XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Uma produção de significados para o conceito de anel

Marcelo Silva de **Jesus**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
marcelosilvadejesus@hotmail.com
Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
angelamarta@uel.br
Mariany Layne **Souza**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
marianylayne@gmail.com

Resumo

No presente artigo, apresentam-se significados que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros didáticos. O objetivo é apresentar e discutir que significados alunos de um curso de estruturas algébricas poderiam produzir. Para tanto, adota-se o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), proposto por Lins (2012), como base teórica epistemológica. Percebe-se que são diversos os significados que podem ser produzidos para o conceito de anel a partir de livros didáticos, entre eles, um conjunto numérico e duas operações, um conjunto qualquer e duas operações e um conjunto qualquer que com duas operações goza determinadas propriedades. Assim, se atentar para isso é fundamental para promover um espaço comunicativo nas salas de aula favorável ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos.

Palavras chave: estruturas algébricas, anel, livros didáticos, produção de significados, modelo dos campos semânticos.

Introdução

As estruturas algébricas ocupam um papel de destaque na Álgebra Abstrata, pela rica contribuição para o seu desenvolvimento. Além de integrarem o currículo de cursos de Matemática aparecem em currículos de cursos tais como as Engenharias, a Física e a Computação.

O ensino de estruturas algébricas encontra uma justificativa nas palavras de Souza (2008) quando ela escreve: “Não é só importante, mas fundamental o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em matemática. Sem esta disciplina o aluno sai do curso sem o alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da matemática” (p. 3).

Porém, o ensino de estruturas algébricas em cursos de graduação não tem apresentado resultados satisfatórios por parte dos alunos. Pela abstração e formalismo, são inúmeras as dificuldades apresentadas. Como observa Campos (2008) “... os conceitos algébricos são apresentados aos estudantes, em geral, a partir das definições formais apoiadas na linguagem da teoria de conjuntos, em que as relações entre os objetos são mais importantes do que o próprio objeto e o conhecimento é apresentado na forma axiomática” (p. 4).

Ainda são incipientes os trabalhos relacionados a estruturas algébricas, principalmente os que tratam de anéis. O estudo de anéis também encontra em Souza (2008) uma justificativa: “... é fundamental um aluno de licenciatura em matemática, não só saber, mas dominar as propriedades dos anéis, saber dar exemplos, contra-exemplos, discuti-los e resolver exercícios com as propriedades pertinentes” (p.3).

O conceito de anel, como outros conceitos da Álgebra Abstrata, passou por um longo processo de desenvolvimento até se constituir nos conceitos que encontramos nos livros didáticos analisados. Tais conceitos tiveram suas origens ligadas a diferentes domínios, como por exemplo, polinômios e a teoria de inteiros algébricos. Muitos matemáticos como Richard Dedekind, David Hilbert, Adolf Fraenkel e Emmy Noether contribuíram no desenvolvimento desses conceitos.

Em geral, nos cursos de estruturas algébricas os alunos são apresentados a livros considerados didáticos, e é esperado que produzam significados para os conteúdos abordados.

Considerando que estes livros influenciam os significados produzidos pelos alunos, que nem sempre são os esperados pelo professor, propõe-se neste artigo apresentar e discutir significados que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros considerados didáticos.

Significado e o Modelo dos Campos Semânticos

O modelo dos Campos Semânticos (MCS) é entendido por Silva (1997) como sendo “um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em matemática” (p. 10).

Esse modelo começou a ser idealizado por Lins (1999) ao tentar responder perguntas relacionadas à sala de aula, como por exemplo: o que os alunos pensam quando erram? (sem que o foco estivesse no erro); o que é significado? E o que é conhecimento? (termos comumente utilizados em pesquisas científicas sem que os pesquisadores se preocupem em defini-los).

Ao contrario de outros pesquisadores Lins (2012) preocupa-se em definir o que é conhecimento e o assume como “… uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)" (p. 12). Por exemplo, considere que um aluno do 3º ano do Ensino Fundamental e um aluno do Ensino Médio tenham que justificar o porquê de determinada figura ser classificada como um quadrado. Ao justificar sua crença-afirmação, o aluno do 3º ano poderia dizer que é porque 'a figura possui os quatro lados de mesma medida'. Enquanto o outro poderia dizer que 'a figura satisfaz a condição de ser um retângulo, ou seja, é um quadrilátero com quatro ângulos iguais e, além disso, possui os quatros lados de mesma medida'.

