Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso

Fabio**Orfali**
Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa
Brasil
fabioo1@insper.edu.br
Tadeu Aparecido Pereira **daPonte**
Insper – Instituto de Ensino e Pesquisa
Brasil
tadeuap@insper.edu.br

Resumo

O uso da linguagem matemática formal em cursos introdutórios de Cálculo, ministrados no ensino superior, pode representar, para uma parte significativa dos alunos, uma barreira intransponível para a construção de significado. No Brasil, a barreira torna-se ainda maior, dado que os alunos não têm qualquer contato com os conceitos básicos de Cálculo no Ensino Médio. Propõe-se neste trabalho a contextualização como uma estratégia para diminuir essa barreira, especificamente no entendimento do conceito de limite. O estudo de caso apresentado exemplifica como a contextualização envolvendo o cálculo do imposto de renda pode contribuir para a criação de significado em relação aos conceitos de continuidade e limite, iniciando a sua construção em uma etapa anterior à introdução da linguagem formal.

Palavras chave: Cálculo Diferencial, limite, continuidade, linguagem matemática,contextualização, imposto de renda.

Como apontado por Costa (2011, p.167), o estudo do Cálculo Diferencial não faz parte do currículo do Ensino Médio brasileiro, nem mesmo em caráter introdutório, diferentemente do que ocorre em países como Portugal, Espanha, França e Estados Unidos (DGE – Portugal; BOE 147 – Espanha;Boletim 2011 – França; NCTM – Estados Unidos). Tal particularidade não pode ser ignorada quando se planeja o ensino dessa disciplina nos cursos universitários brasileiros.

Pelo contrário, devem-se buscar alternativas que diminuam o impacto causado pela apresentação, com todo formalismo matemático, de um conteúdo cujas ideias fundamentais não foram trabalhadas em um nível mais básico.

Porém, diversos trabalhos (Barufi, 1999; Rezende, 2003; Lima, 2014) revelam um quadro desalentador para o ensino de Cálculo na maioria das universidades brasileiras, com médias de aproveitamento sofríveis e elevados índices de reprovação nessa disciplina. Esses indicadores mostram que, na maioria das vezes, o degrau existente entre a experiência dos alunos no Ensino Médio e a apresentação formal do Cálculo Diferencial em nível superior tem sido extremamente alto.

Neste texto, apresentamos um estudo de caso que leva em conta a importância da contextualizaçãocomo estratégia facilitadora do processode criação de significado, pelos alunos,diante da exposição a um novo conceito matemático. O estudo de caso, aplicado ao 1º. semestre deum curso de Economia e Administração de Empresas, objetiva introduzir os conceitos de limite e continuidade invertendo a ordem tradicionalmente adotada nos livros didáticos de Cálculo. Partindo da investigação do mecanismo de cálculo do Imposto de Renda no Brasil, assunto que potencialmente desperta o interesse dos estudantes das áreas envolvidas, surge naturalmente o conceito de continuidade de uma função. Em seguida, a resolução de um conflitomotiva a formalização matemática das ideias até então trabalhadas, permitindo que o conceito de limite seja introduzido de maneira mais significativa para os alunos.

O contexto do ensino de Cálculo no Brasil

Um curso de Cálculo oferecido na universidade costuma introduzir os alunos a um formalismo matemático com o qual eles não estão acostumados, o que já representa um potencial obstáculo ao aprendizado da disciplina. No contexto brasileiro, em que o Cálculo não é apresentado no Ensino Médio de maneira introdutória, o risco é ainda maior. Não tendo tido contato prévio com os conceitos mais fundamentais do Cálculo,os alunos tendem a encontrar maior dificuldade para identificá-los e compreendê-los em uma apresentação com todo o formalismo requerido em um curso de nível superior.Em relação ao ensino de Cálculo nas universidades brasileiras, Barufi (1999) destaca que:

Para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece constituir uma grande dificuldade. Isto ocorre principalmente quando as questões do Cálculo são apresentadas dentro de um contexto formal, logicamente bem estruturado, no qual o conceito de número real é preponderante e o estudo das funções de variável real aparece como um fim em si mesmo (...).

