Las Propiedades de los Números Reales y el "misterio" de las Estructuras Algebraicas

Laura Alejandra **Bonilla** Ramos
Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa.
México
laurabonilla@uas.edu.mx
Canek **Portillo** Jiménez
Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa.
México
canekportillo@uas.edu.mx
Diego **Cárdenas** Sainz
Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa.
México
diegocs@uas.edu.mx
Rocío Paola **Ruiz** Quiñonez
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Sinaloa.
México
ro_ruiz77@hotmail.com

Resumen

La enseñanza del tema de Estructuras Algebraicas representa dificultades de comprensión y aprendizaje en los alumnos de nuevo ingreso de la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Para investigar a qué se debe, se aplicó una serie de reactivos a manera de diagnóstico a un grupo de 40 estudiantes de ingeniería sobre conocimientos previos a Estructuras Algebraicas, principalmente ejercicios relacionados con las propiedades de los números reales.

A pesar de que este tema se aborda por primera vez en secundaria y posteriormente se profundiza en el bachillerato, los alumnos llegan al nivel superior sin dominio y a veces sin conocimiento alguno del mismo. Será parte de este trabajo de investigación presentar y discutir los resultados que se encontraron en el diagnóstico.

Palabras clave: educación, propiedades de los números reales, estructuras algebraicas, aprendizaje, conocimientos previos.

Abstract

Teaching Algebraic Structures might represent some learning and understanding difficulties for the freshmen students of Industrial Processes Engineering at Universidad Autónoma de Sinaloa.

In order to investigate the cause or causes of this situation, a test was applied as a diagnosis instrument to a 40 engineering students group, about algebraic structures previous knowledge, mostly related with the conception of the real numbers laws.

Although the subject of the real numbers laws is addressed for the first time in junior high and then delves in high school, the students reach the university without domain and sometimes without any knowledge of the subject. It will be part of this paper to present and discuss the results found in the diagnosis.

Key words: education, real numbers laws, algebraic structures, learning, previous knowledge.

Introducción

Los alumnos que ingresan a la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales que oferta la Facultad de Ingeniería Culiacán de la Universidad Autónoma de Sinaloa, llegan con algunas deficiencias en el área de ciencias básicas. Esto se observa durante el desarrollo de las clases al abordar temas que requieren de todo un bagaje de conocimientos previamente adquiridos en niveles anteriores (desde la primaria hasta el bachillerato); al hacer la introducción del tema y tratar de reactivar dichos conocimientos, los alumnos comentan que no recuerdan haberlos estudiado o bien, los recuerdan vagamente y prácticamente es necesario dar clases extra para remediar esta situación.

En las secciones posteriores se presentará el objeto de estudio del presente trabajo, así como la forma en la que se realizó y la discusión de los resultados que se obtuvieron.

Planteamiento del problema

La asignatura de Álgebra y Geometría Analítica forma parte de la currícula de la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales de la Facultad de Ingeniería Culiacán de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Se imparte durante el semestre impar del primer grado y junto con otras asignaturas forma parte del grupo disciplinar de Ciencias Básicas, particularmente, del área de matemáticas.

Dentro de los contenidos de la primera unidad de la asignatura, se encuentra el tema de Estructuras Algebraicas, en el que se revisan de manera particular las estructuras de Grupos, Semigrupos, Monoides, Anillos y Campos, así como otros conceptos relacionados.

Este es el primer contacto que tienen los estudiantes de nuevo ingreso con el Álgebra Abstracta, y para muchos representa un momento de *shock* –sobre todo para estudiantes que consideran haber sido sobresalientes en los niveles anteriores- pues se enfrentan con algo que aparentemente no tiene relación alguna con los temas de álgebra que estudiaron en el bachillerato.

Un alto porcentaje de los alumnos de este curso lo reprueban, y en entrevistas de tutorías han manifestado que este tema "los paralizó", es decir, entraron en un estado de "no entiendo, no puedo, no lo hago" que los llevó incluso a reprobar no solamente el examen parcial sino el curso completo.

