar la articulación de situaciones problemáticas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante el desarrollo de una Unidad didáctica, para el grado 9° de la Institución Educativa (IE) Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo[2]. Se fundamentó en una propuesta de Análisis Didáctico enfocado principalmente en un contexto curricular, un análisis de contenido (Modelación, Análisis Fenomenológico, Estructura Conceptual y Sistemas de Representación) y un análisis de instrucción. Esta Unidad Didáctica está conformada por 5 situaciones problémicas que parten de la variación y el cambio hasta la conceptualización de la función lineal. La implementación y análisis de los resultados de esta propuesta muestran que los estudiantes se apropian de conceptos relacionados con la función lineal de manera significativa y valida algunas dificultades reportadas por la investigación en didáctica del álgebra relacionadas con el paso de lo contextual a la generalización.

Palabras clave: análisis didáctico, unidad didáctica, función lineal, función afín, situaciones problématicas, modelación matemática.

Planteamiento del problema y antecedentes

[1] Trabajo de grado dirigido por Ligia Amparo Torre (Mg), profesora del área de educación matemática del instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle (Cali, Colombia).
[2] Municipio ubicado en el Departamento del Valle del Cauca – Colombia.

La reconocida problemática presentada en la escuela sobre la falta de consideración del contexto sociocultural e institucional en el cual se desarrolla la actividad matemática particularmente en el campo algebraico, se debe a la forma como tradicionalmente se imparte la educación en el aula, en donde, según Freudenthal (1983), se presenta una situación que él denominó "*Inversión Antididáctica*" la cual consiste en comenzar por los conceptos y no por la actividad matemática, enfoque contrario a su propuesta de Fenomenología didáctica que toma los fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas que precisan ser organizados y los interpreta a través de conceptos matemáticos que son los medios de organización a partir de los cuales se enseña al estudiante a manipular el concepto involucrado.

Freudenthal, matemático holandés, referenciado por Puig (1997), establece que el principal objetivo de la acción educativa es la construcción de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos, y que la actividad matemática está determinada por la imagen mental que el alumno elabora sobre la naturaleza de las matemáticas; por tanto cuando se inicia el proceso por los conceptos y no por las situaciones problemáticas que son las que dan sentido al aprendizaje, sólo ocurre la enseñanza de unas matemáticas descontextualizadas, que no articula las situaciones del entorno cotidiano de los estudiantes, con los contenidos escolares y por tanto no resulta ser significativa, ni útil ni favorece el aprendizaje.

Por otra parte, la tendencia curricular internacional y nacional para el siglo XXI en tanto formación matemática, enfatiza en aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, enfocados en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles, puesto que mediante el aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes no sólo deben desarrollar su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, deben adquirir un conjunto de instrumentos que les permitan explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla.

Pasando al contexto de la institución educativa Policarpa Salavarrieta, se reconoce la problemática en cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y el álgebra, por otro lado la modalidad agroindustrial que imparte la institución, proporciona unas situaciones en el marco de los proyectos productivos agroindustriales que constituyen un ambiente propicio para articular estas situaciones problemáticas de proyectos productivos agroindustriales y las matemáticas. Por lo tanto, se adelantó entre el 2012 y 2013 un proyecto que planteó el siguiente interrogante: ¿Cómo caracterizar la articulación de situaciones problemáticas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante una propuesta de Unidad didáctica para el grado 9° de la IE Policarpa Salavarrieta?

Marco teórico de referencia

Este trabajo de inscribe en el campo de las matemáticas entendida como lo expresa Rico (1997) es decir, una disciplina científica que se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos; tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático y propone actuaciones para sus transformación basadas en sus propios fundamentos teóricos. A su vez, se inscribe dentro de la propuesta del grupo de investigación denominado Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social; estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas; de este referente se tomó la propuesta de Análisis didáctico como marco teórico y metodológico que guió este proyecto.