A partir da definição de conhecimento, proposto por Lins, os dois alunos constituíram conhecimentos distintos. Isso porque apesar dos dois acreditarem e afirmarem uma mesma coisa, a figura ser um quadrado, as justificações dadas são diferentes, e consequentemente os conhecimentos também o são.

Como nesse artigo um dos objetivos está em produzir significados para o conceito de anel a partir de livros didáticos, busca-se compreender o processo de comunicação proposto pelo MCS, constituído pela tríade autor-texto-leitor. Lins (2012) explica essa tríade da seguinte maneira:

> "Quem produz uma enunciação é <u>o</u> autor. <u>O</u> autor fala sempre na direção de <u>um</u> leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo <u>o</u> autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é <u>o</u> leitor. <u>O</u> leitor sempre fala na direção de <u>um</u> autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo <u>o</u> leitor" (p. 14).

Em Lins (2012) "resíduo de enunciação é entendido como sendo algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém" (p. 27). Já o significado é definido como sendo "... aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto (aquilo para que se produz significado), no interior de uma atividade" (Lins, 2012, p. 28).

Nesse sentido, as informações contidas em um livro são resíduos de enunciação que podem tornar-se texto quando alguém produz significado para eles. Ao ler os resíduos de enunciação, encontrados em livros didáticos, irá se constituir o leitor na medida em que produz significados para tais enunciações, constituindo ao mesmo tempo <u>um</u> autor (produtores dos tais resíduos de enunciação), para o qual fala em sua direção.

Outros dois conceitos importantes no MCS são o de núcleo e o de campo semântico. De acordo com Lins (2012)"o núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são localmente verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação. Já o campo semântico é um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (pp. 26-27).

Uma pessoa opera em um campo semântico toda vez que estiver produzindo significado em relação a um núcleo dado.

Metodología, Leitura plausível e os livros didáticos

Para identificar e discutir os significados a respeito do conceito de anel optou-se por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa.

A atividade de produzir significados para o conceito de anel a partir dos resíduos de enunciação encontrados em livros didáticos será por meio de uma leitura plausível, pois se entende que:

> "A leitura plausível se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o todo do que eu acredito que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo é dizer que o todo é coerente (nos termos de quem eu constituo como um autor do que estou lendo)"(Lins, 2012, p. 23).

É importante deixar claro que fazer uma leitura plausível implica em direcionar os olhares para aquilo que foi dito pelo sujeito e nunca para o que ele não disse.

Além disso, para explicitar a importância de um professor conhecer os diferentes significados que seus alunos podem produzir para um conceito matemática, apresentam-se os Campos Semânticos na qual se opera durante a atividade de decidir se são anéis os conjuntos $(Mn\ (A), +,\cdot), 2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots), M_2(R)$ e a tripla $(R, +,\cdot)$ com $R = \{0, 1, 2, 3\}$ definida de acordo com as tabelas:

Tabela 1

Tabela de adição

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Fonte: Baldo. 2013.

Tabela 2

Tabela de multiplicação

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	3	3
2	0	0	2	2
3	0	0	1	1

Fonte: Baldo. 2013.

A seleção dos livros foi feita considerando aqueles que permitissem por meio da leitura de definições e exemplos produzir algum significado matemático para o conceito de anel e que compõem as ementas da disciplina de estruturas algébricas de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade norte paranaense, demonstrando certa preferência de alguns professores por esses livros.

Os livros selecionados foram: Domingues e Iezzi (2003), Hefez (1993), Lang (1972), Hernstein (1970).

Resultados das análises

Iniciando a leitura a partir do livro de Hefez (1993) seguem as análises e os resultados.

Hefez (1993) define anéis já no 2º capítulo, intitulado *Os Números Inteiros e Racionais*, para motivar a caracterização dos inteiros. Percebe-se isso a partir do seguinte comentário.

> 1. Os Números inteiros
>
> O conjunto Z dos números inteiros é munido de duas operações, uma adição (+) e uma multiplicação $(\cdot)$, além de uma relação de ordem $(\leq)$. Estes objetos se relacionam através de várias propriedades que listaremos ao longo das três próximas subseções. Esta lista de propriedades caracterizará completamente os números inteiros. (p. 23).