Previo a este tema, se aborda el de la clasificación de los números reales, sus operaciones y sus propiedades. De primera instancia, algunos no ponen especial interés en estos temas, pues los consideran "sin chiste"; incluso, al revisar las propiedades de los números reales respecto a las operaciones de adición y multiplicación, no parecen encontrar mayor trascendencia en el tema, y se limitan a transcribir la tabla con dichas propiedades.

Cuando llega el momento de abordar el tema, se explica lo que es una operación binaria, y se establecen las condiciones y características para que una estructura sea un grupo, un semigrupo, un monoide, un anillo o un campo. Y aquí es donde empieza "el misterio": de repente, los estudiantes ya no entienden nada de lo que se les dice y al verse perdidos comentan "¿de qué nos va a servir esto?"; "es que nunca lo hemos visto"; "pero es que no entiendo nada, nada desde el principio". Lo increíble es que antes del tema de Estructuras Algebraicas se ha abordado solamente el tema de los Números Reales (su clasificación, sus operaciones y sus propiedades), mismo que les pareció en su momento "sin chiste", fácil y entendible.

Con base en esta experiencia que se repite año con año, y con el propósito de identificar las posibles causas de que el tema sea tan "difícil de entender", se decidió elaborar un diagnóstico que contenga ejercicios relacionados con los conocimientos previos necesarios para entender el tema de Estructuras Algebraicas.

Antecedentes y fundamentación teórica

Uno de los temas fundamentales para la comprensión y el aprendizaje de las Estructuras Algebraicas, es el de las propiedades de los números reales.

De acuerdo con lo expuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en 2011, los alumnos de secundaria deben manejar operaciones con números reales, bajo el Eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.

Asimismo, la SEP a través de la Secretaría de Educación Media Superior (SEMS), en su presentación de los programas de Matemáticas, plantea como objeto principal del estudio de la aritmética el cálculo numérico, las propiedades de los números y sus operaciones, desarrollando en el estudiante de bachillerato una visión más profunda de ella.

Por su parte, la Dirección General de Escuelas Preparatorias (DGEP) de la Universidad Autónoma de Sinaloa, establece en su Plan de Estudios 2009, que durante el primer semestre del primer grado del bachillerato universitario, el estudiante deberá comprender las operaciones y las propiedades de los números reales.

Dado lo anterior, es de suponer que cuando el alumno llega al nivel superior, conoce y domina los temas que eventualmente le permitirían aprender el de Estructuras Algebraicas.

Sin embargo esto no siempre ocurre así. Cuando el alumno se enfrenta a un problema pasa por dos etapas (Matz, citado por Díaz, 2009): la primera, en la que los conocimientos previos sobre el tema toman la forma de una regla o fórmula para aplicar, y la segunda, en la que se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares.

El problema en la situación que se aborda en el presente trabajo, está en ambas etapas: los alumnos no son capaces de identificar las reglas y fórmulas para aplicar (características de los conjuntos de los Reales, generalización de sus propiedades, entre otras) y por ende, no pueden establecer un vínculo entre ellas y los nuevos conceptos.

Metodología

Se escogió un grupo al azar de los tres que existen en la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales. Basándose en los resultados obtenidos en el examen de admisión, se consideró que los tres grupos eran equivalentes en cuanto al nivel académico de los estudiantes.

Los 40 estudiantes del grupo seleccionado resolvieron un instrumento de diagnóstico (ver apéndice B) bajo las mismas condiciones (sin consultar ningún material adicional), para así obtener una radiografía de sus conocimientos previos al tema de estructuras algebraicas.

El diagnóstico consta de 12 reactivos, todos ellos abiertos y relacionados con las propiedades de los números reales y con diferentes conjuntos dentro de los números reales.

Se revisaron los diagnósticos poniendo especial atención en el tipo de respuesta que dieron los alumnos. Se consideraron tres tipos de respuesta: correcta, incorrecta y en blanco. De igual manera, en los reactivos 2 y 4 se solicitaba argumentar la respuesta, así que también se consideró esta variable para el caso de los ítems antes mencionados (sí o no).