Dessa forma, qualquer proposta relacionada ao ensino de Cálculo no contexto brasileiro deve ser muito cuidadosa em relação à forma de apresentaçãodos conceitos mais fundamentais dessa disciplina, de modo que os principais objetivos de aprendizagem não sejam eclipsados pela necessidade do uso de argumentações matemáticas mais formais. Para tanto, é preciso ter clareza sobre tais objetivos.

Sofronas et al. (2011) apresentam um mapeamento dos principais aspectos que caracterizam o entendimento de um aluno que cursa a disciplina de Cálculo no início de um curso superior, considerando a perspectiva de 24 especialistas. Como resultado, enumeram os seguintes objetivos gerais de aprendizagem: (a) domínio dos principais conceitos do Cálculo (sendo derivadas, integrais e limites, nesta ordem, os principais), (b) construção de conexões e inter-relações entre esses conceitos, (c) habilidade de aplicar os conceitos do Cálculo (resolução de problemas e modelagem), e (d) conhecimento do contexto e da finalidade do Cálculo.

Considerando tal perspectiva e o conhecimento prévio dos alunos brasileiros, suas primeiras experiências em um curso de Cálculo devem:(I) contemplar os objetivos (c) e (d), de modo a favorecer que os alunos enxerguem sentido no estudo do Cálculo, (II) ter como ponto de partida situações em que os conceitos fundamentais do Cálculo apareçam de modo informal, aproximando essas experiências do conhecimento desenvolvido na escola secundária, e (III) mostrar a necessidade de que os conceitos, posteriormente, sejam formalizados levando em conta o rigor do pensamento matemático.

Linguagem matemática e a criação de significado

Desde a educação básica, a linguagem com a qual a matemática se expressa apresenta-se como uma barreira à aprendizagem, antes de funcionar como algo que a promova, como conclui Pimm (1987). Há uma diferença significativa entre a maneira como a matemática é apresentada nos livros e por muitos professores e as linguagens e os códigos de uso cotidiano dos alunos. Alguns autores propõem uma comparação entre o aprendizado da linguagem matemática e o aprendizado de uma língua estrangeira, como sintetiza Ervynck (1992).

A existência dessa barreira provocada pela linguagem torna inviável, para a maioria dos alunos, a criação de significado em relação a um conceito matemático a partir do domínio da linguagem formal. Apesar disso, muitas disciplinas de matemática ministradas em cursos superiores ainda se organizam segundo essa lógica, expressa no esquema da figura 1.

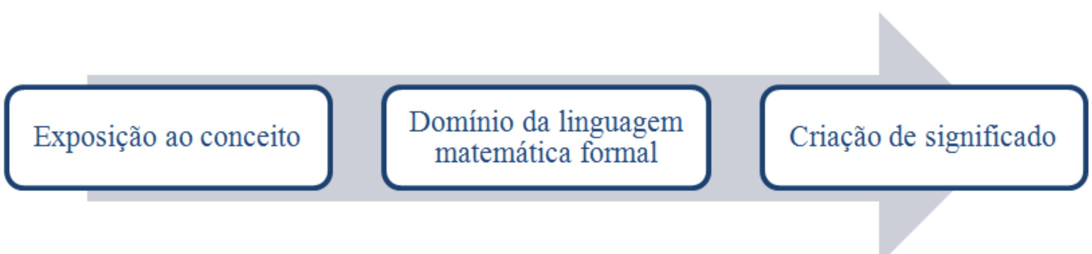

Figura 1. Esquema para domínio da linguagem matemática formal antes da criação de significado.

Diferentes estratégias são usadas com o intuito defacilitar a superaçãodessas barreiras durante o processo de aprendizagem.

A despeito de quase sempre conduzir a uma aprendizagem mecânica, a repetição no uso de um novo conceito é uma dessas estratégias. Espera-se que o aluno,reproduzindo a aplicação do mesmo conceito diversas vezes,vá evoluindo gradativamente no seu entendimento conjuntamente com o domínio da linguagem. Ao aprender a desenvolver $(a + b)^2$ em produtos notáveis, o aluno pode não ter clareza do significado de a e b na expressão, assim como pode não entender bem o que é o quadrado de algo que não é um número específico. É difícil esperar que, ao reproduzir esse desenvolvimento para expressões similares tais como $(x + 3)^2$ ou $(3m + 2n)^2$, o aluno possa construir progressivamente esses significados, ajudando-o a dominar a linguagem.

Machado (2012) destaca o uso de metáforas como uma possibilidade para diminuir o impacto nesse processo, na medida em que elasestabelecem pontes entre diferentes contextos, a despeito da diversidade de campos semânticos existentes entre eles. Naturalmente, deve-se estar atento às limitações existentes nessautilização, uma vez que as metáforas caracterizam-se por relações de analogia, e não de equivalência.

O uso combinado de múltiplas representações da linguagem matemática também pode levar o aluno a construir o significado de algo que ele não conhece, com base em algo que lhe seja mais familiar. Para a funçãо$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x + 3$,por exemplo, pode-se construir um gráfico no plano cartesiano, uma tabela ou apresentar um texto como “o valor da grandeza y é igual a duas vezes o valor da grandeza x acrescido de 3 unidades”.

Tais estratégias têm por objetivo levar o aluno a criar o significado dos conceitos matemáticos a que está sendo exposto, a partir de um entendimento parcial da linguagem e, portanto, antes do desenvolvimento da linguagem necessária para operá-los, como ilustra o esquema da figura 2.

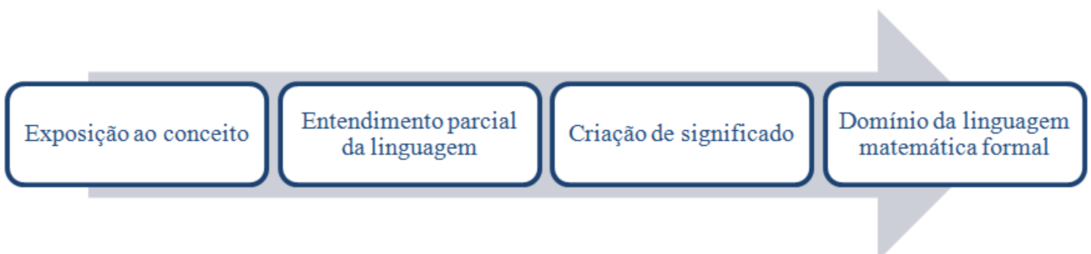

Figura 2. Esquema para criação de significado antes do domínio da linguagem matemática formal.

Entre as estratégias que facilitam a criação de significado, a contextualização se destaca por possibilitar que o aluno opere com um conceito antes mesmo do entendimento parcial da linguagem. Por exemplo, a funçãоf citada anteriormente, dada por $f(x) = 2x + 3$, poderia ser apresentado por meio da contextualização:

“Um álbum de figurinhas custa $3 e cada pacote de figurinhas custa $2.Gustavo gostaria de saber quanto irá gastar se comprar o álbum e as figurinhas, dependendodo total de pacotes que precisar comprar. Como Gustavo pode fazer esse cálculo?”

Sobre a importância da contextualização no processo de criação de significados, Machado (2002) defende que:

“(...) sempre conhecemos, sobre qualquer tema, muito mais do que conseguimos expressar, linguística ou conscientemente, e esse conhecimento tácito é absolutamente fundamental para a sustentação daquele que se consegue explicitar. Como as avaliações levam em consideração essencialmente a dimensão explícita, é necessário desenvolver-se estratégias de enraizamento de tais formas de manifestação nas componentes da dimensão tácita do conhecimento, continuamente alimentadas por elementos culturais de natureza diversa”.

Esse enraizamento na construção dos significados constitui-se por meio do aproveitamento e da incorporação de relações vivenciadas e valorizadas no contexto em que se originam, na trama de relações em que a realidade é tecida; em outras palavras, trata-se de uma contextualização. (...) Na medida em que incorpora relações tacitamente percebidas, a contextualização enriquece os canais de comunicação entre a bagagem cultural, quase sempre essencialmente tácita, e as formas explícitas ou explicitáveis de manifestação do conhecimento.

Nesse texto, assumimos que, por meio da contextualização, pode-se promover a criação de significado pelo aluno antes mesmo do entendimento parcial da linguagem, conforme sugere o esquema da figura 3.

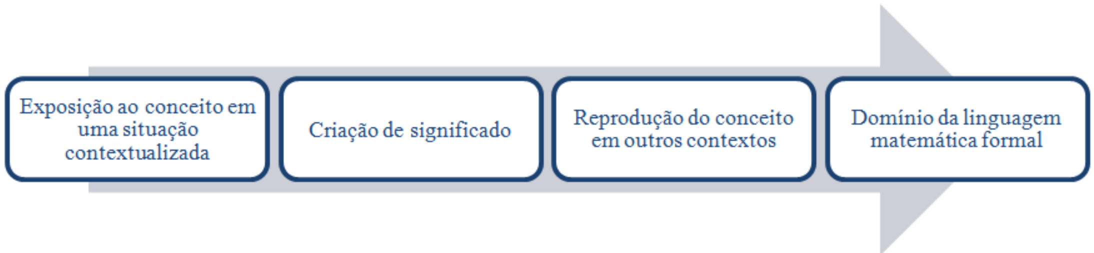

Figura 3. Esquema para criação de significado antes do domínio da linguagem matemática formal.

Limites e continuidade

Do ponto de vista de uma construção logicamente bem estruturada, o conceito de limite é fundamental para a teoria do Cálculo Diferencial e Integral, pois está na base tanto do conceito de derivada (taxa de variação instantânea) quanto de integral (somas de Riemann). Tal característica integradora é evidenciada no mapeamento realizado porSofronas et al. (2011), onde os limites, além de comporem o conjunto dos principais conceitos do Cálculo, aparecem no grupo de conexões e inter-relações entre os conceitos fundamentais da disciplina.

O argumento acima pode ser usado para justificara sequência didáticaescolhida pela grande maioria dos autores delivros de Cálculo,que iniciam o estudo da disciplina pelos limites. No entanto, a construção histórica do Cálculo aponta para um caminho diferente: foram os conceitos de derivada e integral, mais diretamente ligados aos fenômenos naturais e cotidianos,que motivaram o desenvolvimento inicial da disciplina. Essa diferença mostra a necessidade de que se busquem estratégias para que o conceito de limite seja apresentado de forma mais significativa aos alunos, ainda mais quando se pensa no contexto brasileiro.

Ao longo do Ensino Médio, a experiência dos alunos brasileiros com o estudo de funções restringe-se, quase que inteiramente, às funções contínuas. Porém, para introduzir o conceito de limite, as funções contínuas não são as mais apropriadas, uma vez que, em qualquer ponto de seu domínio, o limite é igual ao próprio valor da função. Por isso, na maioria dos livros didáticos, o conceito de limite é introduzido a partir de uma função que apresente uma descontinuidade em um ponto, que pode ou não pertencer ao seu domínio.

Por exemplo, em um livro didático de Cálculo (Stewart, 2011), a ideia de limite é introduzida a partir do problema da obtenção da reta tangente ao gráfico de uma função. Aproximando a reta tangente por sucessivas retassecantes, o autor constrói a função de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ dada por$y = \frac{x^2-1}{x-1}$, analisando seu comportamento para valores de x próximos de 1. Neste caso, o ponto x = 1, que não pertence ao domínio da função, representa a descontinuidade referida anteriormente.

Apesar do uso de uma descontinuidade para a introdução da ideia de limite,mostrada pelo exemplo, a continuidade de uma função é abordada apenas depois da definição formal de limite, quando o nível de formalização matemática requerido dos alunos já é bastante sofisticado se comparado às suas experiências no Ensino Médio. Dessa forma, perde-se a oportunidade de explorar um conceito mais intuitivo, a continuidade, antes de serem introduzidos todos os formalismos que caracterizam o conceito de limite.

