O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra

André Lúcio **Grande**
Faculdade de Tecnologia de Mauá (Fatec-Mauá)
Brasil
andremath@uol.com.br
Larissa de Oliveira **Nunes**
Faculdade de Tecnologia de Mauá (Fatec-Mauá)
Brasil
nuneslari21@gmail.com
Marlon Polaz da **Silva**
Faculdade de Tecnologia de Mauá (Fatec-Mauá)
Brasil
marlonpolaz@gmail.com

Resumo

Esta oficina visa efetuar o estudo de algumas propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas diferenciáveis no sentido de encontrar qual é o seu invariante geométrico, o que constitui a essência do Teorema Fundamental das Curvas Planas (TFCP). Para tal estudo, será utilizado o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar,o qual possibilita uma manipulação algébrica, geométrica e numérica de forma dinâmica e interativa dos objetos matemáticos. Como fundamentação teórica serão utilizados alguns conceitos ligados ao papel da intuição e da lógica na construção do conhecimento matemático formulados pelo filósofo e matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912). Este trabalho se constitui como sendo do tipo qualitativo, tendo como procedimentos metodológicos a discussão de questões sobre o objeto matemático de estudo bem como a exploração e manipulação de curvas planas por meio do GeoGebra procurando compreender as ideias envolvidas no TFCP.

Palavras-Chave: Curvas Planas, Parametrização, GeoGebra, Curvatura, Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Introdução

Esta oficina originou-se como fruto de nossa experiência em salas de aula ao lecionar dentre outras disciplinas Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para os cursos de graduação em Tecnologia.Durante algumas aulas, ao discutir com alguns alunos funções tais como polinomial de primeiro e segundo graus, exponencial, logarítmica e trigonométrica, ao apresentar a representação gráfica de tais funções, os estudantes tiveram curiosidade de saber diferenciar o "formato" do gráfico de uma função quadrática de uma exponencial ou trigonométrica, por exemplo, do ponto de vista geométrico e não algébrico, ou seja, como caracterizá-las de segundo propriedades geométricas. Isso me fez refletir sobremaneira em grande medida sobre alguns tópicos abordados do CDI e suas possíveis interfaces com outras áreas.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) constitui um importante domínio do conhecimento matemático, sendo que essa disciplina ocupa um lugar de destaque nos cursos em que ela é ministrada, além de ser utilizada nos vários ramos da Matemática. Dentre eles, a Geometria Diferencial de um modo geralfaz um tratamento de curvas e superfícies por meio do CDI e possui aplicações em diversas áreas tais comoFísica, Engenharia, Tecnologia e Astronomia.

Carmo (2012) considera a Geometria Diferencial sob dois aspectos: o estudo local das curvas e superfícies com o uso do CDI e como as propriedades locais influenciam nas propriedades globais do objeto de estudo. As propriedades locais são aquelas que não pertencem à forma do objeto geométrico em questão como um todo, mas somente pertencem às vizinhanças de um ponto desse objeto. Temos, por exemplo, a curvatura de uma curva como propriedade local das curvas e superfícies. Já as propriedades globais consideram o objeto geométrico na sua totalidade, como, por exemplo,a dimensão de uma curva ou o fato da mesma ser aberta ou fechada.

O estudo da Geometria Diferencial permite a aplicação de diversos conceitos matemáticos, tais como curvas no plano e no espaço e superfícies, funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores, além de inter-relacionar diversos ramos da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Sua importância pode ser reiterada segundo Albuquerque (2004):

> "Sem dúvida, a geometria diferencial joga um papel excepcional, mesmo na matemática, toda se tal se pudesse considerar, porque afinal ela conjuga muitas e variadíssimas das matérias da álgebra e da análise. Aparece nas soluções de problemas de várias variáveis reais ou complexas, tratadas como espaços geométricos de dimensão qualquer, ou nos problemas de variáveis discretas, tratadas como abstrações das anteriores (referimo-nos às variedades algébricas); informa-nos sobre as propriedades intrínsecas da morfologia do espaço e suas medidas". (Prefácio do autor, 2004).

Ainda com relação ao seu estudo, o autor reitera que a Geometria Diferencial obriga uma profunda reflexão sobre os conceitos e leva-nos a formulação de novas ideias e teorias, à descoberta de estruturas geométricas antes não imaginadas ou sequer procuradas.

Dentre alguns conceitos abordados num curso de Geometria Diferencial, o estudo das curvas planas, por exemplo, pode englobar alguns elementos que se inter-relacionam, tais como:

- o movimento de um ponto no plano que gera uma curva utilizando alguns conceitos de Cinemática e Dinâmica em Física;
- o estudo do contexto histórico que envolve a gênese e o desenvolvimento do objeto matemático de estudo;
- a exploração do conceito de vetores e suas operações no $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$.
- o envolvimento de diversas áreas da Matemática como Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear, dentre outras.

No que tange às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial observou-se uma escassez de trabalhos e pesquisas ligados ao assunto, o que se pode sugerir a possibilidade de investigações e uma maior exploração do tema em sala de aula por parte dos professores, com uma ampla gama de aplicações e conteúdos que podem ser envolvidos em seu estudo.

Leivas (2009) em sua pesquisa defende a possibilidade de "geometrizar" o currículo de Licenciatura em Matemática, sendo que a imaginação, intuição e visualização podem ser exploradas por meio da Geometria Diferencial e da Geometria Analítica. Para o autor a derivada de uma função, por exemplo, pode ser aplicada e interpretada no estudo da Geometria Diferencial como um vetor tangente em um ponto de uma curva ou no caso de uma superfície pode-se associar o estudo das derivadas parciais como dois vetores linearmente independentes no plano tangente num ponto dessa superfície.

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto em muitas situações, no tocante ao ensino de seus conceitos, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição, a imaginação, o uso de recursos gráficos e geométricos, principalmente no processo de construção do conhecimento, sendo o tratamento dos objetos matemáticos feito de maneira axiomática.

Além da possibilidade de relacionar diversos conteúdos, por meio do contexto histórico e suas aplicações, a Geometria Diferencial permite a exploração da intuição geométrica e da analogia com conceitos ligados à Física por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses objetivando a construção do conhecimento matemático, sendo que o tratamento desses objetos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. Esses elementos serão levados em consideração e discutidos de acordo com o referencial teórico que será apresentado a seguir.

Fundamentação Teórica

O filósofo e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento científico. O autor faz críticas à ciência concebida como absoluta e inquestionável, e discute a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção do conhecimento matemático.

O autor discute em suas obras, como *A Ciência e a Hipótese* (1984), *O Valor da Ciência* (1995) e *Ciência e Método* (2004) alguns temas sobre o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico.

Poincaré defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, pois para o mesmo, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

Com relação ao raciocínio intuitivo, o autor ressalta o apelo aos sentidos e à imaginação, também denominada de intuição sensível, com o uso de representações geométricas, por exemplo. Essa intuição, segundo ele, não pode nos dar a certeza, entretanto a mesma possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Como exemplo, Poincaré (1995) considera a seguinte afirmação: “Se numa reta o ponto *C* está entre *A* e *B* e o ponto *D* esta entre *A* e *C* então o ponto *D* esta entre *A* e *B*”. Para comprovar a veracidade de tal afirmação, somos levados ao recurso geométrico imaginando tal situação. Essa afirmação constitui-se como uma propriedade topológica da reta.

O autor discute a importância da Matemática refutando a mesma como uma ciência feita tendo como vista aplicações, destacando que a mesma pode estar ligada a muitas outras áreas. Para o mesmo, a Matemática tem um tríplice objetivo: deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza; além disso, tem um objetivo filosófico e estético. No que diz respeito ao aspecto pedagógico, ou seja, do ensino da Matemática, o autor defende que “o objetivo principal do ensino da Matemática é o de desenvolver certas faculdades de espírito, das quais a intuição não é a mais importante”.

Sobre o primeiro objetivo descrito pelo autor é que gostaríamos de nos ater e fomentar essa pesquisa, pois vários de seus ramos são imprescindíveis para a compreensão de inúmeros fenômenos ligados, por exemplo, à Física, que mesmo para o próprio autor, estabelece uma relação limítrofe e de “boa vizinhança” com a Matemática. Pode-se considerar que a Geometria Diferencial apresenta tais características de se relacionar com outras áreas como a Física assim como desenvolver algumas cognições como a intuição geométrica por parte dos estudantes.

Ainda sobre o uso da intuição geométrica, Poincaré (1995) cita o caso do matemático alemão Bernard Riemann (1826 – 1866), que apresentou algumas ideias intuitivas muito pertinentes que auxiliam a compreensão de alguns conceitos geométricos.

> “Entre os geômetras deste século, dois nomes são especialmente ilustres; são aqueles dos dois cientistas que fundaram a teoria das funções – Weierstrass e Riemann. Weierstrass reduz tudo à consideração das séries e suas transformações analíticas; melhor dizendo, reduz a análise a uma espécie de prolongamento da aritmética; pode-se percorrer todos os seus livros sem nele encontrar uma figura. Riemann, ao contrário, recorre à geometria: cada uma de suas concepções é uma imagem que, uma vez compreendida seu sentido, ninguém pode esquecer”. (Poincaré, 1995, p. 15).

No caso, por exemplo, de especificar distâncias, Riemann ao reformular alguns conceitos da Geometria procurou encontrar uma forma de medir a velocidade ao longo de uma trajetória numa variedade. Segundo o autor o Cálculo oferece um meio automático de medir os comprimentos das curvas, assim como a álgebra e a trigonometria nos fornece insumos de se medir ângulos.

Em Geometria Diferencial, O Teorema Fundamental das Curvas Planas estabelece qual é o invariante geométrico das curvas planas diferenciáveis parametrizadas, a menos sua posição do plano. Esse teorema engloba vários elementos cujo estudo pode sugerir o raciocínio intuitivo, tais como equações paramétricas, vetores tangente e normal, comprimento de arco, transformações rígidas.

Apesar de a Geometria Diferencial pertencer ao escopo da Matemática Pura, pretendemos mostrar que o estudo de alguns tópicos como o Teorema Fundamental das Curvas Planaspode emergir dessa forma algumas situações pertinentes no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante desse cenário, esta oficina objetiva realizar um estudo de algumas curvas planas utilizando um recurso computacional auxiliarcomo forma de introdução ao estudo da Geometria Diferencial.

Selecionamos o software GeoGebra para a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, visando trabalhar com os estudantes a ideia intuitiva das propriedades locais por meio da Geometria Dinâmica, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

Nessa oficina pretendemos desenvolver por meio da construção de algumas curvas planas parametrizadas diferenciáveis utilizando o GeoGebra algumas propriedades geométricas dessas curvas, por meio de ideias intuitivas, formulação de hipóteses e conjecturas procurando responder aos seguintes questionamentos:

- O que é uma curva plana?
- Quais as propriedades locais e globais de uma curva plana?
- Como caracterizar uma curva plana? Quais são os seus invariantes geométricos?

Para responder tais questões, abordado o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que nos fornece justamente como se caracteriza uma curva plana, a menos de sua posição no plano, por meio de um conceito importante que pode ser estudado tanto em Geometria Diferencial quanto no CDI, como a noção de curvatura de uma curva.

Entretanto, para a compreensão desse conceito, serão apresentados a seguir algumas definições e teoremas que constituem algunstópicos de Geometria Diferencial.

Alguns elementos da Geometria Diferencial

Para o estudo das curvas planas no $\mathbb{R}^2$, vamos apresentar alguns conceitos algébricos e geométricos necessários para o desenvolvimento dessa oficina.

Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que "viva" sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das curvas planas, sua dimensão é igual a um.

Sobre a dimensionalidade, Poincaré (1995) fez uma análise, mesmo que de forma intuitiva, sobre uma definição a respeito desse conceito. O autor define essa noção da seguinte maneira:

> "É bem a mesma ideia; para dividir o espaço, é preciso cortes que chamamos de superfícies; para dividir as superfícies, é preciso cortes que chamamos de linhas; para dividirmos as linhas, é preciso cortes que chamamos de pontos; não se pode ir mais longe, e o ponto não pode ser dividido, o ponto não é contínuo; então as linhas, que podemos dividir com cortes que não são contínuos, serão contínuos de uma dimensão; as superfícies, que podemos dividir com cortes contínuos de uma dimensão, serão contínuas de duas dimensões; enfim, o espaço, que podemos dividir com cortes contínuos de duas dimensões, será um contínuo de três dimensões". (p. 49).

Variedades como curvas e superfícies, por exemplo, podem ser alteradas ou "deformadas" segundo uma transformação topológica. Por transformação topológica de uma figura A em outra A` define-se como sendo uma correspondência

$$p \leftrightarrow p'$$

entre os pontos p de A e p' de A'com as seguintes propriedades:

1) Correspondência bijetiva, ou seja uma correspondência dos pontos uma a um de A para A' e vice-versa.

2) Correspondência contínua em ambas as direções. Isso significa que se tomarmos os pontos p e q de A e deslocarmos p de modo que p e q se aproximam de zero, então a distância entre p'e q'deA'se aproxima de zero e vice-versa.

Em síntese, de um ponto de vista topológico, as curvas planas são denominadas variedades de dimensão um, podendo ser classificadas em abertas ou fechadas, conforme a figura a seguir. Essas curvas podem ser obtidas por meio de outras segundo transformações ou "deformações contínuas", e que a transformação inversa e reversível e contínua. Sendo assim, qualquer curva aberta pode ser deformada e transformada numa reta, assim como curvas fechadas transformadas circunferência.

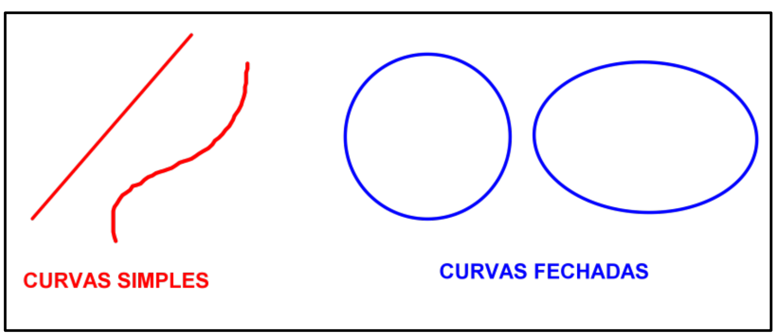

Figura 1. Classificação das curvas

Entretanto, no estudo das curvas planas, a pergunta que pode ser feita: qual o invariante geométrico de uma curva plana transformada por um movimento rígido? Uma transformação é chamada de movimento rígido se qualquer par de pontos de imagem tem a mesma distância que o par correspondente de pontos da imagem inversa. Por transformações rígidas temos, por exemplo, as isometrias tais como rotações e translações.

A Geometria Elementar lida com grandezas tais como comprimentos, ângulos e áreas que não são alteradas pelos movimentos rígidos. Entretanto esses movimentos são considerados casos especiais de transformações topológicas.

Para um estudo geométrico das curvas planas utilizando-se do CDI, uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas dos seus pontos como funções de uma variável independente. Tais curvas são chamadas de curvas parametrizadas diferenciáveis e a variável independente definida num intervalo real denomina-se parâmetro.

No caso das curvas planas diferenciáveis, por meio do estudo local de uma curva munido de uma métrica (no nosso caso utilizaremos a usual, ou seja, a euclidiana) podemos segundo sua curvatura caracterizá-la, a menos a sua posição no plano.

Algumas definições descritas segundo Tenenblat (2008) serão apresentadas a seguir no intuito de analisar algumas características das curvas planas.

Curva Parametrizada Diferenciável

Definição. Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação diferenciável α de C^{∞}, de intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita *parâmetro* da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha(\mathrm{t}), t \in I$, é chamado *traço* da curva.

Essa definição também pode ser expressa pela seguinte representação: uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}))$$

onde as funções $\mathrm{x}(\mathrm{t})$ e$\mathrm{y}(\mathrm{t})$ são diferenciáveis de classe C^{∞}.

Vetor Tangente; Curva Regular

Definição. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$, associa $\alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}))$. O vetor

$$\alpha'(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}'(\mathrm{t}), \mathrm{y}'(\mathrm{t}))$$

é chamado vetor tangente a α em *t*.

Definição. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\nabla\, \mathrm{t} \in I, \alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$.

Comprimento de Arco; Parametrização pelo Comprimento de Arco

Definição. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo *I*. A aplicação

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\mathrm{t})|\, dt$$

é denominada função comprimento de arco da curvaα a partir de t_0. Essa função é diferenciável de classe C^∞, pois α é uma curva regular.

Proposição. Uma curva regularα: $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $|\alpha'(\mathrm{t})| = 1$. Consequentemente, o comprimento do arco da curvaα a partir de t_0a t_1é igual a $t_1 - t_0$, isto é:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\mathrm{t})|\, dt = t_1 - t_0$$

Fórmula de Frenet. Curvatura

Se α: $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento do arco s, então o conjunto de vetores $t(s), n(s)$ é dito *referencial de Frenet* e satisfaz as equações

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

O vetor$t(s) = (\mathrm{x}'(\mathrm{s}), \mathrm{y}'(\mathrm{s}))$ é o vetor tangente unitário e $n(s) = (-y'(\mathrm{s}), \mathrm{x}'(\mathrm{s}))$é o vetor ortogonal a $t(s)$.

O fator de proporcionalidade $k(s)$é chamado curvatura de α em s. A curvatura de uma curva plana regular mede, intuitivamente, o quanto a curva se “dobra” no plano se constitui no invariante geométrico das curvas, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema Fundamental das Curvas Planas

a) Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(\mathrm{s})$, parametrizada pelo comprimento de arco *s*, cuja curvatura é $k(s)$.

b) Se duas curvas $\alpha(\mathrm{s})$ e $\beta(\mathrm{s})$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação *L* e uma translação *T* em $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\beta(\mathrm{s}) = \mathrm{L}\big(\alpha(\mathrm{s})\big) + \mathrm{T}(\alpha(\mathrm{s}))$$

Destacamos que o Teorema Fundamental das Curvas Planas nos mostra que o único invariante geométrico de uma curva plana a menos de sua posição no planoé a curvatura.

Lembrando que a curva $\alpha(\mathrm{s})$ citada anteriormente é única quando fixamos $\alpha(s_0)$= p_0 e $\alpha'(\mathrm{t}) = v_0$,onde$v_0$ é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$.

Metodologia e Procedimentos

Este trabalho apresenta as características de uma pesquisa qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a exploração das propriedades geométricas locais das curvas planas parametrizadas diferenciáveis utilizando como ferramenta auxiliar o software GeoGebra.

Procuraremos nessa oficina investigar esses conceitos descritos anteriormente por meio do software Geogebra buscando caracterizar as curvas planas com a participação dos sujeitos da aprendizagem com a formulação de conjecturas e hipóteses de maneira intuitiva utilizando os recursos do software de maneira interativa.

O GeoGebra permite ainda de maneira dinâmica explorar tais conceitos sem recorrer à excessiva manipulação algébrica necessária para se obter a parametrização da curva pelo comprimento de arco e, posteriormente, sua curvatura.

A oficina será ministrada no Laboratório de Informática, com o número máximo de 20 participantes, tendo como público-alvo de um modo geral estudantes e professores dos cursos de Ciências Exatas e áreas afins. Os participantes utilizarão o software GeoGebra, onde as curvas planas serão construídas e manipuladas. Além disso, os alunos receberão material impresso contendo informações e instruções para o desenvolvimento das tarefas.

Abordaremos os conceitos relacionados ao estudo das curvas planas apresentando como fundamentação teórica as ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor segundo o filósofo e matemático francês Henri Poincaré que em seus trabalhos procura elucidar a importância do uso da intuição no processo de ensino e aprendizagem, particularmente na Matemática, destacando a preocupação com as faculdades intuitivas dos alunos exigidas na aprendizagem e no contato inicial com os objetos matemáticos.

Objeto Matemático

No estudo proposto nessa oficina, inicialmente os participantes responderão num protocolo entregue no início da oficina, mesmo de maneira provisória, as seguintes questões:

- O que é uma curva plana?
- Quais as propriedades locais de globais de uma curva plana?
- Como caracterizar uma curva plana? Quais os seus invariantes geométricos?

Tais questões podem ser respondidas e discutidas num primeiro momento, em que podem ser dados exemplos e contraexemplos no sentido de se estabelecerem conjecturas e hipóteses a respeito dos conceitos envolvidos.

Pode-se discutir também quais são as vantagens e desvantagens de se realizar um estudo das curvas planas por meio de sua parametrização ao invés, por exemplo, de sua expressão analítica dada por uma função, quer seja explícita ou implícita.

A seguir apresentaremos o exemplo da construção no GeoGebra de uma curva plana parametrizada diferenciável, que pode ser estudada tanto de maneira algébrica quanto geométrica.

Vamos estudar algumas características geométricas da parábola $y = x^2$Convém destacar que para a referida curva não temos somente essa parametrização possível cujo traço é igual à referida parábola e que não é o objetivo desse estudo discutir as propriedades geométricas da parábola tais como reta diretriz, foco ou vértice da mesma.

As equações paramétricas dessa curva podem ser dadas segundo a aplicação:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$$
$$t \ \longmapsto \ \alpha(s) = (s, s^2)$$

O vetor tangente será dado por $\alpha'(t) = (1, 2t)$ e o comprimento de arco será obtido por meio de $l(s) = \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 + 2s^2}\, ds$, o que torna o cálculo de sua parametrização pelo comprimento de arco extremamente trabalhoso do ponto de vista algébrico para o estudo do referencial de Frenet e dacurvatura da curva.

Todavia o GeoGebra apresenta uma gama de recursos e comandos que facilitam a obtenção de tais elementos, e o seu estudo passa a ser realizado de maneira dinâmica e interativa.

Para isso, basta criarmos as funções $a(s) = t$ e $b(s) = s^2$ e definirmos a curva: $c: I \to \mathbb{R}^2$

$$c(s) = \big(a(s), b(s)\big)$$

com $I = [-5,5]$, por exemplo.

Podemos ainda criar um ponto P(a(s),b(s)) que pertença a curva, teremos o traço segundo a figura a seguir:

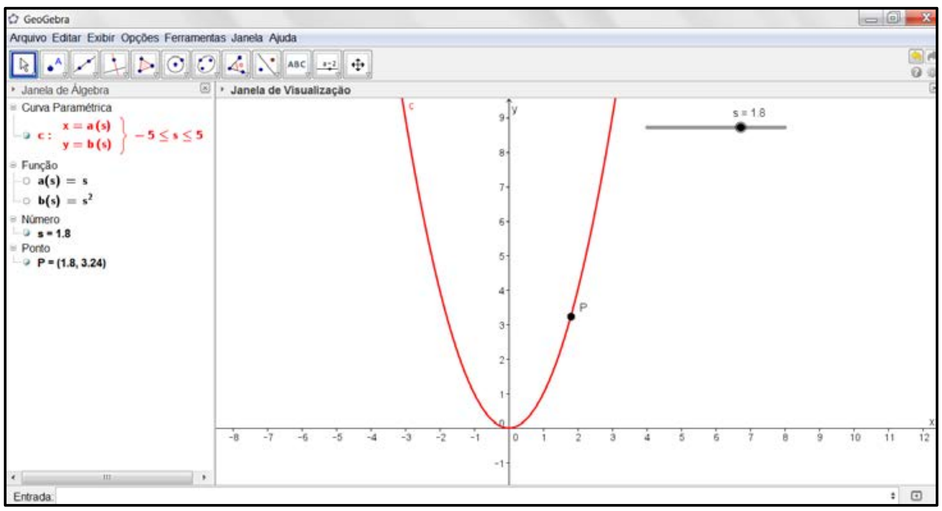

Figura 2. Curva c(t) parametrizada diferenciável

O GeoGebra permite obter os vetores *v (tangente)*, *n (normal)*, e seus respectivos vetores unitários u_1 e u_2 que constituirão o referencial de Frenet. Além disso, é possível determinar a curvatura *k* da curva c no ponto P, conforme a figura a seguir:

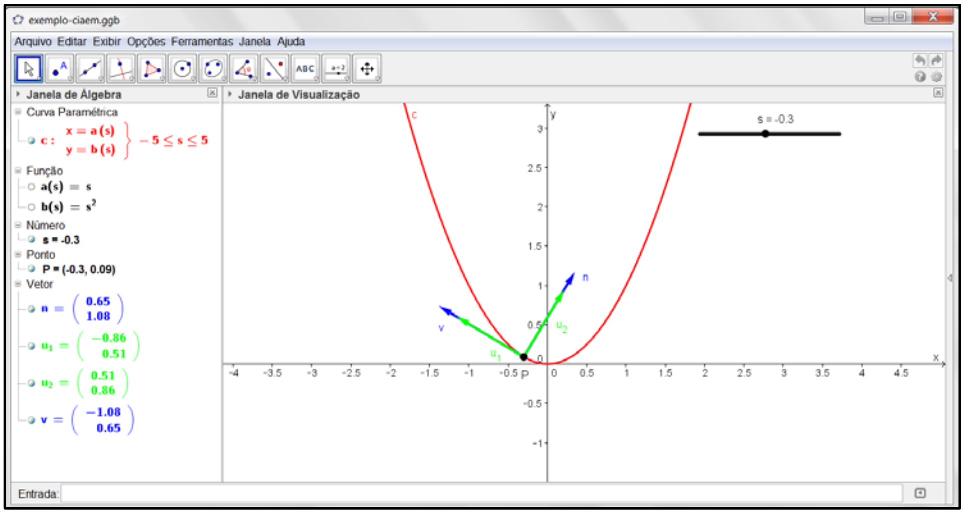

Figura 3. Referencial de Frenet para a curva c.

Com o valor da curvatura k da curva é possível construir um gráfico *k x s* por meio de um ponto C de coordenadas variáveis (s, k) que representa a variação da curvatura em função do parâmetro t e observar com isso o que ocorre com a forma da curva c quando temos o valor de k positivo, negativo, crescente ou decrescente, conforme a figura a seguir.

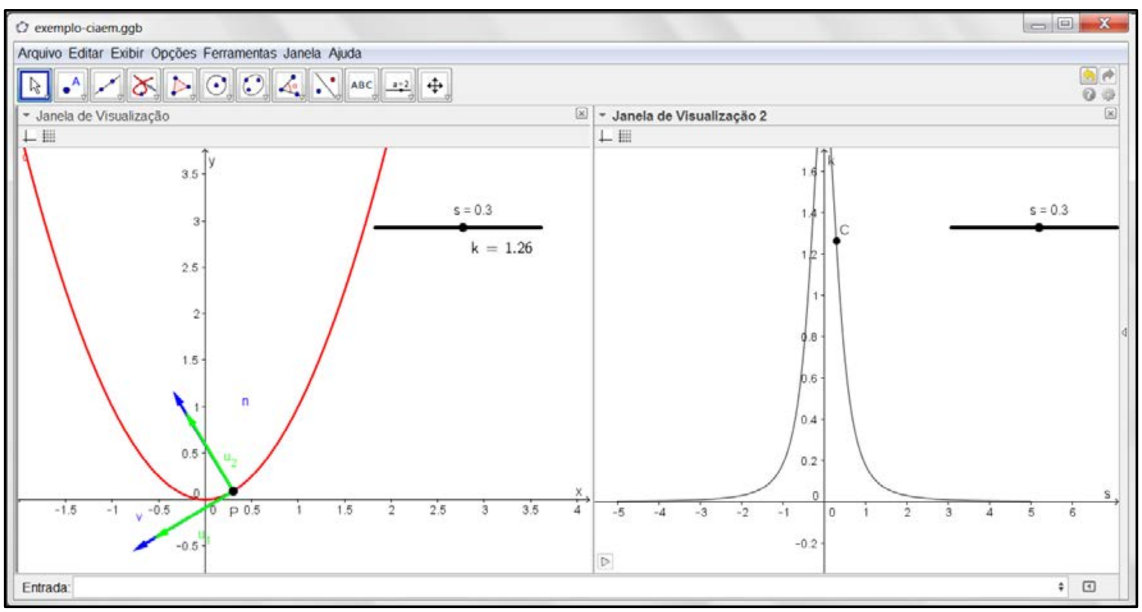

Figura 4. Curvatura k da curva c

Essa construção permite, por exemplo, discutir nas aulas de CDI, em grande medida, a questão da monotonicidade de uma função por meio de sua representação gráfica e pelos sinais das derivadas de primeira e segunda ordem da função.

Uma exploração extremamente producente que pode ser realizada a partir do gráfico k x t seria procurar esboçar uma curva plana que represente a curvatura dada.

Para estudar o Teorema Fundamental das Curvas Planas de uma maneira intuitiva podemos construir outras curvas a partir da curva $c(t) = (t, t^2)$ por meio de transformações rígidas e questionar o que acontece com o valor da curvatura bem como os vetores tangente e normal

Esse procedimento se configura num exemplo de se procurar formalizar a essência do teorema de que o único invariante geométrico de uma curva plana, a menos sua posição no planosob transformações rígidas é a sua curvatura.

A partir daí pode-se realizar manipulações com outras curvas planas parametrizadas como forma de explorar os resultados encontrados.

Para se formalizar os conceitos abordados nessa oficina, as questões propostas inicialmente podem ser retomadas e discutidas provavelmente objetivando compreender melhor as ideias envolvidas no teorema.

A proposta dessa oficina pode ser estendida, por exemplo, no estudo de curvas no $\mathbb{R}^3$, o que possibilita a produção de inúmeras questões conforme procuramos aqui descrever, o que pode ser apresentada em uma próxima oportunidade.

Referências e bibliografia

Albuquerque, R. (2004). *Introdução à Geometria Diferencial*. Departamento de Matemática. Universidade de Évora, Portugal.

Araújo, P. V. (2008). *Geometria Diferencial*. Coleção Matemática Universitária. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Carmo, M. F. (2013). *Introdução ao curso de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA.

Courant, R. e Robbins, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Guidorizzi, H. L. (2014). *Curso de Cálculo*, v.1-4. Rio de Janeiro: Gen, 2014.

Leivas, J. (2009).*Imaginação e Visualização: a Riqueza de Possibilidades da Abordagem Geométrica no Currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática*. (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Paraná.

Poincaré, H. (2008). *Ensaios Fundamentais*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (2004). *Science and Method*. Translated by Francis Maitland. New York: Barnes e Noble Books.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (1984). *A Ciência e a Hipótese*. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB.

Stewart, J. (2009). *Cálculo* – Volume 1. Tradução da 6° edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning.

Tenenblat, K. (2008). *Introdução àGeometria Diferencial*. Brasília: Universidade de Brasília.