En el reactivo 3 se piden dos respuestas (una para el inverso aditivo de un número dado, y otra para el inverso multiplicativo); es por ello que se consideraron dos reactivos dentro de uno (3a y 3b).

Es importante mencionar que en el reactivo 1c se solicita que de manera simultánea se apliquen las propiedades conmutativa y asociativa de la adición para encontrar una expresión equivalente a la dada.

Finalmente, en caso de que la respuesta haya sido incorrecta o haya sido dejada en blanco, se consideró que la propiedad del reactivo es una debilidad para el alumno.

Con el propósito de atender de forma prioritaria aquellas propiedades en las que se encontró mayor incidencia de error, se partió del siguiente criterio: los reactivos que hayan tenido un porcentaje de respuesta correcta menor o igual al 60%, representan los temas en los que hay que focalizar la atención.

Resultados

En la tabla 1, se muestran los resultados obtenidos, considerando el número del reactivo, si la respuesta fue correcta o no y si se dio un argumento en caso de que fuera necesario.

Tabla 1

Resultados obtenidos del instrumento diagnóstico.

Número de reactivo	Respuesta			¿Argumentó?	Propiedad identificada como debilidad
	Correcta	Incorrecta	En blanco		
1a.	32	4	4	0	8
1b.	24	14	2	0	16
1c.	14	17	9	0	26
2	25	3	12	15	15
3a	22	10	8	0	18
3b	12	18	10	0	28
4	29	2	9	18	11
5a.	25	3	12	0	15
5b.	11	17	12	0	29
5c.	13	15	12	0	27
5d.	25	3	12	0	15
5e.	17	12	11	0	23

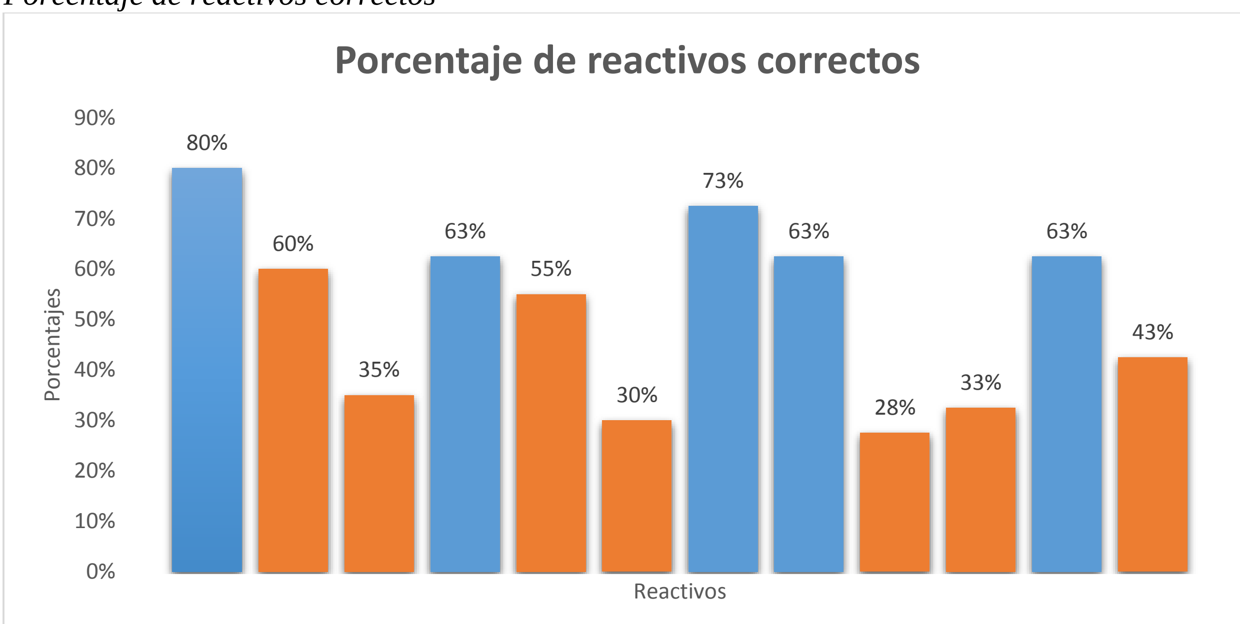
Fuente: instrumento diagnóstico. 2014.

Nótese que bajo la columna "¿Argumentó?" hay solamente dos filas en las que aparecen valores distintos de cero, esto es porque –como se señaló anteriormente- es únicamente en esos reactivos en los que se solicitaba argumentación.

Por otra parte, en la figura 1 se aprecia visualmente el porcentaje de reactivos correctos y por ende, aquellas propiedades que deben atenderse como una prioridad para el grupo.

Figura 1

Porcentaje de reactivos correctos



Fuente: instrumento diagnóstico. 2014.

Aparecen en azul aquellos reactivos que de acuerdo a lo planteado en la metodología no se consideran en la generalidad del grupo como una debilidad, y en anaranjado aquellos que requieren una intervención inmediata para corregir errores en los conocimientos previos.

Las propiedades que de acuerdo a estos resultados son las que presentan una mayor incidencia de "debilidad" en el grupo son: propiedad asociativa de la multiplicación (1b), propiedades asociativa y comutativa de la adición (1c, de forma simultánea), propiedades del elemento inverso de la adición y la multiplicación (3a y 3b) y la propiedad de cerradura bajo diversas operaciones y conjuntos de números (5b, 5c y 5e).

En lo que respecta al reactivo 1c –en el que se solicita se apliquen simultáneamente las propiedades conmutativa y asociativa de la adición-, se consideró como incorrecta la respuesta si una de las dos propiedades no fue aplicada correctamente, dado que lo que se pretendía era precisamente que el alumno pudiera aplicar de forma simultánea las dos propiedades. Sin embargo, en la clasificación y conteo de los datos, se consideraron también las dos respuestas por separado (ver apéndice C) en caso de que el lector desee más detalles sobre este ítem.

Conclusiones

Definitivamente, la aplicación de un instrumento diagnóstico es una fuente de información muy valiosa, de la que es posible obtener datos que permitan aclarar muchas concepciones erróneas que los alumnos vienen arrastrando desde niveles educativos anteriores.

En el caso particular que nos atañe, se detectaron algunas de las propiedades de los números reales en las que existe confusión, así como los errores que cometen al tratar de ponerlas en práctica. También se descubrió que cuando se combina el poner en práctica una propiedad dentro de un subconjunto de los números reales, el alumno es más susceptible de cometer errores o definitivamente de entrar en pánico y no contestar la pregunta.

Es importante mencionar que los resultados en este trabajo no son totalmente concluyentes, sino más bien lo que se ha tratado es de resaltar los beneficios del uso de un instrumento de diagnóstico sobre todo en aquellos temas en los que por experiencia se sepa que los estudiantes presentan dificultades de aprendizaje. Si esta manera de proceder se hiciera de forma regular, tendríamos una base de datos bastante amplia sobre las respuestas erróneas y sobre los equívocos conocimientos previos con los que llegan los alumnos al nivel superior.

Si el docente conoce esta información, estará en sus manos diseñar estrategias que subsanen estas deficiencias y que les permitan a los estudiantes continuar con el proceso de aprendizaje (Del Puerto, Minnaard & Seminara, 2006).Cabe señalar que se realizará una nueva investigación a manera de continuación del presente trabajo, comparando los diagnósticos con los resultados de los exámenes parciales y semestrales de los mismos alumnos que participaron en el estudio, con la intención de descubrir si después de atender las debilidades descubiertas en el diagnóstico los alumnos pudieron superar los errores de concepción de los conocimientos previos y así avanzar en el tema de estructuras algebraicas.

Referencias y bibliografía

Álvarez Villar, W., Czerwonogora, A., Isolabella, G., Lacués, E., Leymonié, J., & Pagano, M. (2007). La matemática al ingreso en la universidad. Un estudio comparativo de cuatro Facultades en el Uruguay. *Revista Iberoamerciana de Educación*.