En este marco de referencia se asume que el conocimiento producido al interior de la Didáctica de las Matemáticas, denominado *conocimiento didáctico,* proporciona los elementos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; estos elementos son reconocidos como *organizadores del currículo de matemáticas* y según Rico (1997) son aquellos conocimientos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. La articulación y concreción de estos conocimientos didácticos conforman el *Análisis Didáctico* que es un proceso cíclico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas e identificar las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. Este *Análisis Didáctico* se basa en cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación.

El **Análisis de contenido** es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares; el **Análisis cognitivo** es una reflexión e indagación acerca de por qué, cómo y cuáles dificultades, obstáculos y errores se presentan con mayor frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes al abordar el estudio de un contenido matemático particular; el **Análisis de instrucción** se refiere a una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que orientan la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y los procesos de evaluación y el **Análisis de Actuación** que le permite al profesor determinar las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

El *Análisis Didáctico* culmina con la elaboración de una Unidad didáctica que es un documento donde el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que fueron objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período determinado de tiempo y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según criterios principalmente conceptuales; esta Unidad didáctica debe estar dirigida a un grupo concreto de alumnos y referirse a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto sociocultural determinado. Esta propuesta se complementa con el Análisis del Contexto curricular en el cual se propone el trabajo de aula.

En relación con estas consideraciones, se puede establecer que el propósito de este proyecto fue diseñar, planificar y desarrollar una Unidad didáctica como propuesta curricular, que para su diseño requirió seleccionar y secuenciar un conjunto de conceptos y procedimientos sobre tópicos matemáticos relacionados con la función lineal, además incorporar otras informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen; para efectos prácticos de su desarrollo, se dio relevancia al Análisis de contenido, sin desconocer los aspectos de los otros análisis.

Este Análisis de contenido comprende aspectos relacionados con la estructura conceptual de la función lineal, sus sistemas de representación, la fenomenología y la modelación matemática donde se analizaron las tendencias actuales principales sobre esta temática y los principios de la Educación Matemática Realista (EMR); el Análisis curricular aunque no aparece dentro de la estructura del Análisis Didáctico, se tuvo en cuenta en tanto que el currículo constituye una herramienta básica para el trabajo del profesor de matemáticas de secundaria, válida para la planificación y desarrollo de unidades didácticas.

De otra parte el Análisis de instrucción que comprende el diseño propiamente de la Unidad didáctica se realizó a partir del diseño de situaciones problemáticas formuladas en el contexto de los proyectos productivos agroindustriales seleccionados; el Análisis cognitivo se realizó a partir de las principales dificultades, obstáculos y errores que presentaron los estudiantes al desarrollar las diversas tareas que conforman la unidad didáctica y finalmente el Análisis de actuación se desarrolló durante la etapa de evaluación de los resultados, permitiendo determinar las capacidades que los escolares desarrollaron durante el proceso.

Respecto a la EMR que es una teoría holandesa la cual reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal y nace como respuesta a la necesidad, percibida en todo el mundo, de reformar la enseñanza de las matemáticas (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004) y es coherente con los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM), establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Bajo este enfoque los estudiantes son considerados participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar en el contexto social del aula (Freudenthal, 1983), es decir deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos porque les permiten organizar esta disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma. Esta actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma Freudenthal (1973), la llamó Matematización y la describió como un proceso dinámico donde las matemáticas se adaptan a la realidad de los estudiantes, lo que implica considerar herramientas matemáticas para organizar y resolver un problema de la vida diaria e igualmente también implica representar todo tipo de re-organizaciones y operaciones hechas por los estudiantes dentro del sistema matemático en sí.

Freudenthal (1983) complementa este concepto con lo que Treffers (1987) llama matematización progresiva, que se refiere al proceso mediante el cual los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática. Estas consideraciones permitieron describir las dos categorías de matematización de la siguiente manera:

Matematización Horizontal: se refiere a ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, en otras palabras consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. Mediante este proceso matemático, los estudiantes (con ayuda del docente) logran hacer una modelación particular de la situación problema, en gran parte de los casos, trasladando el problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, mediante métodos informales o pre-formales a diferentes niveles de abstracción. Este proceso se pone de relieve en actividades que buscan comprender la situación problema, como son: la identificación o descripción de la matemática que es relevante en la situación en cuestión, la esquematización, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista, y aún en el instante en que se hallan semejanzas con otros problemas.

