O Jogo das Lâmpadas e Sistemas Lineares

Rubens Carlos **Viriato** Júnior Universidade de Brasília Brasil
rubens.viriato@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

Esta oficina apresenta em quatro atividades práticas, resoluções de situações problemas construídas usando um jogo de lâmpadas. Seu objetivo principal é, a partir do uso dos princípios básicos de contagem no conjunto dos números inteiros, construir sistemas de equações lineares de ordem dois ou três e apresentar fundamentos das operações soma e subtração nos conjuntos munidos das relações de congruências módulos 2 e 3 da Álgebra. Essa apresentação é feita motivada pelo jogo e sem o formalismo e abstração do tema. A metodologia é a de resolução de problemas em grupos e discussão mediada pelo aplicador. Essa oficina poderá incentivar educadores matemáticos de todos os níveis educacionais na elaboração de material inédito e criativo para suas turmas.

Palavras chave: números inteiros, somas, subtração, sistemas lineares, congruências.

O Jogo das Lâmpadas e Sistemas Lineares

Aos alunos de cursos de Licenciaturas das universidades brasileiras é oferecida a possibilidade de participarem do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Esse programa visa o aperfeiçoamento e valorização da formação de professores para a educação básica e oferece bolsas aos participantes para atuarem em escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Os projetos do PIBID contribuem para a inserção dos licenciandos no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica e consistem no desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas sob a orientação de um docente da licenciatura da área e de um professor da escola. O projeto é fomentado pelo Ministério da Educação através de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[1].

A atividade apresentada nesta oficina foi produzida no âmbito do projeto denominado "Escola de Matemática", desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília para integrar o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). De acordo com Grebot, Gaspar e Dörr (2013), o PIBID da Universidade de Brasília (UnB) tem como objetivo principal:

> "*... a criação de um espaço de ensino-aprendizagem da matemática em que os alunos de licenciatura em matemática possam experimentar propostas diferentes para trabalhar os conteúdos matemáticos e refletir sobre o papel do aluno e do professor no processo de ensino e aprendizagem.*"

As atividades foram aplicadas durante um ano, entre o segundo semestre de 2013 e o primeiro de 2014. Foram realizados encontros semanais de duas horas em uma escola pública de ensino médio no Distrito Federal na cidade de Brasília. Os alunos foram selecionados pelos professores de Matemática da escola e o grupo foi formado por um máximo de 15 estudantes. As atividades que compõem a oficina foram construídas por um estudante do curso de licenciatura em Matemática da UnB sob a orientação de uma professora de Matemática da mesma instituição.

Objetivo Geral

Apresentar, por meio de uma situação-problema, noções básicas sobre sistemas de equações lineares e suas aplicações.

Objetivos Específicos

- Interpretar uma situação-problema;
- Construir equações lineares em duas ou três variáveis a partir de uma situação-problema;
- Introduzir somas e subtrações em módulo 2 e em módulo 3 como aplicações de sistemas lineares**.**
- Sugerir atividades a partir de situações-problemas para educadores matemáticos.

Referencial Teórico

Os temas matemáticos centrais deste trabalho dizem respeito Álgebra, com ênfase na construção de sistemas de equações lineares.

A álgebra linear é um dos assuntos centrais da Matemática básica e, para muitos autores, é considerada mais importante que o Cálculo Diferencial e Integral (Strang, 2010). Tal afirmação justifica-se, segundo o autor, pelo fato dela ser base das Ciências, Engenharias e Administração, áreas que alcançaram uma abrangência significativa no mercado de trabalho atual.

---

[1] Informações sobre o PIBID: https://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid

Por sua importância no futuro dos estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores que exigirão conhecimento prévio dos elementos de álgebra linear ou que a usarão como ferramenta no estudo do Cálculo Diferencial, é importante, como educadores, nos perguntarmos, de que modo a matéria deve ser introduzida para que estimulemos os estudantes na sua aprendizagem?

No caso particular da resolução de sistemas lineares, a matéria é introduzida no Brasil nos anos finais do ensino fundamental e seu estudo é estendido ao Ensino Médio.

A proposta de trabalho apresentado nesta oficina traz uma metodologia alternativa ao estudo de sistemas lineares que contribui para a promoção de uma participação ativa dos participantes, por meio do uso de grupos (Dörr, 2013). O trabalho em grupo e a construção dos resultados por meio de uma resolução passo a passo, contribuem para a diminuição da tendência tecnicista que predomina em nossas salas de aulas de matemática em todos os níveis educacionais e que apresenta a matemática como um conjunto de técnicas, regras e algoritmos (Fiorentini, 1995). D'Ambrosio (1996) enfatiza que esse tipo de professor tem seus dias contados.

As situações problemas propostas foram construídas com base nos jogos lineares finitos, uma aplicação de sistemas lineares, presente no livro "Álgebra Linear" de David Poole (2006). Ao invés de tratarmos cada lâmpada presente nas atividades como um vetor-coluna, ideia chave para a resolução da atividade apresentada no livro de David Poole, foi associada a cada lâmpada uma equação linear de duas ou até três variáveis, adaptando-a assim, para uma aplicação a sistemas lineares tratados no final do ensino fundamental e ensino médio. Logo, conteúdos matemáticos exigidos nas atividades permitem seu uso nos anos finais do ensino fundamental e em todos os anos do ensino médio.

Outro tema que surge nas atividades é a introdução, de modo intuitivo, da congruência módulos 2 e 3. Não é necessária a ênfase neste tópico. Entretanto, do modo como é apresentado, contribuirá para promoção da descoberta e poderá desafiar a curiosidade e independência dos alunos sobre o tema. De acordo como Polya (1995), o professor que tem a oportunidade em sala de aula de promover esses sentimentos em seus alunos, deixará marcas não só em seu aprendizado matemático, mas também na sua mente e seu caráter.

Os problemas propostos nesta oficina motivam estudantes ao estudo de temas matemáticos considerados, em geral, abstratos para a maioria deles e muitas vezes apresentados de modo desconectado das aplicações. As atividades poderão ser usadas por professores para motivar ou introduzir sistemas lineares e trabalhar temas não vistos no ensino básico como congruências módulos 2 e 3 (Domingues & Iezzi, 1979; Santos,1998), oferecendo ao aluno, por meio de uma aplicação prática, conhecimentos matemáticos não incluídos nas diretrizes curriculares.

Metodologia

As atividades devem ser realizadas em grupos de 2 a 4 pessoas. Os participantes devem interpretar a situação proposta em cada atividade, e em seguida, seguir os comandos do enunciado sob a coordenação do professor que deverá mediar os trabalhos, esclarecendo dúvidas, controlando o tempo e fechando cada atividade por meio de comentários sobre os resultados e as conclusões e ressaltando descobertas feitas pelos grupos durante o processo. O nível das atividades é crescente. Os participantes devem registrar todas as suas respostas e resoluções.

Promovemos aqui a comunicação oral e escrita entre os participantes como instrumento importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Atividade 1

Considere duas lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas ou apagadas. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da primeira lâmpada, muda o estado da primeira lâmpada e também da segunda lâmpada. O botão Y, que está embaixo da segunda lâmpada, muda o estado somente da segunda lâmpada. Sendo assim, considerando que as duas lâmpadas estavam inicialmente apagadas, temos a seguinte tabela que retrata as mudanças de estados das lâmpadas sempre que apertamos um dos botões.

Tabela 1

Atividade 1

	Lâmpada A	Lâmpada B
Botão X	1	0
Botão Y	1	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Responda os itens abaixo, com a resposta final sendo 0 para o estado final da lâmpada apagada e 1 para o estado final da lâmpada acesa.

1 – Apertando uma vez o botão X e uma vez o botão Y, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que as duas estavam inicialmente apagadas?

2 – Apertando duas vezes o botão X e uma vez o botão Y, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que a primeira estava inicialmente apagada e a segunda acesa?

3 - Complete agora a tabela a seguir. Nela, temos quantas vezes o botão X e o botão Y foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que, em todos os casos, as lâmpadas estavam inicialmente apagadas. Siga os exemplos:

Tabela 2

Continuação Atividade 1

	Botão X	Botão Y	Lâmpada A	Lâmpada B
1	0	1	0	1
2	1	0	1	1
3	1	2		
4	1	3		
5	3	2		

Fonte: elaborada pelos autores.

4– Observando a tabela anterior, o que podemos concluir quando apertamos duas vezes seguidas apenas o botão X ou o botão Y?

5- Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão para que a primeira lâmpada esteja acesa e a segunda lâmpada apagada? Considere que as duas lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

Atividade 2

Nas atividades anteriores, os resultados finais das lâmpadas eram 0 ou 1. Podemos estabelecer as operações soma e subtração no conjunto {0,1} de modo que as respostas das operações também pertençam a esse conjunto.

Complete a tabela a seguir:

Tabela 3

Atividade 2

	Soma	**Módulo**	**Resultado**
1	1 + 1	2	0
2	1 + 2	2	1
3	2 + 0	2	
4	3 + 1	2	
5	2 + 3	2	
6	4 + 6	2	
7	11 + 6	2	
8	10 + 7	2	
9	7 + 6	2	
10	12 + 9	2	

Fonte: elaborada pelos autores.

2 - O que concluímos acerca dos resultados da tabela acima?

3 - A mesma relação citada na questão anterior, que é válida para a soma em módulo 2, é válida, também, para a subtração em módulo 2. Siga os exemplos e complete a tabela da subtração em módulo 2 a seguir:

Tabela 4

Atividade 2

	Subtração	**Módulo**	**Resultado**
1	2 – 0	2	0
2	3 – 2	2	1
3	2 – 3	2	1
4	4 – 2	2	0
5	2 – 4	2	

Fonte: elaborada pelos autores.

4 – Construa a definição de soma e subtração em {0,1}.

Atividade 3

Considere três lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas ou apagadas. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da lâmpada A, muda o estado da lâmpada A e também da lâmpada B. O botão Y, que está embaixo da lâmpada B, muda o estado da lâmpada B e da lâmpada C. E o botão Z, que está embaixo da lâmpada C, muda o estado da lâmpada A e da lâmpada C. Sendo assim, considerando que todas as lâmpadas estavam inicialmente apagadas, temos a seguinte tabela que retrata as mudanças de estados das lâmpadas sempre que apertamos um dos botões.

Tabela 5

Atividade 3

	Lâmpada A	**Lâmpada B**	**Lâmpada C**
Botão X	1	0	1
Botão Y	1	1	0
Botão Z	0	1	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Responda os itens abaixo, com a resposta final sendo 0 para o estado final da lâmpada apagada e 1 para o estado final da lâmpada acesa.

1 – Apertando uma vez o botão X, uma vez o botão Y e, em seguida uma vez o botão Z, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que todas estavam inicialmente apagadas?

2 – Apertando duas vezes o botão X, uma vez o botão Y e duas vezes o botão Z, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que a lâmpada A estava inicialmente apagada e a lâmpada B e a lâmpada C acesas?

3 - Complete agora a tabela a seguir. Nela, temos quantas vezes o botão X, o botão Y e o botão Z foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que, em todos os casos, as lâmpadas estavam inicialmente apagadas. Siga os exemplos:

Tabela 6

Continuação Atividade 3

Botão X	**Botão Y**	**Botão Z**	**Lâmpada A**	**Lâmpada B**	**Lâmpada C**
0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	0			
0	1	1			
1	1	3			

Fonte: elaborada pelos autores.

4 - É possível descobrir a quantidade mínima que devemos apertar os botões das três lâmpadas para conseguirmos um determinado estado final para cada lâmpada? Para isso, monte três equações, uma equação para cada lâmpada, igualando as equações ao

estado final desejado de cada lâmpada, considerando X, Y e Z a quantidade de vezes que o botão da lâmpada A, da lâmpada B e da lâmpada C foram apertados, respectivamente.

5 - As três equações do item anterior formam um sistema linear, no qual, por meio de sua resolução, podemos determinar a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão, dado um estado final de cada lâmpada. Sendo assim, quantas vezes devemos apertar cada botão para que a lâmpada A e a lâmpada C estejam acesas e a lâmpada B apagada? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

6 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja apagada, a lâmpada B acesa e a lâmpada C também acesa? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

7 - Existe solução, ou seja, existe uma quantidade mínima de vezes para apertamos cada botão para que todas as lâmpadas estejam acesas? E para que a lâmpada A esteja apagada, a lâmpada B acesa e a lâmpada C apagada?

Atividade 4

Considere, agora, três lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas com a cor branca, acesas com a cor azul ou acesas com a cor vermelha. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da Lâmpada A, muda o estado das três lâmpadas. O botão Y, que está embaixo da lâmpada B, muda o estado da primeira lâmpada e da segunda lâmpada. E o botão Z, que está embaixo da lâmpada C, muda o estado da segunda e da terceira lâmpada. Seja 0 a representação para a cor branca, 1 para a cor azul e 2 para a cor vermelha.

1 – Apertando uma vez o botão X, uma vez o botão Y e uma vez o botão Z, qual é será a cor de cada lâmpada, sendo que a A e a C estavam inicialmente brancas e a B estava inicialmente vermelha?

2 - Qual será a cor de cada lâmpada quando apertamos três vezes o botão X, quatro vezes o botão Y e uma vez o botão Z? Considere que a lâmpada A estava inicialmente vermelha, a lâmpada B branca e a lâmpada C azul.

3 – O que acontece quando apertamos três vezes seguidas apenas o mesmo botão? E quando apertamos quatro vezes?

4 - Observe e complete a tabela a seguir. Nas duas primeiras linhas, temos quantas vezes o botão X, o botão Y e o Botão Z foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada. Considere que em todos os casos as lâmpadas estavam inicialmente com a cor branca.

Tabela 7

Atividade 4

	Botão X	Botão Y	Botão Z	Lâmpada A	Lâmpada B	Lâmpada C
1	1	1	1	2	0	2

2	2	2	2	1	0	1
3	2	1	2			
4	3	1	1			
5	2	1	3			

Fonte: elaborada pelos autores

5 – Qual o número mínimo de vezes que devemos apertar o botão X, o botão Y e o botão Z para que tenhamos as seguintes cores das lâmpadas: azul para a lâmpada A, branca para a lâmpada B e branca para a lâmpada C? Considere que a lâmpada A estava inicialmente vermelha, a lâmpada B inicialmente branca e a lâmpada C inicialmente azul.

6 - Usando a mesma ideia de congruência módulo 2, complete a tabela a seguir com a subtração em módulo 3.

Tabela 8

Continuação Atividade 4

	Soma	Módulo	Resultado
1	7 – 3	3	
2	8 – 5	3	
3	10 – 5	3	
4	3 – 0	3	
5	4 – 3	3	

Fonte: elaborada pelos autores.

7 - É possível associar a cada lâmpada uma equação nas variáveis X, Y e Z, igualando essas equações ao estado final desejado de cada lâmpada? Caso afirmativo, quais são essas equações?

8 - Por meio das equações anteriores, qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão X, o botão Y e o botão Z para obtermos as seguintes cores das lâmpadas: vermelha para a lâmpada A, azul para a lâmpada B e branca para a lâmpada C? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

9 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B vermelha e a lâmpada C branca? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

10 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B vermelha e a lâmpada C azul? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

11 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B azul e a lâmpada C vermelha? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

12 - Existe solução, ou seja, a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão para que as lâmpadas tenham a seguinte configuração em seu estado final: a lâmpada A branca, a lâmpada B azul e a lâmpada C vermelha, considerando que todas elas estavam brancas em seu estado inicial?

Conclusões e Perspectivas de Futuro

As atividades propostas nesta oficina foram elaboradas para integrarem as atividades do projeto PIBID no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Buscando cumprir com os objetivos do projeto, construíram-se situações problemas que foram aplicadas em grupos de alunos do Ensino Médio numa escola da rede pública de ensino do Distrito Federal. Os conteúdos matemáticos escolhidos para a as atividades são relevantes para os estudantes do ensino médio e, se bem apreendidos, servirão de auxílio no futuro para aqueles que em seus cursos superiores necessitem de cursarem disciplinas de álgebra ou que a usem como fundamento.

Na aplicação das atividades, o licenciando pode experimentar o cotidiano da sala de aula de uma instituição pública, participou da elaboração de uma atividade pedagógica prática, articulando assim a teoria acadêmica com a prática, cumprindo com os objetivos do PIBID, mas principalmente, foi criada uma oportunidade de desenvolvimento do licenciando como estudante e como futuro educador matemático.

Uma vez que as atividades foram realizadas em grupos, observou-se um maior envolvimento dos estudantes com as resoluções das situações problemas, se comparado com as atividades rotineiras de resolução de exercícios em sala de aula. A situação prática inicial das lâmpadas, instigou a curiosidade dos participantes, promoveu a criatividade e a descoberta de resultados importantes.

Consideramos que determinados conteúdos em matemática devam ser introduzidos por meio do uso de situações problemas. Tal prática ajuda a desmistificar a matéria como algo sem utilidade e gera interesse pela disciplina.

Como projeto futuro os autores pretendem construir o jogo das lâmpadas em material concreto para incrementar a aplicação das atividades.

Para o bom andamento durante a aplicação das atividades, é importante a atenção e a interpretação dos enunciados. Assim, contribuímos para o desenvolvimento da leitura e interpretação dos problemas.

Concluímos que as atividades propostas pela oficina contribuem para o alcance dos objetivos colocados inicialmente e que elas poderão auxiliar educadores matemáticos que buscam alternativas para a aula tradicional. A oficina traz uma sugestão de trabalho que poderá ser aplicada em salas de aulas de outros educadores. Esperamos que ao serem aplicadas, sejam motivadoras e os estimulem na construção de suas próprias atividades.

Referências e bibliografia

D’Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas: Papirus.

Domingues, H., & Iezzi, G. (1979). *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual.

Dörr, R. C. (2013). Uso de Grupos Colaborativos: Relato de Experiências e Perspectivas de Uso no Ensino Superior. *Atas VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.* Montevideo.

Fiorentini, D. (1995). Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, *3*(4) .

Grebot, G., Gaspar, M.T. J. & Dörr, R. C. (2013). Experiências matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília. *Atas VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.* Montevideo.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Poole, D. (2006). *Álgebra Linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Santos, J. P. O. (1998). *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro: SBM, Sociedade Brasileira de matemática.

Strang, G. (2010). *Álgebra Linear e suas aplicações.*São Paulo: Cengage Learning.

.