Logo em seguida, apresenta a seguinte definição:

> Sejam A um conjunto e (+) e $(\cdot)$duas de operações em A, chamadas de adição e multiplicação. A terna (A, +, $\cdot$) será chamada de anel se as operações gozarem das seguintes propriedades.
>
> A_1 (**A adição é associativa**). Quaisquer que sejam a, b, c $\in$ A, tem-se que $(a+b)+c=a+(b+c)$.
> A_2 (**A adição é comutativa**). Quaisquer que sejam a, b $\in$ A tem-se que $a+b=b+a$
> A_3 (**Existe um elemento neutro para a adição**) Existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha+x=x$, para todo $x \in A$.
> A_4 (**Todo elemento de A possui um simétrico**) Para todo $\alpha \in A$, existe $a' \in A$ tal que $a+a'=\alpha$.
> M_1 (**A multiplicação é associativa**) Quaisquer que sejam a, b, c $\in$ A tem-se que $(a.b).c=a.(b.c)$.
> M_2 (**A multiplicação é comutativa**) Quaisquer que sejam a, b $\in$ A, tem-se que $a.b=b.a$.
>
> M_3 (**Existe um elemento neutro para a multiplicação**) Existe $e \in A$ com $e \neq 0$, tal que $x.e=x$ para todo $x \in A$.
>
> AM (**A multiplicação é distributiva com relação à adição**) Quaisquer que sejam a, b, c $\in$ A, tem-se que $a.(b+c)=a.b+a.c$. (Hefez, 1993, p. 24)

A partir da leitura desse texto gerou-se o seguinte significado para anel:

A: Um anel é um conjunto numérico, uma generalização dos inteiros, munido das operações de adição e multiplicação que goza das propriedades associativa e comutativa para a adição e a multiplicação, a existência de elemento neutro para a adição e para a multiplicação, a existência de simétrico aditivo para qualquer elemento e a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Estabelecido um núcleo a partir deste significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico dos Inteiros.

Operando neste campo semântico não se produziu significados para os anéis de matrizes, (Mn (A), +, .), no qual não importa a natureza de seus elementos, por não ser o conjunto dos inteiros.

Por sua vez, Lang (1972) apresenta a definição de anel da seguinte maneira:

> Um anel R é um conjunto, cujos objetos podem ser adicionados e multiplicados, (i. e. são dadas correspondências $(x,y) \rightarrow x+y$ e $(x,y) \rightarrow xy$ de pares de elementos de R, em R), e que satisfaz às seguintes condições:
>
> AN 1. Sob a adição, R é um grupo aditivo (abeliano)
> AN 2. Para todos x, y, z ∈ R temos
> $x(y+z) = xy + xze(y+z)x = yx + zx$
> AN 3. Para todos x, y, z ∈ R, temos $(xy)z = x(yz)$.
> AN 4. Existe um elemento e ∈ R, tal que $ex = xe = x$ para todo x ∈ R.(p. 40)

Percebe-se que o autor utiliza o conceito de grupo aditivo para definir anel.

Lang (1972) apresenta ainda alguns exemplos de anéis:

> Exemplo 1. Seja R o conjunto Z dos inteiros; R é um anel;
> Exemplo 2. Os conjuntos dos números racionais, reais e complexos são anéis;
> Exemplo 3. Seja R o conjunto das funções contínuas com valores reais, definidas no intervalo [0, 1]. A soma e o produto de duas funções f, g são definidas da maneira usual, ou seja, $(f+g)(t) = f(t) + g(t) e\ (fg)(t) = f(t)g(t)$. Com isso, R é um anel. (p. 40)

Isto leva a produzir outro significado para anel:

B: Um anel é um conjunto qualquer, munido das operações de adição e multiplicação, que satisfaz as condições de ser um grupo aditivo abeliano, e com a multiplicação ser comutativa, associativa e distributiva à esquerda e a direita e possuir elemento neutro para a multiplicação.

Estabelecido um núcleo a partir desse significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico Conjunto qualquer - Associatividade.