La Matematización Vertical: significa moverse dentro del mundo de los símbolos, dentro de la matemática misma, lo cual promueve estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática. En otros términos se refiere a la elevación del pensamiento abstracto, propiciando la reorganización de las ideas (alcanzadas en el nivel anterior) dentro del mismo sistema matemático (Bressan & Gallego, 2011). Son ejemplo de matematización vertical, la representación de una relación como una fórmula, la prueba de regularidades, la generalización y la combinación de diversos modelos matemáticos.

En importante tener en cuenta que en el componente horizontal se desarrollan unos modelos descriptivos que gradualmente van evolucionando en modelos prospectivos, llevando la matematización horizontal a la matematización vertical al impulsar y elevar los niveles de comprensión; en este proceso, conocido como matematización progresiva, la EMR identifica que un estudiante puede pasar del conocimiento informal, al preformal y de allí al formal, mediante distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas, asociadas al uso de diferentes estrategias y modelos, pese a que no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada.

Diseño metodológico

La metodología asumida por este proyecto fue de carácter descriptivo pues permitió identificar características del universo en cuestión, descubrir y comprobar las posibles asociaciones de las variables de investigación (Méndez, 1992). La pertinencia de este tipo de investigación para el propósito del proyecto se valida por cuanto se requiere identificar variables que permiten caracterizar y analizar los elementos organizadores de un Análisis Didáctico y posteriormente articularlos para el diseño de la Unidad didáctica. En este sentido, este proyecto se adelantó siguiendo tres fases:

La primera fase se inició con la revisión y análisis del Contexto curricular que se abordó desde tres perspectivas: Internacional, Nacional e Institucional; continuó con el Análisis de contenido que comprende aspectos relacionados con la Estructura conceptual de la función lineal, sus Sistemas de representación, la Fenomenología y la Modelación matemática donde se analizaron las principales tendencias sobre esta temática y los principios de la EMR. Posteriormente se identificaron las situaciones problemáticas a partir del análisis del contexto agroindustrial lo cual permitió continuar con el Análisis de instrucción donde se realizó el diseño de la Unidad didáctica conformada por cinco situaciones problemáticas que partieron de la variación y el cambio hasta la conceptualización de la función lineal. Estas cinco situaciones son: Preparación de la mezcla para pandebonos y la relación uno a uno entre magnitudes, Preparación de la mezcla para pandebonos y expresiones algebraicas, Comercializando pandebonos y la función lineal, Costos fijos y la función afín y Reconociendo el modelo de función constante. En el Anexo 1 se puede apreciar el esquema general de esta Unidad didáctica.

La segunda fase correspondió a la implementación de la Unidad didáctica llevada a cabo con una muestra de 10 estudiantes con el propósito de evaluar su pertinencia mediante la tipificación de las respuestas y su análisis e interpretación posterior.

La fase final, o tercera fase, correspondió a la concreción de las conclusiones generales que generalizan el aprendizaje y dificultades de los estudiantes durante el proceso de implementación y finamente las reflexiones didácticas que aportan consideraciones direccionadas a los docentes tanto en ejercicio como en proceso de formación y al mejoramiento de la Unidad didáctica.

Con relación al contenido matemático específico, esta Unidad didáctica se diseñó sobre la función lineal, considerando que esta puede ser modelada mediante la articulación de los conceptos matemáticos involucrados dentro de ella con los proyectos productivos agroindustriales, para ello se analizaron las características de la relación entre las variables involucradas en las situaciones diseñadas y el tipo de variación determinada por dicho modelo funcional. La selección de la función y la variación como objetos de análisis obedece a la importancia que los LCM confieren a estos tópicos, es relevante además el interés del docente en diseñar situaciones problemáticas que promovieran en los estudiantes, el desarrollo del pensamiento variacional y algebraico.

