Abordagem contextualizada e compreensão relacional: em busca de uma identidade para o curso inicial de Cálculo

Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br

Resumo

A investigação de doutorado realizada pelo autor por meio de entrevistas orientadas pelametodologia da História Oral Temática e envolvendo também a análise de livros didáticos adotados como referência em diferentes épocas revelou ser urgente a constituição de uma identidade para o curso inicial de Cálculo a ser ministrado nas graduações da área de Ciências Exatas. Para isto, devem-se levar em consideração os problemas construtores e os conceitos chaves desse campo de conhecimento. Propõe-se,neste trabalho, uma reflexão a respeito de dois aspectos: a necessidade de favorecer aos estudantes não somente uma compreensão instrumental, mas também uma compreensão relacional dos conceitos e a importância de se abordar determinado ente matemático por meio de uma contextualização adequada. Recorre-se à alguns elementos referentes à noção de limite de uma função para exemplificar, por meio de preocupações didáticas detectadas em alguns dos livros analisados, o tipo de abordagem que está sendo proposta.

Palavras chave: ensino superior, cálculo, contextualização, compreensão instrumental, compreensão relacional.

Introdução

Com o objetivo de analisar como havia sido implantada e se desenvolvido, no primeiro curso superior de Matemática a funcionar no Brasil, a disciplina introdutória de Cálculo Diferencial e Integral, realizamos entre os anos de 2008 e 2012, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), a investigação de doutorado intitulada *A Disciplina de Cálculo I do Curso de*

Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994. Nesta, com base na análise de documentos oficiais da universidade, de livros adotados como referências nos cursos ministrados na mesma e, principalmente, com base na análise de entrevistas realizadas com pessoas envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo na instituição em diferentes épocas, estudamos de que maneira a referida disciplina havia sido implantada e de que forma havia se modificado, ao longo dos anos, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas. As entrevistas foram planejadas e realizadas segundo os preceitos da História Oral Temática (Garnica (2007)) e os dados obtidos foram analisados de acordo com aquilo que Bolívar (2002) denomina de Análise Paradigmática.

A pesquisa realizada, de abordagem qualitativa, não foi embasada em um único referencial teórico. Durante o desenvolvimento do estudo, percebemos que não seria necessário recorrer a uma teoria que fundamentasse todo o estudo realizado, mas sim a considerações teóricas específicas a respeito dos eixos de análise adotados, como, por exemplo, reflexões a respeito da constituição do Cálculo e da Análise Matemática como campos de conhecimentos e como disciplinas acadêmicas universitárias, além de discussões teóricas referentes às diferentes concepções de rigor, suas relações com a intuição e o surgimento de preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática e, especificamente, no trabalho com as disciplinas de Cálculo e de Análise.

Os dados obtidos referentes ao que se passou na Universidade de São Paulo não refletem apenas a realidade daquela instituição, já que a estrutura implantada na mesma durante muito tempo serviu de modelo aos demais cursos universitários de Ciências Exatas que passaram a funcionar no país. “o curso da USP não é somente característico daquela instituição; é um curso de uma universidade que, em certa época, foi referência e parâmetro para outras” (Lima, 2012, p. 18).

Na época em que a Universidade de São Paulo foi criada e estruturou-se o primeiro curso superior de Matemática do país, introduziu-se, de acordo com Mattos (2011), o ensino desta ciência baseado nas ideias do formalismo, movimento matemático bastante difundido na Europa nas primeiras décadas do século XX. Quando a USP foi fundada, o Cálculo já era ensinado no país, mas houve uma total reorientação na abordagem dada a este campo de conhecimento a partir de então. Ao invés de estudarem inicialmente Cálculo Diferencial e Integral, de uma maneira mais intuitiva e menos voltada ao rigor simbólico formal, os alunos do primeiro ano dos cursos de graduação na área de Ciências Exatas, passaram a estudar diretamente Análise Matemática, com ênfase na formalização, ainda que precoce, dos conteúdos tratados. Esta organização seguia o modelo europeu e sua implantação foi

> "Consequência direta daquilo que estava se passando em contextos mais amplos, relacionados ao próprio processo histórico de desenvolvimento da Matemática, à constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento, ao nível de rigor considerado como ideal pelos matemáticos para o ensino do Cálculo na época em que a USP foi fundada e à influência exercida pelo movimento formalista” (LIMA, 2014, p. 134).