Operando neste campo semântico compreende-se o conjunto vazio como sendo um anel, na qual pode demonstrar que o conjunto goza de todas as propriedades necessárias por vacuidade. Enquanto que os conjuntos 2Z = {0, ± 2, ± 4, ...} e $M_2(R)$ não seriam, por não possuir elemento neutro para a multiplicação e não gozar a propriedade comutativa para a multiplicação, respectivamente.

Já o livro de Hernstein (1964) introduz o Capítulo 3 intitulado *Teoria dos Anéis*, dizendo que anéis são alguns dos sistemas algébricos que funcionam como as pedras fundamentais para as estruturas que compreendem a matéria hoje denominada álgebra moderna, os quais provêm do conjunto dos inteiros, sendo cópias e generalizações dos aspectos algébricos dos inteiros ordinários. E define anel como:

> Um conjunto não vazio R é dito um anel associativo se em R estão definidas duas operações, indicadas por + e $\cdot$ respectivamente, tais que para todos a, b e c em R:

(1) $a + b\ está\ em\ R.$

(2) $a + b = b + a.$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) Existe um elemento 0 em R tal que $a + 0 = a$ (para cada a em R).
(5) Existe um elemento $-a$ em R tal que $a + (-a) = 0$.
(6) $a.b$ está em R.
(7) $a.(b.c) = (a.b).c$.
(8) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(b + c).a = b.a + c.a$ (as duas leis distributivas). (pp. 101-102)

O autor apresenta a possibilidade de termos um anel que não satisfaça a associatividade da multiplicação quando diz:

> Sempre que falarmos de anel será entendido que queremos dizer anel associativo. Anéis não-associativos, isto é, aqueles em que o axioma 7 não vale, podem ocorrer em matemática e são estudados, mas não teremos oportunidade de considerá-los. (Hernstein, 1970, p. 102)

A leitura dessas frases propostas por Hernstein induz a gerar o seguinte significado para anel:

C: Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido das operações de adição e de multiplicação, satisfaz a condição de ser um grupo abeliano com relação à operação de adição, fechado com relação à multiplicação, associativo para a multiplicação e distributivo em relação à adição.

Estabelecido um núcleo a partir desse significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico Conjunto não vazio.

Operando neste campo semântico pode-se afirmar que a tripla $(R, +, \cdot)$ (definida anteriormente) é um anel, mesmo não satisfazendo a propriedade associativa para a multiplicação.

Outro encaminhamento pode ser identificado em Domingues e Iezzi (2003). Os autores apresentam a definição de anel como inspiração das propriedades compartilhadas pelo sistema dos números inteiros, e o defini como:

> Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição$(x, y) \rightarrow x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \rightarrow xy$, é chamado anel se:

(i) $(A, +)$é um grupo abeliano, ou seja:
a) $Se\ a, b, c\ \in A, então\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade);
b) $Se\ a, b\ \in A, então\ a + b = b + a$ (comutativa);
c) Existe um elemento $0_A \in A$ tal que, qualquer que seja $a\ \in A, a + 0_A = a$ (existência do elemento neutro);
d) Qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento em A, indicado genericamente por $-a$, tal que $a + (-a) = 0_A$ (existência de opostos).
(ii) A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é:
se$a, b, c \in A, então\ a(bc) = (ab)c$.
(iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer:
$se\ a, b, c \in A, então\ a(b + c) = ab + ac\ e\ (a + b)c = ac + bc$. (p. 211)

Em Domingues e Iezzi (2003) os autores apresentam alguns anéis, considerados por ele como importantes:

i. Anéis numéricos
   (a) anel dos números inteiros: (Z, +, .);
   (b) anel dos números racionais: (Q, +, .);
   (c) anel dos números reais: (R, +, .);
   (d) anel dos números complexos: (C, +, .).
ii. Anel das classes de resto módulo m
iii. Anéis de matrizes
iv. Anéis de funções
v. Produtos diretos. (p. 213)

A partir da leitura desse resíduo de enunciação houve a produção de mais um significado:

D: Anel é um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}$ e uma multiplicação $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{xy}$ que satisfaz a condição de ser um grupo abeliano sob a adição, a multiplicação goza da propriedade associativa e distributiva em relação à adição.

A atividade de produção de significado em relação a um núcleo, constituído pelo significado acima, será chamada aqui de campo semântico conjunto não vazio - associativo.