En cuanto al diseño de la Unidad didáctica como tal, son cinco situaciones, cada una conformada por tareas y cada tarea por una serie de preguntas; cada situación tiene un nombre particular relacionado con las tareas a realizar y plantea unos objetivos en términos de propósitos o capacidades a desarrollar en los estudiantes y una descripción de la situación a resolver. Dado que es conveniente aclarar estos términos, se menciona que *situación* es equivalente a situación problemática, que para efectos práctico del proyecto se redujo el nombre, y corresponde al conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento aportan al aprendizaje de los estudiantes (MEN, 2006); por *tareas* al conjunto de actividades generadas a partir de una situación problemática que movilizan un saber determinado y por *preguntas* a aquellos interrogantes estructurados a raíz de una tarea específica y pueden ser de dos clases: cognitivos que implican la realización de un procedimiento explícito para obtener un resultado y metacognitivos que se refieren a aquellas tareas que impulsan al estudiante a realizar asociaciones, inferencias, visualizar patrones y regularidades antes de expresar sus respuestas.

Es oportuno hacer la aclaración que el diseño de la Unidad didáctica implicó, para efectos prácticos de la modelación, asumir que algunas variables permanecerían fijas, específicamente en aquellas situaciones que involucran costo; esto no significa desconocimiento de la complejidad del mundo real donde los modelos económicos no corresponden a un modelo lineal, dada las diversas variables externas que intervienen tales como los clientes potenciales o la competencia. Es por esta razón que en algunas situaciones de esta Unidad didáctica, se fijan una serie de variables o se incluyen en categorías como costo fijo, aunque cobijen cantidades variables; con esto se muestra que a pesar de la utilización de un contexto cotidiano para los estudiantes, fue necesario realizar un proceso de idealización que permitió modelar en términos matemáticos, las situaciones problemáticas del contexto.

Un ejemplo de tarea y respuestas de la Unidad didáctica

Situación 3 (S3): Comercializando pandebonos y la función lineal

El costo de producción de 350 pandebonos, fabricados por los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta, en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011, teniendo en cuenta el costo de las materias primas, del transporte y de las bolsas para empaques, fue de $108.500 y el precio de venta de cada pandebono es de $500. A partir de esta información desarrolle las siguientes tareas:

Tarea 1(T1): **Relación entre representaciones tabular y algebraica**

Pregunta 1(P1): Encuentre el costo de producción de un pandebono según el valor de producción de 350 unidades y explique cómo obtuvo este valor.

Tabla 1

S3T1P1

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	%
Tipo 1: estudiantes que dividen el costo de 108.500 entre los 350 pandebonos y obtienen un costo unitario de $ 310	8	80
Tipo 2: estudiantes que no responden la pregunta	2	20

P2: Encuentre la diferencia entre el costo de producción y el precio de venta de un pandebono. ¿Qué nombre se le puede dar a este valor?

Tabla 2

S3T1P2

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	%
Tipo 1: estudiantes que realizan la operación solicitada y expresan que este valor se llama ganancia y algunos complementan diciendo que es la ganancia por cada pandebono vendido	7	70
Tipo 2: estudiantes que no responden la pregunta	2	20
Tipo 3: estudiantes que no identifican el concepto diferencia como una operación matemática sino como una comparación para obtener resultados	1	10

P3: Encuentre la ganancia al comercializar 350 pandebonos y explique cómo obtuvo este valor.