Neste trabalho, propomos que seja feita uma inversão na apresentação dos conceitos de limite e continuidade, pelo menos antes de sua formalização matemática. Como mostrado, a ideiade descontinuidade já é usada como ponto de partida para introduzir os limites. Reforçar a oposição entre continuidade e descontinuidade em situações cotidianas, que despertem o interesse dos alunos, permite construir o conceito de limite de maneira mais significativa.

Método

Um contexto em que naturalmente surge a oposição entre continuidade e descontinuidade, potencialmente motivador para alunos das áreas de Administração de Empresas e Economia, é o cálculo do imposto de renda. Neste trabalho, descrevemos a aplicação de um estudo de caso relacionado a esse tema aos alunos da disciplina Cálculo 1, ministrada no 1º. semestre dos cursos de Administração de Empresas e Economia do Insper. Na sua maioria, são alunos que nunca tiveram contato com o Cálculo Diferencial.

O estudo de caso foi dividido em três partes, todas relacionadas ao cálculo do imposto de renda no Brasil. As partes 1, 2 e 3 foram realizadas na segunda, terceira e quinta aulas do curso, respectivamente.

Como em vários outros países do mundo, a cobrança de imposto de renda no Brasil contempla diferentes alíquotas, dependendo da faixa de renda do contribuinte. A tabela 1 mostra as alíquotas praticadas no Brasil no ano de 2015, com as faixas de renda arredondadas para finalidades didáticas.

Tabela1

Alíquotas do imposto de renda no Brasil

Faixa de renda mensal (R$)	até 1.800,00	mais de 1.800,00, até 2.700,00	mais de 2.700,00, até 3.600,00	mais de 3.600,00, até 4.500,00	mais de 4.500,00
Alíquota	0,0%	7,5%	15,0%	22,5%	27,5%

Fonte: Site da Receita Federal (http://www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas). 2014.

As diferentes alíquotas praticadas, aliadas a um desconhecimento geral da população sobre o sistema de cálculo do imposto, podem gerar a crença de que, em determinados casos, um aumento da renda de um contribuinte leve a uma diminuição de seus ganhos líquidos, uma vez que, ao cair em outra faixa, ele deverá pagar um percentual significativamente maior de imposto.

Estudo de caso – Parte 1

A motivação do estudo de caso é a situação de uma pessoa que tinha uma renda mensal de R$ 1.780,00 e, após receber um aumento salarial, passou a ter renda de R$ 1.900,00. De acordo com a tabela 1, essa pessoa não pagava Imposto de Renda, mas, depois do aumento, passou a ser tributada. Equivocadamente, acreditou que passaria a ter um desconto de 7,5% em seu salário, recebendo R$ 1.757,50 – quantia inferior ao que recebia antes do aumento.

O conflito gera a oportunidade de uma investigação mais profunda. Os alunos receberam a tarefa de construir o gráfico da função I, que relaciona o imposto pago por uma pessoa em função de sua renda mensal (x), considerando o raciocínio realizado pela pessoa que recebeu o aumento (figura 4). Após a construção do gráfico, duas perguntas foram lançadas a eles:

(Q1) Qual característica da função I explica a queda doganho líquido da pessoa, mesmo tendo recebido um aumento de salário?

(Q2) Como tal característica pode ser descrita matematicamente?

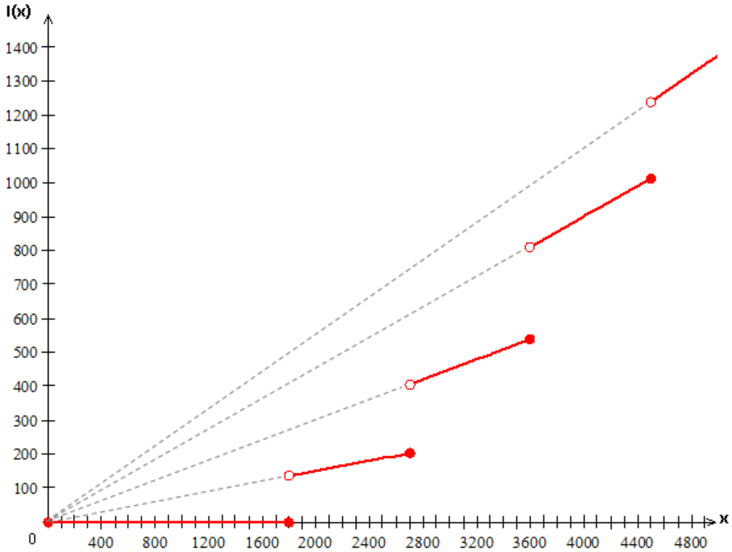

Figura 4. Gráfico do imposto devido I(x) em função da renda x conforme interpretação inicial do cálculo do imposto.

Trabalhando em duplas, os alunos construíram suas interpretações para as duas perguntas, que foram posteriormente socializadas com a classe.

Estudo de caso – Parte 2

A tarefa proposta na parte 2 do estudo de caso consistiu em propor uma interpretação da tabela de alíquotas do imposto de renda (tabela 1) para a qual não seja possível que um aumento de renda leve a uma diminuição dos ganhos líquidos de um contribuinte, independentemente da sua faixa de renda. Para guiar a discussão dos alunos, organizados em duplas, foram propostas as duas perguntas a seguir.

(Q3) Qual característica deve ter a função I para que o ganho líquido de uma pessoa nunca diminua quando sua renda aumentar?

(Q4) O gráfico construídona parte 1 é constituído de vários segmentos de reta. Qual característica desses segmentos pode ser identificada com a alíquota em cada faixa de renda?

Inicialmente, os alunos tentaram resolver o problema graficamente, buscando traçar o gráfico da função I a partir de suas reflexões sobre as duas perguntas. Considerando as respostas às perguntas (Q3) – a função não deve apresentar descontinuidades, e (Q4) – cada alíquota é caracterizada pela inclinação do segmento de reta correspondente, é possível construir o gráfico mostrado na figura 5.

Em seguida, foi pedido aos alunos que determinassem a lei da função I.

As partes 1 e 2 do estudo de caso foram realizadas na segunda e terceira aulas do curso, respectivamente. A partir das discussões feitas nessas aulas, o conceito de continuidade de uma função em um ponto foi apresentado. Na quarta aula, foi feita a formalização do conceito de continuidade, o que gerou a oportunidade da introdução do conceito de limite. Com isso, a turma estava preparada para a parte 3 do estudo de caso, que foi aplicada na quinta aula do curso.

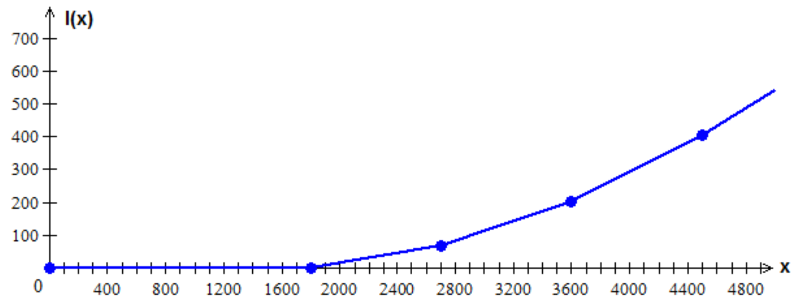

Figura 5. Gráfico do imposto devido I(x) em função da renda x conforme interpretação correta do cálculo do imposto.

Estudo de caso – Parte 3

A parte 3 do estudo de caso teve como objetivo tratar do limite de uma função no infinito. Para isso, analisou-se o comportamento da alíquota efetiva do imposto de renda, que consiste no percentual efetivo pago de imposto por um contribuinte, em relação ao total de sua renda. Chamando a alíquota efetiva de A(x), tem-se que $A(x) = 100 \cdot I(x)/x$. Considerando a interpretação correta do cálculo do imposto de renda (parte 2 do caso), a alíquota efetiva é sempre menor do que 27,5%, mas tende a esse valor à medida que a receita x cresce muito.

Para observar o comportamento da função A, os alunos construíram uma tabela com os valores da alíquota efetiva para valores crescentes de x. Para facilitar a construção da tabela, foi usado um programa da Receita Federal brasileira[1] que simula o cálculo do imposto de renda. A partir da tabela, os alunos construíram o gráfico de A(x) em função de x (figura 6) e procuraram responder as duas perguntas a seguir.

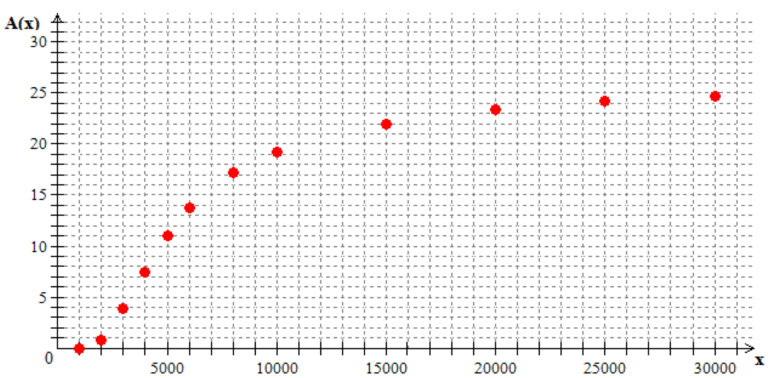

Figura 6. Gráfico da alíquota efetiva do imposto de rendaA(x) em função da renda x.

(Q5) Qual o comportamento da função A para valores muito grandes de x?

(Q6) Apresente um argumento algébrico para justificar sua resposta à pergunta (Q5).

Resultados

Durante o planejamento do estudo de caso, admitiu-se que o cálculo do imposto de renda seria um assunto potencialmente motivador para alunos do 1º. semestre de cursos de Economia e

[1]Disponívelemhttps://www.receita.fazenda.gov.br/Aplicacoes/ATRJO/Simulador/TelaOptMenAnu.htm.

Administração de Empresas. Dessa forma, procurou-se coletar, durante a aplicação do caso, evidências que confirmassem ou não tal hipótese. Um dos instrumentos usados para isso foi a adesão dos alunos às leituras prévias. Tais leituras eram disponibilizadas dois dias antes da aula e tratavam de aspectos não matemáticos do imposto de renda, com o objetivo de que os alunos compreendessem o contexto em que tal imposto era cobrado (finalidade da cobrança, aspectos históricos, políticos e econômicos, sistema de cobrança em outros países).

Os alunos não foram cobrados em relação às leituras prévias, que eram discutidas nos dez primeiros minutos de cada aula.Mesmo assim, nas três aulas, mais de 90% dos alunos realizaram a leitura e trouxeram outras questões, como o cálculo do imposto de renda para empresas e aplicações financeiras. Observou-se ainda que o engajamento dos alunos nas discussões iniciais se mantinha durante a realização doestudo de caso, sendo maior do que em atividades realizadas em outras aulas, que não exploravam a contextualização.

Elaboração intuitiva do conceito de continuidade

Na parte 1 do estudo de caso, os alunos rapidamente chegaram à lei matemática da função I considerando a interpretação errada sugerida pelo raciocínio da personagem. No entanto, encontraram dificuldade na construção do gráfico dessa função, principalmente nos pontos de mudança da alíquota. Foi feita, então, uma intervenção pelo professor, que sugeriu que fossem desenhadas, em linha tracejada, as diferentes retas cujas equações compunham a lei da função I ($y = 0$; $y = 0{,}075x$; $y = 0{,}15x$; $y = 0{,}225x$; $y = 0{,}275x$) e destacados os trechos das retas correspondentes ao intervalo de cada alíquota, como mostrado na figura 4.