A partir desta nova orientação, por meio dos dados coletados em Lima (2012, p.10-11), percebemos que as preocupações didáticas manifestadas pelos professores em diferentes épocas, bem como cuidados deste tipo presentes nos livros utilizados por eles como referência, estiveram, na maioria das vezes, intimamente relacionados ao desejo de se fornecer aos estudantes condições para que estes pudessem, de fato, compreender abordagens bastante rigorosas e formais do Cálculo, o que culminou, na década de 1960, em uma nova reorientação da disciplina, agora influenciada pelo modelo norte-americano, que passou a ser difundido no Brasil por meio de livros didáticos que começaram a ser cada vez mais adotados pelas universidades. De acordo com Lima (2014, p. 136), no modelo norte-americano,

> "Em um primeiro momento, o estudante, em um curso denominado Cálculo, trabalhava de maneira mais manipulativa com os conceitos, com ênfase em seus significados, nos procedimentos algorítmicos envolvendo tais conceitos e na maneira como os mesmos poderiam ser utilizados na resolução de alguns problemas matemáticos. Já em um segundo momento, em um curso denominado Cálculo Avançado, os conteúdos estudados no Cálculo eram retomados de maneira analítica, com um nível mais elevado de rigor simbólico-formal, em uma abordagem semelhante àquela presente na disciplina Análise Matemática do modelo europeu".

Conforme destacamos em Lima (2012), o que se passou na USP e nas demais instituições brasileiras que adotaram seu modelo de organização vai na contramão da história da constituição do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática como campos de conhecimentos. Se no processo histórico de desenvolvimento de ambos, na tentativa de justificar de maneira rigorosa os processos adotados naquele ramo da Matemática que hoje conhecemos como Cálculo, estabeleceu-se a Análise, no ensino superior brasileiro, a partir da fundação da Universidade de São Paulo, ao invés de, em um curso introdutório, tentar-se apresentar, sem tanto formalismo e com um nível menos elevado de rigor, os significados e idéias básicas do Cálculo, tentou-se diretamente uma abordagem bastante crítica, analítica, rigorosa e formal. Foi sempre a dificuldade dos estudantes em acompanhar aquele curso que se convencionou chamar de Análise, quem estabeleceu as diretrizes para o ensino do Cálculo.

Os dados apresentados e discutidos em Lima (2012) explicitam que durante o processo de implantação e de desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo no Brasil segundo o modelo difundido pela USP, não houve uma preocupação em refletir a respeito de quais são os objetivos específicos de tal disciplina nos cursos de graduação na área de Ciências Exatas. Em momento algum se discutiu o Cálculo pelo próprio Cálculo, levando-se em consideração seus conceitos basilares e suas aplicações. Consequentemente, no ensino superior brasileiro, não se constituiu ainda uma identidade para a disciplina introdutória de Cálculo. A importância de se refletir a respeito da necessidade da constituição de tal identidade é discutida em Lima& Silva (2012) e, da mesma forma que Rezende (2003), acreditamos que para o seu estabelecimento, "é necessário voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus problemas construtores, suas potencialidades e seus significados, procurando nele mesmo o nível de rigor possível e as metas de seu ensino" (Lima& Silva, 2012, p. 16).

> "É preciso que haja uma reflexão a respeito do que acrescenta à formação matemática do estudante cursos de Cálculo, como muitos presentes em instituições brasileiras, que se resumem a um grande receituário de como calcular derivadas e integrais ou ainda qual a vantagem de, como usualmente se tem feito, ministrar cursos extremamente rigorosos e formais se todo esse formalismo parecer, ao estudante, sem serventia alguma, uma vez que dele só será cobrado o domínio de técnicas de cálculo" (Lima, 2013, p. 8).

Neste trabalho, discutiremos dois aspectos a serem levados em consideração durante esse processo de construção de uma identidade para a disciplina inicial de Cálculo a ser ministrado aos ingressantes nos cursos superiores de Exatas. São eles: a necessidade de favorecer aos estudantes também uma compreensão relacional dos conceitos e não somente uma compreensão instrumental dos mesmos, no sentido destacado por Skemp (1976); e a necessidade de se abordar determinado ente matemático por meio de uma contextualização adequada que, ao contrário do que têm afirmado muitos educadores atualmente, não precisa ser somente por meio de problemas do cotidiano ou por meio de questões aplicadas de outras áreas de conhecimento, mas também no âmbito da própria Matemática. Conforme discutiremos, a nosso ver, estas duas questões – a necessidade de possibilitar ao estudante uma compreensão relacional de Matemática e a busca por maneiras adequadas de se contextualizar os conceitos matemáticos a serem trabalhados - estão intimamente interligadas. Após apresentar algumas considerações teóricas a respeito das ideias de compreensão instrumental ou relacional da Matemática e também sobre a contextualização de conceitos matemáticos, daremos, com base em preocupações didáticas observadas em manuais analisados em Lima (2012), um exemplo de abordagem contextualizada do conceito de limite que, em nossa visão, pode favorecer a compreensão relacional de tal ente matemático.