Tabla 3

S3T1P3

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	%
Tipo 1: estudiantes que multiplican el precio de venta por los 350 pandebonos que se van a producir y a este valor le descuentan el costo de producción de $108.500; adicionalmente explican el procedimiento realizado, obteniendo un resultado correcto.	4	40
Tipo 2: estudiantes que multiplican la ganancia de un pandebono ($190) por el número de pandebonos a producir (350 unidades), también obtienen un resultado correcto.	4	40
Tipo 3: estudiantes que no responden la pregunta	2	20

Los resultados de la Tabla 1 permiten observar que la mayoría de los estudiantes (80%) pueden calcular un costo unitario a partir de un costo total, lo que significa que interpretan que el costo total de una producción está determinado por el costo unitario y el número de unidades producidas, en este caso el número de pandebonos; y dado que manejan el proceso de inversión de la multiplicación pueden calcular el costo unitario cuando conocen el costo total. Se observa además que un 20% de estudiantes no responden la pregunta.

Los resultados de la Tabla 2 muestran que el 70% de los estudiantes expresan que la diferencia obtenida es la ganancia, un 20% no responden la pregunta y un 10% (1 estudiante) no interpreta el término diferencia como una operación matemática sino como una comparación entre dos elementos. Estos resultados indican que el primer grupo de estudiantes (70%)

reconocen el término ganancia como aquellos ingresos que quedan después de descontar al precio de venta, el costo de producción.

En la Tabla 3 se resumen los resultados de la P3, que averigua sobre la ganancia para un número específico de pandebonos, 350; en ella se observa que un 80% de los estudiantes encuentran la respuesta correcta, la mitad de ellos utilizando un método y la otra mitad por medio de otro método. El primer grupo calcula los ingresos de los 350 pandebonos, multiplicando el precio de venta por las unidades a comercializar en este caso 350, luego a estos ingresos le descuenta el costo de producción de dicho número de unidades ($108.500), así calcula la ganancia de los 350 pandebonos. El segundo grupo utiliza la ganancia de cada pandebono y lo multiplica por 350 y así haya el valor solicitado. En los dos casos obtienen el mismo resultado, indicando con ello que para resolver algunas situaciones problémicas existen diferentes caminos o procedimientos lo cual indica comprensión relacionando el contexto, asimilación del concepto de ganancia, apropiación de la situación que se va enriqueciendo con nuevos elementos construidos mediante el desarrollo de las tareas antes realizadas, este proceso de construcción de aprendizaje simula un proceso en espiral que en cada recorrido va integrando nuevos elementos que complementan y/o validan la comprensión de la situación. No se puede desconocer al 20% que en forma recurrente no responde la pregunta, pues con ello se está mostrando que no han comprendido la situación a pesar de ser un contexto cercano a ellos.

Discusión de resultados

En cuanto a los resultados se observó que:

En primer lugar la mayoría de los estudiantes determinaron las magnitudes involucradas en las situaciones (número de pandebonos y cantidad en gramos ya sea de queso costeño o areparina), explicaron las relaciones entre estas magnitudes al reconocer que al aumentar o disminuir el número de pandebonos también aumentaba o disminuía la cantidad de gramos de queso costeño o areparina, es decir explicitaron una relación de dependencia entre dos magnitudes que varían, de modo que cambios en una de ellas genera cambios en la otra; construyendo y completando el registro tabular solicitado, completando el diagrama sagital y argumentando respuestas asociadas con la correspondencia entre magnitudes.

De igual forma un alto porcentaje de estudiantes lograron a: (a) la identificación de la cantidad de gramos de queso costeño y de almidón agrio requeridos para fabricar un pandebono, lo cual permite la identificación de la razón de cambio como un valor constante que representa la variación de una variable respecto a la otra, (b) el reconocimiento e interpretación de este valor dentro de una expresión algebraica, aprendizaje del procedimiento para calcularlo, manipulación de este valor para determinar el valor de una variable o de otra dependiendo de unos valores conocidos. Estos aspectos aparte de afianzar el reconocimiento de la relación funcional, muestran el desarrollo del pensamiento variacional, que se manifiesta cuando los estudiantes detectan las variables que cambian y el comportamiento de este cambio, es decir la variación involucrada dentro de una situación que luego representan a través de expresiones algebraicas y (c) la expresión de la relación funcional mediante diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico y algebraico y la traducción de un sistema de representación en otro; a propósito se reconoce el tabular como un sistema clave en tanto favorece la visualización de las magnitudes en juego y su comportamiento, sea que estas varíen o alguna de ellas permanezca constante; esto se presentó en las situaciones, cuando fue preciso construir una tabla y en otros donde se requería completarla.

Respecto a las gráficas, los estudiantes tuvieron oportunidad de construirlas, leerlas e interpretarlas y en cada una de estos casos se expresa la dependencia entre dos variables mediante la correspondencia punto a punto y se construye la idea de variación de una función la cual se manifiesta en conceptos relacionados con la función lineal, tales como la razón de cambio. Es preciso aclarar que hacer lecturas de la gráfica, implica identificar las variables que se representan en cada uno de los ejes e identificar una coordenada de un punto (desconocida) a partir de la otra coordenada (conocida), es decir hallar el valor de una variable a partir de un valor conocido de la otra variable; mientras que la interpretación de la gráfica está asociada a la describir la función representada.

Se logra que los estudiantes realizaran la construcción de tablas y los gráficos lineales mediante Excel y la confrontación ante las dificultades técnicas que presenta este software para las lecturas precisas de las coordenadas de un punto.

Es conveniente resaltar el manejo de la mayoría de los estudiantes de los diferentes sistemas de representación y la transformación de un sistema en otro, lo que afianza la conceptualización sobre la relación funcional ya que cada uno de los sistemas de representación permite expresar un fenómeno de variación o una dependencia entre variables; un ejemplo de la visualización de este enfoque se presenta cuando los estudiantes logran completar una tabla pues con ello muestran el reconocimiento de una regularidad, de un patrón de comportamiento que en forma intuitiva no es más que la identificación de un modelo y el manejo implícito de una expresión algebraica, y al argumentar sus procedimientos para obtener la respuesta están potencializando procesos de pensamiento tales como el razonamiento y la comunicación, de igual manera se promueven procesos de pensamientos numéricos y en especial el variacional que se desarrolla mediante la identificación de fenómenos de variación y sobre el razonamiento algebraico.

Conclusiones

Con los resultados anteriores se muestra el reconocimiento por parte de los estudiantes del modelo que subyace a la variación, equivalente a abstraer la regla de dependencia entre las dos variables, especialmente si pasan a una expresión algebraica lo cual implica un conocimiento del lenguaje algebraico y del hecho que una fórmula de dos variables representa una función (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Desde la perspectiva de modelación se evidenció una movilización de elementos desde el nivel situacional de *matematización horizontal* hacia la *matematización vertical, es decir* se visualiza una tendencia a iniciar un proceso de *matematización progresiva que se caracteriza porque* no hay ruptura entre un nivel y otro por el contrario es una división casi imperceptible y no se puede establecer con precisión los elementos exclusivos de un nivel y de otro, ratificando que un estudiante puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido (Bressan & Gallego, 2011); en este sentido se reconoce que comportamientos tales como la identificación de una relación entre magnitudes, la interpretación de una descripción verbal, la traducción a una representación tabular, la diferenciación de cantidades que varían y que no varían pertenecen al nivel situacional de Matematización horizontal por cuanto evidencian la comprensión de una situación y su visualización desde diferentes puntos de vista, de aquí en adelante se inicia un proceso de matematización progresiva que conduce a la matematización vertical caracterizada por la identificación de relaciones y regularidad entre magnitudes (nivel referencial) dado que permite la identificación del modelo que representa una determinada relación, y la utilización de diferentes lenguajes de representación (nivel general) ya que dan cuenta del reconocimiento de características similares y la conexión con situaciones anteriores.

Resulta significativo reconocer además los elementos implícitos dentro del hecho de pasar de una gráfica a una expresión algébrica, tales como la realización de una lectura de las coordenadas de los puntos, la identificación de las variables asignadas a cada eje, la interpretación de la escala de medición utilizada en cada caso; la interpretación de un punto de la gráfica en términos de sus coordenadas y reafirmar el procedimiento para calcular la razón de cambio e interpretarlo en términos de la tendencia de la gráfica. Solamente estos dos lenguajes, gráfico y algebraico, como lo expresan Azcárate y Deulofeu (1996), son potentes pues facilitan la caracterización de un modelo funcional lineal y afín, ya que la gráfica permite visualizar variaciones e intervalos constantes, crecimiento y continuidad y la expresión algebraica que permite determinar valores de ambas variables con precisión.

Otro aspecto que marca este proceso de implementación es la falta de una tendencia definida respecto a la continuidad o no de los puntos de una gráfica cartesiana, que es una de las dificultades que se presentan con más frecuencia en estudiantes de este nivel; otro más es la tendencia de los estudiantes a permanecer en el contexto de pandebonos que al parecer les da seguridad pues en este contexto con mayor facilidad identifican un modelo, proceso que se les dificulta en contextos diferentes; en pocos casos se presenta un acercamiento incipiente hacia otro contexto. En este sentido y respecto a la lectura e interpretación de gráficos, algunos estudiantes presentaron dificultades en el manejo de los signos de las coordenadas de los puntos utilizados para calcular la razón de cambio especialmente con coordenadas negativas y en cuanto a la expresión algebraica de la función constante, algunos estudiantes presentaron la dificultad de expresar la función en términos de X.

Prospectiva

Estos resultados constituyen un punto de partida para diseñar otro tipo modelos funcionales partir de las situaciones problemáticas que surgen a la luz de los proyectos productivos agroindustriales, en este sentido se podrían considerar la función cuadrática, la función inversa y la función compuesta; para nuevos trabajos diseñados a partir de este es conveniente realizar algunos ajustes en cuanto al diseño de la estructura, hacerlo más conciso eliminando preguntas que resultaron repetidas y un poco confusas.

Referencias y bibliografía

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Bressan, A., & Gallego, M. (2011). *La Educación Matemática Realista: Bases teóricas.* Presentado en III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2004). *La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de inverno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.

Méndez, C. E. (1992). *Metodología. Guía para elaborar diseños de investigación en ciencia Económicas, Contables y Administrativas*. Bogotá: McGraw Hill.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Ley 1014 de 2006. De fomento a la cultura de emprendimiento*. Bogotá: Magisterio.

Puig, L. (1997). *Análisis fenomenológico*. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural*. En S. Llinares, & V. Sanchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-74). Barcelona: Horsori.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education.* Dordrecht: Reidel.

Apéndice A

ANEXO 1: *Estructura de la unidad didáctica*

Nº	Situación Nombre	Tareas	Número de preguntas
1	Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Relación entre magnitudes	7
		Tarea3:Validando la relación entre magnitudes	5
2	Preparación de la mezcla para el pandebono y expresiones algebraicas	Tarea 1: Expresiones algebraicas	5
		Tarea 2: Representación Gráfica	4
		Tarea 3: Variaciones lineales con el Programa Excel	3
		Tarea 4: Afianzar manejo del Programa Excel con variaciones lineales	6
3	Comercializando pandebonos y la función lineal	Tarea 1: Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas	10
		Tarea 2: Lectura e interpretación de representaciones gráficas	11
		Tarea 3: Relaciones lineales de tendencia decreciente	6
4	Costos fijos y la función afín	Tarea 1: Relación gráficas y expresiones algebraicas	6
		Tarea 2: Gráficas y Relaciones lineales mediante Excel	5
		Tarea 3: Lectura e interpretación de gráficas cartesianas de Excel	5
		Tarea 4: Construyendo modelos funcionales	5
5	Reconociendo el modelo de función constante	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Afianzando el modelo funcional constante	6
		Tarea 3: Afianzando el modelo funcional	5

Nota: esquema general de la Unidad didácticaEncuestas aplicadas a estudiantes