American Psychological Association. (2009). *Publication Manual of the American Psychological Association.* Washington, DC.: American Psychological Association.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Díaz Gómez, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza.* Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional.

Dirección General de Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa (DGEP-UAS). (2009). *Programa de Estudio de Matemáticas I.* Culiacán: UAS.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1993). *Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruiz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Secretaría de Educación Media Superior (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Media Superior. Matemáticas. Edición Electrónica.* Recuperado en Septiembre 28, 2014, de http://www.sems.udg.mx/sites/default/files/BGC/Matematicas_I_II_III_y_IV.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011 Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. Edición Electrónica.* Recuperado en Septiembre 28, 2014, de http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/MatematicasSec11.pdf

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., & Alvarez, E. (2001). La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Apéndice A
Programa de Contenidos de la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

FACULTAD DE INGENIERÍA CULIACÁN

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN PROCESOS INDUSTRIALES

ASIGNATURA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

INFORMACIÓN GENERAL

Tipo de asignatura:	*Obligatoria:* X *Selectiva:*
Grupo disciplinar y su objetivo:	Ciencias Básicas. Proporcionar el conocimiento fundamental de los fenómenos de la naturaleza, incluyendo sus expresiones cuantitativas y el desarrollo de capacidad del uso del método científico, así como de las matemáticas que contribuyan a la formación del pensamiento lógico-deductivo a partir de utilizar lenguaje y herramientas que permitan modelar esos fenómenos.
Área académica:	Matemáticas
Objetivo general de la asignatura:	Comprender los elementos básicos del álgebra, vectores y de la geometría analítica en el espacio. Analizar y resolver problemas que se presenten en el curso, así como también en cursos paralelos y posteriores.
SEMESTRE:	1
Créditos: 10	Duración hora/sem/mes: 5 Teoría: 75 Práctica: 0
Conocimiento previo necesario:	Conocimientos básicos sobre álgebra elemental, trigonometría y geometría analítica plana.
Proporciona bases para:	Cálculo I, Cálculo II, Física, Algebra lineal, Ecuaciones diferenciales
Fecha de última actualización:	Agosto del 2006

CONTENIDOS

Unidad	**Temas**	**Horas**
I	1. Números Reales 1.1. Sistemas numéricos 1.1.1. Números naturales 1.1.2. Números enteros 1.1.3. Números racionales 1.1.4. Números irracionales 1.2. Estructuras algebraicas	**13**

	1.3. Conversión de números racionales a su forma decimal y viceversa 1.4. Inducción matemática 1.5. Desigualdades	
II	2. Números Complejos 2.1. Definición y operaciones fundamentales 2.2. Igualdad de números complejos. 2.3. Representación geométrica y polar 2.4. Multiplicación y división de números complejos en forma polar 2.5. Teorema de De Moivre 2.6. Raíces de números complejos	**12**
III	3. Ecuaciones Polinomiales 3.1. Polinomios 3.2. Teorema del residuo 3.3. Teorema del factor y su recíproco 3.4. División sintética 3.5. Teorema fundamental del álgebra 3.6. Raíces de polinomios 3.6.1. Regla de los signos de Descartes 3.6.2. Teorema sobre raíces racionales 3.6.2. Regla para localizar raíces reales 3.6.3. Límites de las raíces reales 3.6.4. Procedimiento para obtener todas las raíces racionales 3.6.5. Raíces complejas 3.6.6. Raíces irracionales (método de Newton)	**16**
IV	4. Vectores 4.1 Vectores en el plano 4.1.1 Definiciones fundamentales (vector, igualdad, componentes y representación posicional) 4.1.2 Magnitud y dirección 4.1.3 Suma y resta (Ley del paralelogramo) 4.1.4 Multiplicación por un escalar 4.1.5 Vectores unitarios 4.1.6 Suma y resta de vectores por descomposición en coordenadas rectangulares 4.1.7 Producto escalar 4.1.8 Angulo entre vectores 4.1.9 Proyección ortogonal 4.2 Vectores en el espacio 4.2.1 Distancia entre dos puntos 4.2.2 Magnitud y dirección, suma y resta, multiplicación por un escalar, vectores unitarios, producto escalar, ángulo entre vectores, interpretación geométrica del producto escalar. 4.2.3 Producto vectorial 4.2.4 Interpretación geométrica de $\left\|\overline{A}\times\overline{B}\right\|$ 4.2.5 Triple producto escalar 4.2.6 Interpretación geométrica de $\left\|\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})\right\|$ 4.2.7 Triple producto vectorial	**20**
V	5. Geometría Analítica en el Espacio 5.1 Planos	**14**

	5.2 Rectas en el espacio 5.2.1 Distancia entre un punto y un plano 5.2.2 Distancia entre un punto y una recta 5.3. Superficies	

Apéndice B
Diagnóstico Aplicado

INSTRUCCIONES: Basándote en lo que has aprendido en grados anteriores, contesta lo que se te pide. En caso de que sea necesario, argumenta tus respuestas.

1. Utiliza la propiedad indicada para obtener una expresión equivalente.
   a. Conmutativa de la adición; $9y + 73x$

   b. Asociativa de la multiplicación; $9a \cdot (6b \cdot 12c)$

   c. Asociativa y conmutativa de la adición; $\left(\frac{y}{8} + 90\right) + 6x$

2. Supón que se define una nueva operación @ en el conjunto de los números reales como sigue: $a@b = 3a - b$. Así, $9@2 = 3(9) - 2 = 25$ ¿Es @ conmutativa? Es decir, ¿se cumple que $a@b = b@a$?

3. El inverso aditivo de $-{}^{3}/_{4}$ es _________ y su inverso multiplicativo es ___________.

4. Supón que definimos una nueva operación ⊕ en el conjunto de los números reales como sigue: $a \oplus b = a^2 + b^2$. Así, $4 \oplus 2 = 4^2 + 2^2 = 20$ ¿Es ⊕ conmutativa?

5. Un conjunto es cerrado bajo una operación si siempre que la operación se realice con elementos del conjunto, el resultado también es un elemento del conjunto dado. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados bajo la operación indicada:

   a. El conjunto de enteros no negativos; adición.

   b. El conjunto de enteros no negativos; sustracción.

   c. El conjunto de enteros impares; adición.

   d. El conjunto de enteros pares; multiplicación.

   e. El conjunto de enteros racionales; multiplicación.

Apéndice C
Compilación de los datos por reactivo

Reactivo 1a. Propiedad Conmutativa de la adición																																										Total
Respuesta	Correcta	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1		1		1	1	1	1		1		1		1	32
	Incorrecta															1															1					1		1				4
	En blanco				1																						1		1											1		4
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	8

Reactivo 1b. Propiedad Asociativa de la Multiplicación																																										Total
Respuesta	Correcta	1	1	1			1	1	1	1	1		1		1			1		1	1	1	1	1				1		1		1	1		1		1	1			1	24
	Incorrecta					1						1		1		1	1		1						1	1	1		1		1			1		1			1			14
	En blanco				1																																			1		2
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	16

Reactivo 1c. Propiedad Asociativa y Conmutativa de la Adición																																										Total
Respuesta	Correcta					1			1				1						1	1		1	1	1	1	1		1					1		1						1	14
	Incorrecta	1	1	1			1	1		1	1	1			1		1	1			1									1	1	1		1				1				17
	En blanco				1									1		1											1		1							1	1		1	1		9
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	26

Reactivo 1c. Propiedad Asociativa de la Adición																																										Total
Respuesta	Correcta					1			1				1						1	1		1	1	1	1	1		1					1		1						1	14
	Incorrecta	1	1	1			1	1		1	1	1			1		1	1			1									1	1	1		1				1				17
	En blanco				1									1		1											1		1							1	1		1	1		9
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	18

Reactivo 1c. Propiedad Conmutativa de la Adición																																										Total
Respuesta	Correcta					1			1				1						1	1		1	1	1	1	1		1					1		1						1	14
	Incorrecta	1	1	1			1	1		1	1	1			1		1	1			1									1	1	1		1				1				17
	En blanco				1									1		1											1		1							1	1		1	1		9
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	21

Reactivo 2. Propiedad Conmutativa para una nueva operación "@"																																										Total
Respuesta	Correcta	1	1	1		1	1			1		1	1		1			1	1	1		1	1	1		1	1	1		1	1		1	1		1		1			1	25
	Incorrecta															1					1											1										3
	En blanco				1			1	1		1			1			1								1				1						1		1		1	1		12
¿Argumentó?		0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	15
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	15

Reactivo 3a. Propiedad del Elemento Inverso de la Adición																																										Total
Respuesta	Correcta	1	1	1		1			1			1					1	1	1	1		1		1	1	1	1		1	1	1	1		1				1			1	22
	Incorrecta									1			1	1									1					1					1		1	1	1		1			10
	En blanco				1		1	1			1				1	1					1																			1		8
¿Argumentó?																																										0
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	18

Reactivo 3b. Propiedad del Elemento Inverso de la Multiplicación																																										Total
Respuesta	Correcta			1								1	1				1		1				1	1	1	1				1				1	1							12
	Incorrecta	1	1			1		1	1					1				1		1		1					1	1	1		1	1	1			1		1			1	18
	En blanco				1		1			1	1				1	1					1																1		1	1		10
¿Argumentó?																																										0
Propiedad identificada como debilidad		1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	28

Reactivo 4. Propiedad Conmutativa para una nueva operación "$\oplus$"																																										Total
Respuesta	Correcta	1	1	1		1	1	1	1			1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1		1			1			1	29
	Incorrecta									1											1																					2
	En blanco				1						1					1													1					1		1	1		1	1		9
¿Argumentó?		0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	11

Reactivo 5a. Propiedad de Cerradura de la Adición (Enteros no negativos)																																										Total
Respuesta	Correcta	1		1		1	1	1	1			1		1	1		1	1	1		1	1	1	1		1		1	1	1	1	1	1					1	1			25
	Incorrecta												1			1																		1								3
	En blanco		1		1					1	1									1					1		1								1	1	1			1	1	12
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	15

Reactivo 5b. Propiedad de Cerradura de la Sustracción (Enteros no negativos)																																										Total
Respuesta	Correcta			1					1			1		1				1	1		1		1			1							1					1				11
	Incorrecta	1				1	1	1							1	1	1					1		1				1	1	1	1	1		1			1		1			17
	En blanco		1		1					1	1		1							1					1		1								1	1				1	1	12
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	29

Reactivo 5c. Propiedad de Cerradura de la Adición (Enteros impares)																																										Total
Respuesta	Correcta							1	1			1		1	1			1	1		1	1		1								1	1	1								13
	Incorrecta	1		1		1	1									1	1						1			1		1	1	1	1				1			1	1			15
	En blanco		1		1					1	1		1							1					1		1									1	1			1	1	12
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	27

Reactivo 5d. Propiedad de Cerradura de la Multiplicación (Enteros pares)																																										**Total**
Respuesta	**Correcta**	1				1	1	1	1			1		1	1		1	1	1		1	1	1	1		1		1		1	1	1	1	1			1	1	1			25
	Incorrecta			1												1													1													3
	En blanco		1		1					1	1		1							1					1		1								1	1				1	1	12
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	15

Reactivo 5e. Propiedad de Cerradura de la Multiplicación (Racionales)																																										**Total**
Respuesta	**Correcta**	1				1						1		1			1	1	1		1	1	1	1		1		1	1					1	1				1			17
	Incorrecta			1			1	1	1				1		1	1														1	1	1	1					1				12
	En blanco		1		1					1	1									1					1		1									1	1			1	1	11
¿Argumentó?																																										
Propiedad identificada como debilidad		0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	23