Operando neste campo semântico tem-se que a tripla$(R,+,\cdot)$ apresentada não é um anel, por não gozar da propriedade associativa para a multiplicação enquanto que os conjuntos 2Z = {0, ± 2, ± 4, ...} e M_2(R) são.

Discussão dos resultados

Por meio dos significados produzidos para o conceito de anel a partir dos livros didáticos analisados, percebe-se que, provavelmente, os objetos produzidos por um aluno a partir do livro, por exemplo, de Hefez (1993) serão diferentes daqueles produzidos pelo de Lang (1972). Ficam evidentes que são diversas as maneiras que esse conceito matemático pode ser pensado, entre essas diversas maneiras têm-se: como um conjunto numérico e duas operações quaisquer, como um conjunto qualquer e as operações de adição e multiplicação usuais, e para cada um desses modos gozando ou não determinadas propriedades.

Consequentemente, os Campos Semânticos em que um aluno pode operar podem ser diversos e nem sempre são os esperados pelo professor.

Considerações finais

Percebem-se neste artigo alguns significados, sob a ótica dos MCS, que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros didáticos. É claro que outros significados podem ser produzidos para os mesmos resíduos de enunciação analisados, constituindo diferentes núcleos e consequentemente, diferentes Campos Semânticos.

Concorda-se com Oliveira (2002) quando diz que:

> ...o professor de Matemática na sua prática em sala de aula muitas vezes fala de diferentes significados para uma mesma ideia como se fossem os mesmos, ou entendendo-os distintos, como se estabelecer relações entre eles fosse algo fácil ou natural.

Pensando nessas possibilidades em sala de aula, é necessário que o professor, em sua prática docente se atente para os diferentes significados que seus alunos produzam para as ideias matemáticas apresentadas a eles, sem valorizar um ou outro significado, mas criando um espaço comunicativo com tarefas que incentivem a produção de significados, e que todos eles sejam valorizados e discutidos, possibilitando assim, intervir e interagir no processo de ensino e aprendizagem quando necessário.

Limitações do estudo e pesquisas futuras

Esta pesquisa limitou-se a analisar cinco livros didáticos a partir de uma leitura plausível, por isso acredita-se que significados diferentes dos apresentados possam ser produzidos por outras pessoas que se proponham a analisar os mesmos textos ou livros diferentes dos selecionados aqui. Mas, com os resultados obtidos e sabendo das possibilidades de se estudar os significados que podem ser produzidos para conceitos matemáticos, propõe-se para pesquisas futuras a seguinte questão: como valorizar nas aulas de Álgebra Abstrata os diferentes significados produzidos pelos alunos?

Referências

Campos, E. (2009). *A noção de congruência algébrica no Curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba). Recuperado em http://www.ppge.ufpr.br/teses/D09_campos.pdf

Baldo, H. (2013). Um exemplo de anel finito não-associativo [em linha]. Instituto de matemática, estatística e computação científica. Recuperado05 maio 2014 em http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/CURSOS/Heitor2_2013.pdf.

Domingues, H. H., & Iezzi, G. (2003). Anéis e Corpos. In *Álgebra Moderna* (4ª ed. pp. 210-280). São Paulo, SP: Atual.

Franco, H. J. R. (2011). *Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: identificação e análise* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. Recuperado em http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2012/02/DISSERTA%C3%87%C3%83O-Hernando.pdf

Hefez, A. (1993). Os Números Inteiros e Racionais. In *Curso de Álgebra* (2ª ed. pp. 22-41). Rio de Janeiro, RJ.

Hernstein, I. N. (1970). Teoria dos Anéis. In *Tópicos de Álgebra* (pp. 101-156). São Paulo, SP: Polígono.

Lang, S. (1972). Anéis. In *Estruturas Algébricas* (pp. 40-54). Rio de Janeiro, RJ: Ao livro técnico S.A.

Lins, R. C. (2012). O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In C. L. Angelo, E. P. Barbosa, J. R. Santos, S. C. Dantas, & V. C. A. Oliveira (Eds.), *Modelo dos campos semânticos e educação matemática* (pp. 11-30). São Paulo, SP: Midiograf.

Oliveira, V. C. A. (2002). *Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear* (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro). Recuperado em http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/91119.

Silva, A. M. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Recuperado em http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/102156.

Souza, S. A. O. (2008). *O ensino de Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática*. Recuperado 10 junho 2014 em http://www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm