



Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas

Walter F. **Castro G.**

Universidad de Antioquia

Colombia

wfcastro82@gmail.com

Germán **Cadavid A.**

Universidad Tecnológica de Pereira

Colombia

gcadavid@utp.edu.co

Luis R. **Pino-Fan**

Universidad de Los Lagos

Chile

luis.pino@ulagos.cl

Resumen

En este documento se informa sobre los significados institucionales que se le atribuyen a la derivada en el curso de Matemáticas I en la Universidad Tecnológica de Pereira, provincia de Risaralda, Colombia. Igualmente se estudian los contextos en los que enmarcan los significados; estos se han identificado mediante un análisis de configuraciones epistémicas realizado a 12 exámenes aplicados en un lapso de cinco años y al libro de ejercicios diseñado ex profeso para el curso. A partir de dicho análisis se identifican y caracterizan las configuraciones epistémicas las cuales llevan asociadas significados parciales de la derivada. Los significados institucionales identificados en los exámenes corresponden mayoritariamente a: derivabilidad y derivadas laterales por definición; verificación de derivadas, y fórmulas de derivación. Los contextos en los que se ubican las tareas matemáticas son del tipo evocado y matemático.

Palabras clave: significado institucional, derivada, configuración epistémica, educación.

Abstract

It is reported on the contexts proposed and on the meanings assigned to the derivative that are used in a mathematics course offered to freshmen at Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda's province, Colombia. The meanings are identified by means of epistemic configurations analysis applied to 12 exams over a span of five years. Based on the epistemic analysis some epistemic configurations linked to the derivative were identified. The institutional meanings identified correspond mainly to: derivability and lateral derivatives computed via the formal definition; use of the rules of derivation, and the verification of some derivative identities. The context where the tasks are located corresponds to evocated and mathematical.

Keywords: meaning, derivative, epistemic configuration, education.

Presentación

El estudio del Cálculo Diferencial e Integral forma parte de los planes de estudio que las universidades ofrecen a los estudiantes inscritos en carreras de ingeniería, ciencias o educación matemática. Diversas investigaciones informan sobre la enseñanza del cálculo (Artigue, 1995; Badillo, 2003) y señalan algunas de sus problemáticas (Sofronas, DeFranco, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder y Hamelin, 2011). Algunos estudios reportan sobre la comprensión gráfica que los estudiantes manifiestan sobre la derivada (Habre y Abboud, 2006), o sobre la comprensión sobre la regla de la cadena (Clark; Cordero; Cottrill; Czarnocha; Devries; St. John; Vidakovic, 1997). Biza y Zachariades (2010, p. 26) reportan que los estudiantes de su estudio preparan las pruebas haciendo énfasis en el desarrollo de algoritmos y fórmulas para uso específico. La derivada ha sido investigada desde diversas perspectivas, que incluye la cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores...) e instruccional (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se reporta en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006). Diversas investigaciones que indagan sobre los significados manifestados por los estudiantes, han informado sobre la existencia de conflictos entre las construcciones de los estudiantes y los significados formales o institucionales presentados por los libros de texto (Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). Es de interés estudiar e identificar los significados matemáticos preferenciados por las instituciones educativas y por los profesores así como conocer las creencias declarativas de los profesores, en tanto que tales significados determinan el tipo de énfasis formativo que las instituciones educativas prefieren. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011; p. 174) el significado global de referencia se define “*a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio)*”. En este trabajo entenderemos el significado de referencia como “el sistema de prácticas que usan como referencia para enseñar el concepto de derivada”. Asumiremos que los significados que se ponen en juego tanto en el diseño de los exámenes como en el diseño expreso del libro de ejercicios constituyen el significado de referencia en la institución educativa particular. El Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, provincia de Risaralda, Colombia, ha asumido un enfoque particular para orientar la evaluación del curso de Matemáticas I. Este enfoque deposita la responsabilidad de diseño de los exámenes en un grupo de profesores. Los profesores que orientan los cursos deben, entonces, preparar a sus estudiantes para que aprueben

los exámenes diseñados por el grupo de profesores encargados del diseño de las pruebas. Asumimos que la preferencia manifiesta de los profesores encargados del diseño de las pruebas corresponde a la preferencia institucional tanto de los conceptos que se deben estudiar como de los logros que los estudiantes deben alcanzar para aprobar el curso motiva el interés por conocer, en detalle, los significados institucionales sobre la derivada, que es el objeto matemático que se estudia en el curso. La derivada ha adquirido diversos significados a lo largo de la historia. Pino-Fan, Godino y Font (2011, p. 171) han encontrado nueve significados distintos asociados a la derivada a lo largo de la historia. La búsqueda de los significados institucionales de referencia para los profesores, se hace tomando en cuenta dos fuentes: un libro de ejercicios, diseñado exprofeso por la Facultad de Ciencias Básicas, y los doce exámenes que se aplicaron a los estudiantes durante un lapso de ocho años. Los exámenes son aplicados a los estudiantes sin discriminación por tipo de carrera. Los significados preferidos por la Institución son los que determinan tanto el contenido temático de los planes de curso, los objetivos, los énfasis instruccionales escogidos por los profesores y, finalmente, el diseño de los exámenes que son propuestos a los estudiantes. Los resultados de estos exámenes son un factor determinante en la permanencia de los estudiantes en el sistema universitario. En este documento se reporta sobre dos aspectos: (a) los significados institucionales enfatizados por la Universidad Tecnológica de Pereira, identificados en los exámenes aplicados durante el periodo 2006-2010; (b) Los contextos en los cuales se ubican las preguntas incluidas en los exámenes.

Enfoque teórico

El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la Instrucción y la Cognición (Godino, Batanero y Font, 2007) ha afrontado el problema de la significación y representación del conocimiento matemático mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológicos, semióticos y socioculturales. Esto supone asumir una cierta relatividad socio-epistémica para el conocimiento matemático ya que el conocimiento se considera ligado indisolublemente a la actividad en la cual el sujeto se implica y es dependiente de la institución cultural y contexto social del que forma parte (Radford, 1997). Los significados institucionales se estudian usando el EOS, y se utilizan tanto las entidades primarias, como las dualidades, para caracterizar los significados institucionales del objeto matemático derivada en el curso de Matemáticas I. Concretamente, se utiliza la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) para efectuar un análisis de los conocimientos matemáticos involucrados en las soluciones de las tareas matemáticas, la cual refiere a la descripción y caracterización de los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales.

Contexto

El estudio se realiza en la Universidad Tecnológica de Pereira, universidad pública localizada en la provincia de Risaralda, Colombia. Cada semestre académico, aproximadamente 1200 estudiantes se matriculan en el curso de Matemáticas I, asignatura que es prerrequisito de otros cursos de los planes de estudio de las carreras de la facultad de ingeniería, ciencias exactas y ciencias de la educación. Un concepto importante en el listado temático del curso Matemáticas I, es la “función derivada”. La importancia curricular concedida por la Universidad al objeto derivada, se reconoce tanto en el porcentaje alto concedido para su evaluación (50% de la nota total) como en el tiempo (42 horas o 39.2 % del tiempo total del curso) de clase magistral.

Metodología y análisis de datos

La metodología usada en esta investigación es de carácter documental (Cohen, Manion y

Morrison, 2011). Los documentos fuente, para el análisis reportado en este documento, fueron el libro de ejercicios diseñado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad, y 12 exámenes de Matemáticas I, los cuales fueron aplicados a los estudiantes del curso durante el periodo 2006-2010. Los documentos estudiados fueron codificados, de acuerdo con varios criterios, de los cuales sólo usamos dos para este reporte de investigación: *configuraciones epistémicas* y *tipos de contextos*. Se utilizó la propuesta de configuraciones epistémicas descritas en Pino-Fan, Godino y Font (2011). Se asumió la propuesta sobre los tipos de contexto de Martínez (2003) ampliada por Font (2007) para estudiar los contextos en los cuales se ubicaban las preguntas de los exámenes. Para determinar las configuraciones epistémicas se resolvieron todos los exámenes y se analizaron los grupos de ejercicios, por capítulo, contenidos en el libro de ejercicios. Se utilizó el análisis epistémico (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) que identifica las entidades primarias presentes y emergentes, que se ponen en juego en la solución de una tarea: lenguajes, situaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y definiciones. A partir de las soluciones y del análisis epistémico, se establecieron las entidades primarias: términos, conceptos, procedimientos y propiedades que se requieren para dar solución a cada pregunta del examen. Se identificaron 6 Configuraciones Epistémicas (CE), que caracterizan los diversos significados vinculados con la derivada. Las seis configuraciones son: 1) CE1: Tangentes; 2) CE2: Derivabilidad y derivadas laterales por definición; 3) CE3: Verificación de derivadas; 4) CE4: Reglas de Derivación; 5) CE5: Fórmulas de Derivación; y 6) CE6: Aplicaciones. Para determinar los contextos en los cuales se ubicaban las preguntas de los exámenes se analizaron los enunciados de las preguntas y los enunciados de los ejercicios propuestos en el libro. La propuesta de Font (2007) amplía a cuatro los contextos: real, simulado, evocado y matemático, y considera el contexto como el trasfondo en el cual se ubican las situaciones o problemas. El contexto real refiere a “la situación de práctica «real» de las matemáticas, al entorno sociocultural donde la práctica tiene lugar” (Martínez, 2003; p.191). El simulado “refiere a una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características” (Martínez, 2003). El contexto evocado “refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho...” (Martínez, 2003; p.191). Finalmente, el contexto matemático refiere a una situación intra-matemática. Vinculados a los contextos se ubicaron las aplicaciones de los objetos matemáticos. Los tres tipos de aplicaciones propuestos en los exámenes son: A1-Graficación; A2-Razones de cambio relacionadas y A3-Optimización.

Resultados

Por razones de espacio sólo se informa sobre los resultados de los análisis correspondientes a Configuraciones Epistémicas encontradas (Tabla 1); los tipos de contexto para las preguntas de los exámenes parciales aplicados durante el periodo 2006-2010 (Tabla 2) y las configuraciones epistémicas cruzadas con los contextos (Tabla 3). La Tabla 1 cruza las Configuraciones Epistémicas con los exámenes -cuarto y quinto- aplicados en el periodo 2006-2010. Se colige que durante el periodo 2006-2010 las configuraciones CE2, CE3 y CE5 fueron preferenciadas. Estas configuraciones corresponden a CE2: *Derivabilidad y derivadas laterales por definición*; CE3: *Verificación de derivadas*, y CE5: *Formulas de Derivación*. Las tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada o el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades. El carácter procedimental y algebraico identificado en la preferencia por estas tres configuraciones es notable. Artigue (1995) advierte que aunque es importante enseñar a los alumnos a realizar cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, es importante enfatizar otros aspectos del concepto para favorecer que los estudiantes

logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el núcleo de este campo de las matemáticas. Zandieh (2000) sugiere que un estudiante no exhibe comprensión amplia sobre el concepto derivada, si éste no puede, en algún contexto relevante, reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada.

Tabla 1

Configuraciones epistémicas en el cuarto y en el quinto examen de Matemáticas I.

Configuraciones epistémicas	Periodo 2006-2010																		
	CE1		CE2		CE3		CE4		CE5		CE6		SCE1		SCE2		SCE3		
Años	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5	4	5	
Año 1 (2006)	-		✓		✓		-		✓	✓	-	✓							
Año 2	-	-	✓	✓	-	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓					
Año 3	-	✓	✓	✓	✓		-		✓	✓	-	✓							
Año 4		-	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓							
Año 5 (2010)		-	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	-	✓							

Nota. Los guiones indican que los exámenes, en los años correspondientes, no incluyeron una pregunta en tal configuración.

La Tabla 2 muestra los tipos de contexto identificados para el cuarto y quinto examen, correspondiente al periodo 2006-2010. La inclusión de tareas en contexto se vincula con la matemática como actividad de carácter humano. Si consideramos que durante los 5 años hubo 25 ocasiones para formular preguntas -cinco por cada año- de estas el 18% corresponden al contexto matemático, mientras que 82% corresponden al contexto evocado. Este contexto refiere a las situaciones matemáticas propuestos por el profesor que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho matemático.

Tabla 2

Tipos de contexto para el cuarto y quinto examen en el periodo 2006-2010.

Año	Pregunta 1		Pregunta 2		Pregunta 3		Pregunta 4		Pregunta 5	
	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°
Año 1 (2006)	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim
Año 2	Evo	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	...	Sim
Año 3	Mat	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim
Año 4	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim
Año 5 (2010)	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Mat	...	Mat

Nota. Los puntos suspensivos indican que los exámenes, en los años correspondientes, no incluyeron una quinta pregunta. “Mat” representa Matemático; “Evo” representa Evocado y “Sim” representa “Simulado”.

La Tabla 3 muestra los contextos empleados y las configuraciones epistémicas contempladas en el cuarto y quinto examen de Matemáticas I para el periodo 2006-2010.

Tabla 3

Contextos versus configuraciones epistémicas.

Cuarto examen y quinto examen. Periodo 2006-2010	Configuraciones Epistémicas: CE									
	4° examen					5° examen				
Contextos										
<i>Evocado</i>	CE1	CE2	CE3	CE4	CE5	CE2	CE3	CE4	CE5	
<i>Real</i>			...					CE6		
<i>Simulado</i>			...					CE6		
<i>Matemático</i>	CE1	CE2	CE3	CE4	CE5			CE2		

Al cruzar los contextos matemáticos con las configuraciones epistémicas se aprecia que, para el cuarto examen, las configuraciones aparecen distribuidas en los dos tipos de contexto referidos: evocado y matemático, sin embargo para el quinto examen, las configuraciones se vinculan con cada uno de los contextos. Para ambos exámenes, las configuraciones se concentran en el contexto evocado. Esta distribución se interpreta en términos de la presencia constante de los cinco tipos de configuraciones a lo largo del tiempo.

Conclusiones

Las configuraciones de significados y los tipos de contexto que surgen en las diferentes versiones del cuarto y quinto examen aplicado a los estudiantes muestran las preferencias institucionales manifestadas por los diseñadores de los exámenes y por ende, por la Universidad. La visión institucional de la Universidad para el concepto de derivada se decanta hacia el conocimiento de los procedimientos algebraicos vinculados con la derivada. Tal visión se identifica en la preferencia de las tres configuraciones: *Derivabilidad y derivadas laterales por definición* (CE2); *Verificación de derivadas* (CE3); y *Formulas de Derivación* (CE5). Las tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada o el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades. Los tres procesos planteados por Zandieh (2000) -razón, límite y función- están escasamente representados en el conjunto de exámenes. En las pruebas estudiadas no se explora la comprensión gráfica de la derivada, por ejemplo, no se proponen gráficas que modelan fenómenos de variación para que se encuentren las expresiones algebraicas que pueden describir tales comportamientos. La regla de la cadena se explora solo en su manifestación simbólica, cuando se aplica a varias funciones compuestas, pero no se explora su uso en problemas de modelación. Tampoco se exploran ejercicios en donde la derivada dependa de dos parámetros lo que favorece que el estudiante pueda hacer uso de los elementos matemáticos de la derivada y establecer relaciones entre ellos variando estos parámetros (Sánchez-Matamoros; García y Llinares, 2006). Los contextos elegidos para ubicar los conceptos son mayoritariamente dos: el evocado y el matemático. Stillman (2009) plantea una distinción entre modelación y resolución de problemas: en la modelación matemática se inicia con las matemáticas se termina con la realidad. Por su parte, con la resolución de problemas se inicia en la realidad se termina con las matemáticas. En los términos anteriores la preferencia institucional de la Universidad se decanta por la modelación matemática, es decir, “iniciar con los conceptos y terminar en la realidad”.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez

(Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at postsecondary level. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 1011 – 1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Biza, I.; Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218–229.

Clark, J.M.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; Devries, D.J.; St. John, D.; Tolia, G.; Vidakovic, D. (1997) Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), 345-364.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 – 442.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. En De Bock, D; Søndergaard B.D., Gómez-Alfonso B & Litwin Cheng, . C. (Eds.) *ICME 11*. Morelia: ICME.

Habre, S.; Abboud, M. (2006) Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72, 2006.

Mundy, F. J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: understanding limits, derivatives and integrals. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MAA Notes 33, (pp. 31-45). Washington DC: Mathematical Association of America.

Martinez Silva, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de la Ciencias Experimentales. Bellaterra, Universidad Autònoma de Barcelona. Doctorado.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141 – 178.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de

derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85 – 98.

Sofronas, K. S. D., T.C; Vinsonhaler, C; Gorgievski, N; Schroeder, L; Hamelin, C (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus ? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 131-148.

Stillman, G. (2009, Jun 4). Implementing applications and modelling in secondary school: Issues for teaching and learning. *Keynote address delivered at the Mathematics Teachers Conference, Singapore*.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En Dubinsky, E., Schoenfeld, A. J. & Kaput, J. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV Vol. 8*, (pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society