Compreensão Relacional e Compreensão Instrumental da Matemática

O professor inglês Richard R. Skemp, que ao buscar uma integração entre a Matemática, a Educação e Psicologia se tornou um dos pioneiros na área de Educação Matemática, em artigo publicado originalmente em 1976, diferencia dois tipos de compreensão que um estudante pode ter dos conceitos matemáticos: a *relacional* (saber tanto o que fazer quanto o porquê)e a *instrumental* (saber fazer, mas sem necessariamente ter clareza a respeito do porquê e do que está envolvido naquilo que se está fazendo). Embora, a primeira vista, tais tipos de compreensão possam parecer excludentes, de acordo com o autor, a maioria dos assuntos matemáticos requer uma combinação de ambos.

A compreensão relacional, que o autor associa ao ato de aprender por meio do uso da inteligência, apoia-se não em uma infinidade de regras a serem memorizadas, cada uma para ser empregada em um caso particular, em uma situação específica, mas sim em um edifício solidamente erguido por meio de estruturas de conhecimento, com base nas quais o estudante, quando solicitado, poderá desenvolver uma grande variedade de planos de ações frente à determinada situação. Já a compreensão instrumental, associada por Skemp ao ato de aprender por hábito, caracteriza-se pela memorização de fórmulas e regras e muitas vezes um estudante que tem apenas uma compreensão instrumental da Matemática, ao se deparar com uma situação problema, pode até ser capaz de resolvê-la, mas não necessariamente o fato de chegar a esta solução implica que o mesmo tenha efetivamente compreendido todos os aspectos nela envolvidos (Skemp, 1989).

O aprendizado por meio do hábito, associado à compreensão instrumental, segundo Skemp (1989, p. 43-44) contribui para que o estudante se torne cada vez mais dependente de um professor que continue provendo-o com regras e estratégias específicas para cada novo modelo de situação a ser trabalhada nas aulas de Matemática, uma vez que ele envolve uma multiplicidade procedimentos ao invés de princípios gerais. Por outro lado, de acordo com o mesmo autor, a aprendizagem inteligente, associada à compreensão relacional, desenvolve a confiança do estudante em suas próprias habilidades para enfrentar as dificuldades que surgirão no momento em que este se deparar com situações matemáticas novas e, neste caso, o professor será visto por ele como alguém que poderá lhe auxiliar a ampliar a sua própria compreensão a respeito de determinado assunto.

Outro aspecto destacado por Skemp (1989, p. 37-39) é que a compreensão relacional é mais adaptável e, consequentemente, mais efetiva, uma vez, de posse da mesma, os estudantes poderão buscar construir diferentes planos de ação para trabalhar com circunstâncias nas quais as regras já conhecidas por eles não podem ser aplicadas. Para Skemp (1976), a compreensão relacional, por possibilitar ao estudante compreender não somente que determinado método funciona, mas também o porquê dele funcionar, permite, além de relacionar cada uma das situações-problema aos seus métodos de resolução, adaptar para os novos problemas o método já conhecido, não sendo necessário aprender (ou memorizar) regras novas para cada novo tipo de situação. Desta forma, a compreensão relacional exige mais raciocínio e menos memorização, sendo, portanto, paradoxalmente, mais difícil de aprender (uma vez que exige, além do aprendizado de algumas regras, a compreensão das conexões existentes entre as mesmas) do que aquilo que é trabalhado por meio de uma abordagem instrumental, mas também mais fácil de lembrar (favorecendo, portanto, que haja menos a reaprender quando for necessário mobilizar algum conceito já estudado).

Para muitos professores talvez possa parecer que enfatizar regras e procedimentos forneça resultados positivos mais rapidamente (além de exigir com que uma quantidade menor de conteúdo seja trabalhada), uma vez que os estudantes, mesmo sem ter necessariamente compreensão do porquê de tais regras, do que há por trás das mesmas, são, em geral, capazes de resolver os exercícios propostos e o aprendizado parece estar garantido. Mas a este respeito, Skemp (1989) destaca que, embora pareça mais fácil em curto prazo, a compreensão instrumental da Matemática se torna bastante difícil em longo prazo em razão de sua falta de consistência interna. É preciso que os professores tenham consciência de que o aluno ser capaz de utilizar regras não quer dizer que ele possua compreensão a respeito dos conceitos envolvidos na situação em questão. E conforme pontua o autor supracitado, para que o aluno possa querer compreender de forma relacional, o professor também precisa ensinar segundo esta mesma orientação. Deve proporcionar ao estudante que ele entre em contato com situações por meio das quais ele, por si só, perceba que dominar regras não é o bastante para que tenha sucesso na aprendizagem da Matemática. Além disso, o professor deve ficar atento para não adotar um livro que traga somente uma abordagem instrumental da Matemática. Se em sala de aula os conceitos são apresentados de forma relacional, o livro adotado também deve ter este aspecto incorporado.

Conceitos matemáticos intimamente interligados são, em muitas ocasiões, especialmente na educação básica, trabalhados como se fossem independentes, aspecto este acentuado quando o professor faz a opção por apresentar a Matemática apenas de forma instrumental. Uma abordagem relacional desta ciência pode favorecer com que os estudantes comecem a perceber que muitas ideias necessárias para a compreensão de determinado objeto matemático são também fundamentais para o entendimento de muitos outros e que há conceitos fundamentais que inter-relacionam áreas inteiras da Matemática (Skemp, 1976).

Diversas causas contribuem para que, não raramente, os professores optem por uma abordagem instrumental da Matemática. Uma das principais diz respeito aos currículos estarem muito sobrecarregados. Muitas vezes os professores, por falta de tempo, acabam passando muito rápido por conceitos que demandariam maior reflexão por parte do estudante. Conforme destaca Skemp, seria mais produtivo enxugar os currículos em termos da quantidade de conteúdo para que houvesse mais tempo de realmente ensinar aquilo que fosse de fato trabalhado.

Assim como no ensino da Matemática na educação básica, nos cursos universitários esta ciência também deve ser trabalhada em sala de aula visando proporcionar aos estudantes uma compreensão relacional de seus objetos. E, desta forma, o processo de construção de uma identidade para uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral a ser ministrada aos ingressantes nos cursos superiores das áreas de Ciências Exatas também passa, obrigatoriamente, por reflexões a este respeito. O professor de Cálculo deve organizar suas aulas de forma a tratar relacionalmente cada um dos conceitos fundamentais deste campo de conhecimento, bem como deve escolher como referência para seu trabalho e para complementar suas aulas livros que também manifestem esse tipo de preocupação e não somente abordem os conteúdos de forma instrumental. Da mesma forma, deve sempre se preocupar com a maneira de contextualizar os conceitos a serem trabalhados. É exatamente a respeito de contextualização que trataremos em seguida.

A contextualização, em sala de aula, de um conceito matemático

Muito tem se falado a respeito da importância do professor contextualizar aquilo com que irá trabalhar em sala de aula, mas, especialmente no caso da Matemática, a ideia de contextualização mais difundida é muito restritiva e refere-se, quase sempre, a buscar em situações ditas 'do cotidiano do estudante' aplicações daquele conceito que está sendo abordado. Mas será que contextualizar de fato é apenas isso? Aplicar os resultados aprendidos em problemas que envolvam situações próximas do dia-a-dia dos estudantes? A contextualização está necessariamente relacionada com aplicação? Não pode ser feita no âmbito da própria Matemática? Que benefício pode trazer, efetivamente, para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática? Na busca por elementos que nos permitissem iniciar algum tipo de reflexão a este respeito, chegamos ao trabalho de Maioli (2012), desenvolvido com o objetivo de investigar a contextualização como princípio pedagógico e construir conhecimentos que permitam a compreensão de seus propósitos e usos.

Um dos significados para o termo *contextualizar* encontrados por Maioli na versão digital do dicionário Caldas Aulete[1] e que vem ao encontro da ideia que levaremos em consideração neste trabalho é o seguinte: "contextualizar é entender, analisar ou interpretar o significado de algo levando em conta o contexto, as circunstâncias de ocorrência". Percebe-se, portanto, que a contextualização de um conceito matemático pode ser relacionada ao processo de construção de significados para o mesmo, uma vez que, conforme salienta Maioli (2012, p. 52), o contexto "é o conjunto dos elementos, comportamentos ou fatos que interferem ou colaboram na atribuição de sentidos de uma ação comunicativa".

Para Silva (2009), o processo de contextualizar pode ser entendido como um entrelaçar de assuntos ou categorias, o que é explicitado pela própria origem do termo contextualização, que provém da palavra latina *contextus*, do verbo *contexère*, que significa entrelaçar, reunir tecendo. A própria palavra *contextus* também dá origem ao termo *contextura*, que é o entrelaçamento dos fios de um tecido ou ainda a maneira como as partes de um todo de dispõem e se conectam. (Maioli, 2012, 18).

Assim como Maioli (2012), entendemos que um conceito estar descontextualizado "não significa que não esteja associado a alguma experiência do cotidiano. Significa que o conceito não foi compreendido no ambiente de ocorrência, no caso, no ambiente matemático" (p. 51), que não foram exploradas situações por meio das quais tenha sido possível favorecer a construção do conhecimento por meio de articulações realizadas no âmbito da própria Matemática. Assim

[1] http://www.aulete.com.br – ultimo acesso no dia 25 de agosto de 2014.

como afirma Nascimento (2009), em trabalho citado por Maioli (2012, p.91), a contextualização do conhecimento matemático pode ser concebida como "uma abordagem onde este é tratado de forma vinculada a outros conhecimentos, o que faz com que o conteúdo a ser aprendido mostre-se necessário e não uma imensidão de algoritmos isolados e dispensáveis".

A contextualização nas aulas de Matemática deve caracterizar-se, portanto, pela preocupação do professor em possibilitar que seus alunos explorem o máximo possível as relações existentes entre os conceitos que estão sendo trabalhados. Como estabelecem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, a contextualização deve aparecer "não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático" (Brasil, 2008, p. 83). Além disso, no mesmo documento, destaca-se que "o professor precisa ter consciência de que a contextualização pode, e deve ser efetivada em qualquer que seja o modelo de aula (...) tanto em aulas mais tradicionais, expositivas, quanto em aulas de estudo do meio, experimentação ou desenvolvimento de projeto" (p. 35).

Nota-se, portanto, de acordo com o que foi discutido, que conforme revela o próprio significado do termo contextualização, se o professor souber contextualizar de maneira adequada um determinado conceito matemático ao trabalhar com ele em sala de aula, estará, consequentemente, explorando as diversas relações entre o mesmo e outros entes matemáticos que fazem parte do mesmo contexto, o que possibilitará com que o estudante tenha condições de compreender os significados daquilo que está sendo apresentado e perceba que tal conceito engloba muito mais aspectos além dos procedimentos algorítmicos normalmente associados a ele. E isto possivelmente contribuirá para o desenvolvimento de uma compreensão relacional do conceito em questão por parte do estudante. Desta forma, tanto a busca por uma contextualização adequada para aquilo com que se está trabalhando quanto à preocupação por possibilitar ao aluno uma compreensão relacional desta ciência podem ser percebidos como aspectos interligados nos processos de ensino e de aprendizagem. É preciso, portanto, que, na busca por uma identidade para uma disciplina inicial de Cálculo, se reflita simultaneamente, como propomos neste artigo, a respeito de tais elementos.

Visando ilustrar uma possível abordagem contextualizada e que favoreça a compreensão relacional do Cálculo por parte do estudante, vamos considerar o conceito de limite de uma função e, com base em preocupações didáticas detectadas em livros utilizados como referências em alguns dos cursos de Cálculo analisados em Lima (2012), propor uma forma de trabalhar com alguns aspectos referentes a este conteúdo que parece atender a estes propósitos.

Um exemplo de abordagem contextualizada e relacional de alguns aspectos ligados à noção de limite de uma função

Um primeiro aspecto que, a nosso ver, deve ser levado em consideração ao se trabalhar com determinado conceito matemático é a maneira como este trabalho será iniciado, isto é, a forma como tal conceito aparecerá pela primeira vez em sala de aula. No caso da noção de limite de uma função isto se torna ainda mais relevante e a esse respeito Moise (1972) traz, em seu prefácio, algumas considerações. Segundo o autor, realmente o problema de motivar a ideia de limite de uma função envolve uma dificuldade particular, já que os únicos casos em que é fácil de calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ são aqueles nos quais a função f é "contínua, dada por uma fórmula simples (...) [que] funciona para $x = a$ tão bem como para os outros valores de x; na prática acontece que o limite é $f(a)$" (prefácio). Conforme salienta Moise, se a noção de limite de uma função for introduzida por meio da análise de casos como estes, o estudante será, “provavelmente, levado à ideia de que a expressão $\lim_{x\to a} f(x)$ é simplesmente uma descrição desonesta e pretensiosa de $f(a)$” (prefácio). Por outro lado, ainda segundo o autor, se o professor partir da análise de casos realmente significativos, como, por exemplo, a expressão $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$, irá se deparar com grandes dificuldades técnicas e será bastante complicado conseguir material tratando de problemas acessíveis. Também não é uma solução interessante, de acordo com Moise, partir da ideia de limites de sequências, uma vez que, no Cálculo Diferencial, o que se necessita, de fato, é calcular limites de funções. A sugestão trazida pelo manual é que a noção de limite seja introduzida não como um tópico específico, mas sim como um artifício para resolver um problema. Em seu texto, a ideia de limite é inicialmente apresentada na seção que trata do Problema das Tangentes, quando o leitor se depara, pela primeira vez, com o cálculo do limite de uma função linear. Segundo destaca Moise, a ideia utilizada neste caso consiste simplesmente em “fechar o buraco de uma reta perfurada. Este processo não tem nenhum significado intrínseco. Mas no contexto [considerado], tem um significado extrínseco, porque é usado para resolver um problema não trivial, a saber, (...) achar a inclinação da [reta] tangente a uma parábola” (prefácio). Para o autor, essa é uma forma simples de se introduzir a ideia em questão e que, além disso, coloca-a em conexão com a discussão de outros conceitos, de outros problemas matemáticos (no caso a determinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado e a própria definição de reta tangente).

Considerando o gráfico da função y, cuja expressão algébrica é $y(x) = x^2$, o autor parte do ponto (1,1)

> “No qual queremos achar a inclinação da tangente. Para todo outro ponto (x, x^2) da curva, consideramos a secante L_x por (1,1) e (x, x^2). (Note que L_x é determinada por x.) Então a inclinação de L_x é
>
> $$m_x = \frac{x^2 - 1}{x - 1}(x \neq 1).$$
>
> Aqui, a restrição algébrica $x \neq 1$ reflete o fato geométrico que é preciso dois pontos distintos para determinar uma reta. Refere-se, também, evidentemente, ao fato que frações com denominador 0 não tem sentido.
>
> Traçaremos agora o gráfico de $y = m_x(x \neq 1)$. Temos
>
> $$y = m_x = x + 1\ (x \neq 1).$$
>
> O gráfico é uma reta da qual um ponto foi suprimido. Para $x = 1$, não existe nada parecido com a reta secante por $(1,1)$ e $(1, 1^2)$; para $x = 1$, não existe a fração $m_1 = 0/0$. Mas isto não causa nenhuma dúvida porque é fácil ver que m_x está próximo de 2 quando x está próximo de 1. Expressamos isto escrevendo
>
> $$\lim_{x\to 1} m_x = 2.$$
>
> Leia-se: “o limite de m_x, quando x se aproxima de 1, é igual a 2”. Ao explicar o que isto significa, usamos o termo *próximo*, bastante não matemático, cujo significado parece um pouco vago. Você pode ser capaz de pensar num modo mais exato de expressar esta ideia (Moise, 1972, p. 44 – 46).

E esse “ser capaz de pensar num modo mais exato de expressar esta ideia” nos leva a discutir outro aspecto a ser considerado numa abordagem contextualizada da Matemática que vise também à compreensão relacional por parte do estudante: os significados dos simbolismos envolvidos nas definições matemáticas e, consequentemente, os significados das próprias definições. Spivak (1975) traz em seu manual um encaminhamento da noção de limite que leva em consideração este aspecto e que nos parece bastante adequado do ponto de vista didático. O autor apresenta, inicialmente, aquilo que chama de “definição provisória” de limite: “a função f tende ao limite l para valores de x próximos de a, se pudermos tomar $f(x)$ tão próxima quanto quisermos de l tornando x suficientemente próximo de a, mas sendo diferente de a” (p. 99). Salienta ainda que não interessa o valor da função no ponto a e nem mesmo se a função está definida em tal ponto. Destaca também que uma maneira conveniente de representar a afirmação de que f tende a l para valores de x próximos de a é desenharmos duas retas, cada uma delas representando $\mathbb{R}$, e flechas que vão desde um ponto x de uma até $f(x)$ da outra. Esta representação, se explorada pelo professor, possivelmente poderá contribuir para uma compreensão relacional, por parte do estudante, da definição de limite e dos elementos simbólicos nela presentes, uma vez que ilustram de maneira bastante intuitiva, ideias fundamentais envolvidas em tal definição, como, por exemplo, as noções de intervalo e de vizinhança.

> “Considere agora a função cuja representação tenha o aspecto da figura 3. Suponhamos que se exija que $f(x)$ esteja próximo de l, que está no interior do intervalo aberto B desenhado na figura 3. Esta exigência é automaticamente satisfeita se considerarmos somente os números x do intervalo A da figura 3. (Neste diagrama elegemos o maior intervalo entre todos aqueles que cumprem a exigência; qualquer intervalo menor contendo a seria válido). Se elegermos um intervalo $B´$ menor (figura 4), precisamos eleger um $A´$ menor e por menor que seja o intervalo escolhido B, terá sempre que haver algum intervalo aberto A correspondente”.

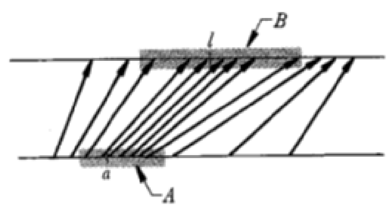

FIGURE 3

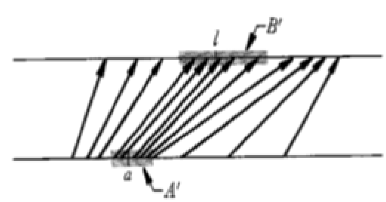

FIGURE 4

(Spivak, 1975, p. 100-101).

E Spivak torna a discussão ainda mais rica afirmando que “é possível uma interpretação gráfica parecida em termos do gráfico de f, porém, neste caso, o intervalo B deve ser desenhado sobre o eixo vertical e o conjunto A sobre o eixo horizontal” (p. 101). E, neste caso, “o fato de $f(x)$ estar em B quando x está em A significa que a parte do gráfico que está por cima de A está contida na região limitada pelas retas horizontais que passam pelos extremos de B” (p. 101).

Após explorar estas representações por meio de diversos exemplos, Spivak passa a destacar os problemas presentes na definição provisória de limite apresentada anteriormente, encadeando as ideias de forma a inter-relacionar o que foi trabalhado até então com os elementos que estarão presentes na definição de limite, dando maiores condições aos estudantes para que estes, de fato, possam compreender os significados deste objeto matemático em seu ambiente de ocorrência (o que caracteriza um tratamento contextualizado do mesmo) e possam compreendê-lo não somente como uma conjunto de técnicas, mas sim como um conceito fundamental em Matemática (o que caracteriza uma compreensão relacional). O autor afirma que, na definição provisória, “não está claro como se pode “fazer” $f(x)$ próximo a l (qualquer que seja o significado da palavra próximo) “fazendo com que” x esteja suficientemente próximo de a (por mais próximo que tenha que ser o “suficientemente próximo”)” (p. 109). A este respeito, Protter & Morrey (1962) também apresentam considerações em seu manual que podem ser utilizadas pelos professores de Cálculo para que estes evidenciem aos estudantes o porquê da linguagem simbólica-formal utilizada nas definições matemáticas. Os autores afirmam que, ao se apresentar, no manual, a noção intuitiva de limite, fez-se referências àintervalos se tornando “pequenos”, números “se aproximando”, quantias “aproximadamente nulas”, e assim por diante, mas que, no entanto, os sentidos dessas expressões “não-matemáticas” podem variar enormemente de pessoa para pessoa e, por essa razão, não podem servir de base para a definição de uma estrutura matemática, sendo necessário formular as definições recorrendo-se para isso a um rigor simbólico-formal específico da linguagem matemática.

É exatamente essa ‘tradução’ de uma linguagem imprecisa para outra adequada segundo os princípios do rigor matemático que Spivak (1975) propõe ao destacar em seu manual que é possível chegar por etapas à definição precisa de limite de uma função, esclarecendo, em cada uma destas etapas, aquilo que ainda estiver obscuro:

> “Voltemos, mais uma vez, para nossa definição provisória: A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a, se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de l quanto desejarmos fazendo com que x esteja suficientemente próximo de a, mas seja diferente de a. A primeira mudança que precisamos fazer nesta definição consiste em esclarecer que fazer $f(x)$ próximo a l significa fazer $|f(x) - l|$ pequeno, e o mesmo para x e a. A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a, se pudermos fazer $|f(x) - l|$ tão pequeno quanto desejarmos fazendo $|x - a|$ suficientemente pequeno, porém $x \neq a$. A segunda alteração e ainda mais crucial, consiste em esclarecer que fazer $|f(x) - l|$ “tão pequeno quanto desejarmos” significa fazer$|f(x) - l| < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$ que nos for dado. A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a, se para todo $\varepsilon > 0$ pudermos fazer $|f(x) - l| < \varepsilon$ fazendo com que $|x - a|$ seja suficientemente pequeno e $x \neq a$. (...) Para cada número $\varepsilon > 0$ encontramos algum outro número positivo, que chamamos δ, com a propriedade de que se $x \neq a$ e $|x - a| < \delta$, então$|f(x) - l| < \varepsilon$. (...) A condição $|x - a| < \delta$ é a que nos expressa a pequenez do “suficientemente” pequeno: A função f tende ao limite l para valores de x próximos de a, se para todo $\varepsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que, para todo x, se $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esta é praticamente a definição que iremos adotar. Faremos somente uma alteração trivial, destacando que$|x - a| < \delta$ e $x \neq a$ pode ser igualmente expresso por $0 < |x - a| < \delta$. “ (Spivak, 1975, p. 109-110).

Salienta-se que essa abordagem que está sendo proposta é totalmente distinta daquelas presentes em cursos de Cálculo que priorizam os procedimentos algorítmicos para o cálculo de limites e/ou que apresentam diretamente a definição de tal ente matemático, sem relacioná-la a outros conceitos, sem sequer discutir os elementos nela envolvidos ou refletir a respeito do significado da mesma. O encaminhamento proposto neste trabalho, além de dar condições para que o estudante perceba de fato o significado da definição de limite de uma função e de todo o simbolismo nela presente, também a relaciona explicitamente a outros conceitos matemáticos, como, por exemplo, as ideias de reta tangente ao gráfico de uma função, intervalos, vizinhanças e distâncias.

É claro que a abordagem da noção de limite de uma função envolve diversos outros aspectos além destes considerados neste artigo. O objetivo de apresentar, neste trabalho algumas das preocupações didáticas manifestadas por autores de livros de Cálculo como Spivak, Protter&Morrey e Moise foi apenas ilustrar, recorrendo-se para isso às reflexões a respeito de como introduzir a noção de limite e sobre como construir de maneira significativa a definição de tal objeto matemático de forma a permitir que os estudantes possam perceber o papel desempenhado por cada um dos elementos presentes em tal definição, como trabalhar com este conceito de forma contextualizada e visando possibilitar ao aluno uma compreensão relacional do mesmo.

Considerações Finais

Frente à necessidade de se construir uma identidade para a disciplina inicial de Cálculo a ser ministrado nas graduações da área de Ciências Exatas, é urgente que o professor busque por uma abordagem contextualizada, que procure trabalhar cada um dos conceitos fundamentais da disciplina de forma a relacioná-los com outros entes matemáticos, possibilitando com que os alunos se apropriem dos significados daquilo que está sendo estudado. Neste processo, deve ser também objetivo do docente proporcionar ao estudante não somente uma compreensão instrumental dos objetos que estão sendo estudados, mas também uma abordagem relacional dos mesmos; o foco não devem ser as técnicas, mas sim os conceitos, suas inter-relações e os diferentes elementos presentes em cada um deles.

Ressalta-se que preocupações deste tipo são importantes não somente no (ou para) o Cálculo, mas sim em todas (ou para todas) as disciplinas a serem ministradas em qualquer nível de ensino. Especificamente em relação à busca por uma identidade para o curso inicial de Cálculo, tema central deste trabalho, tais reflexões são apenas algumas das que devem ser realizadas. Esta pesquisa deve prosseguir iluminando outros aspectos ainda não contemplados, dentre os quais, os níveis de rigor com que os conceitos devem ser tratados e o papel das demonstrações em um primeiro curso de Cálculo.

Bibliografia e referências

Bolívar, A. (2002). “De nobis ipsis silemus?”: Epistemologia de alinvestigación biográfico-narrativa em educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4*(1), 01-26. Consultado em 16 de novembro de 2011 em http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-bolivar.html

Brasil (2008). *Secretaria de Educação de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio: linguagens, códigos e suas tecnologias.* Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação.

Garnica, A. V. M. (2007).*História oral emeducação matemática: outros usos, outros abusos*. Guarapuava: SBHMat (ColeçãoHistória da Matemática para Professores).

Lima, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994.* (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

______. (2013). A Implantação e o Desenvolvimento da Disciplina de Cálculo no Brasil: o modelo difundido pela USP. *Anais do VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM).* Montevidéu, Uruguai.

______. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de Cálculo na graduação em Matemática da USP. *Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, 16*(1), 125-149.

Lima, G. L. & Silva, B. A. (2012). O Ensino do Cálculo na Graduação em Matemática: considerações baseadas no caso da USP. *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática(SIPEM).* Petrópolis-RJ.

Maioli, M. (2012). *A contextualização na matemática do Ensino Médio*. (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Mattos, A. C. (2011). A Matemática no Contexto da Criação da Universidade de São Paulo em 1934. *Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática*. Consultado em 25 de setembro de 2013 em http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Mattos_A_C_Matem%C3%A1tica_no_Contexto_da_Cria%C3%A7%C3%A3o_da_Universidade_de_S%C3%A3o_Paulo.pdf

Moise, E. E. (1972). *Cálculo: um curso universitário – volume 1* – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo.

Nascimento, M. J. A. (2009). *A contextualização no livro texto da 1ª série do Ensino Médio*. Consultado em 10 de novembro de 2011 em www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/.../PO58706356400T.doc

Protter, M. H. & Morrey JR, C. B. (1962).*Calculus with Analytic Geometry: a first course*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Rezende, W. M. (2003).*O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*.(Tese inédita de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Silva, M. A. (2009). *Currículos de matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios a para escolha e organização de conteúdos*. (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

______. (1989). *Mathematics in the primary school*. Londres: Routledge.

Spivak, M. (1975).*Cálculo Infinitesimal***.** Barcelona: Reverte.