Durante a discussão que se seguiu à construção do gráfico, motivada pelas perguntas Q1 e Q2, emergiu o conceito de continuidade de uma função, enunciado ainda de maneira intuitiva. A discussão concentrou-se no comportamento da função no intervalo de 1.780 a 1.900, valores inicial e final da renda da personagem. Por isso, as respostas referem-se ao ponto $x = 1.800$. A tabela 2 mostra as explicações mais frequentes elaboradas pelos alunosapós a socialização das ideias individuais com toda a classe.

Tabela 2

Respostas típicas para as perguntas Q1 e Q2

Q1	Q2
"Depois de x = 1.800, a função I dá um salto."	"I(1800) = 0 e I(x) > 135 para x > 1800"
"O imposto pago por uma pessoa que ganha 1.801 é muito maior do que o de uma pessoa que ganha 1.800."	"I(1800) = 0, mas I(1801) = 135,075"

No modelo analisado pelos alunos na parte 1, destacavam-se os pontos de descontinuidade da função I. Para contrapor-se a esse modelo, a situação proposta na parte 2 levava à construção de uma função contínua.

A maioria dos alunos respondeu com facilidade a pergunta Q3, identificando que a nova função I não poderia apresentar "saltos". Isso pode ser justificado pelo enfoque dado à descontinuidade da função I na discussão feita ao final da parte 1. Na pergunta Q4, alguns alunos encontraram dificuldade para relacionar a alíquota ao coeficiente angular da reta. Pudemos identificar que muitos desses alunos não estavam habituados, no Ensino Médio, a trabalhar com o coeficiente angular de uma reta.

A principal dificuldade dos alunos consistiu em combinar as respostas das perguntas Q3 e Q4 para construir uma solução gráfica para o problema, como mostrado na figura 5.Também foi difícil para muitos deles encontrar uma interpretação da tabela de alíquotas condizente com o novo gráfico construído – cada alíquota só incide sobre a parte da renda que excede a faixa da alíquota anterior. A dificuldade apresentada evidencia a pouca desenvoltura dos alunos com a resolução de problemas e modelagem que, como apontado por Sofronas et al. (2011), deve ser um dos quatro grandes objetivos de um curso de Cálculo. Esse fato reforça a importância de que o curso de Cálculo exponha os alunos a situações desse tipo com frequência.

Ao final das partes 1 e 2 do estudo de caso, a descrição matemática da descontinuidade da função I no ponto x = 1.800 na pergunta Q2 e a facilidade encontrada pelos alunos na pergunta Q3 mostrou que a ideia intuitiva desse conceito começava a ser formada. Com isso, já era possível passar para a formalização do conceito de continuidade, o que foi feito na quarta aula do curso.

Formalização do conceito de continuidade

Durante a discussão da parte 1 do estudo de caso, muitos alunos, ao exemplificarem uma renda “um pouco maior do que R$ 1.800,00”, citaram a quantia R$ 1.800,01. É natural queesse raciocínio apareça no sistema monetário, em que as quantias variam de 1 em 1 centavo. Porém, para formalizar o conceito de continuidade, desejava-setrabalhar com o conjunto dos números reais.Dessa forma, no início da quarta aula do curso, foi preciso abstrair o contexto do imposto de renda, considerando que a renda x de uma pessoa poderia assumir qualquer valor real não negativo.

Trabalhando no conjunto dos reais, a pergunta “o que é um número próximo de 1.800?” traz muitas dúvidas aos alunos. Assim, fica evidente a necessidade de formalizar a ideia inicial de continuidade traduzida pelas respostas da tabela 2 – sex está próximo de 1.800, então I(x) deve estar próximo de I(1.800).

Tal argumentação acrescenta um elemento a mais ao esquema da figura 3. A exposição ao conceito em uma situação contextualizada permite ao aluno criar significado para aquele conceito e reproduzi-lo em outros contextos, o que subsidia a sua apresentação na linguagem matemática formal. É importante, porém, que o aluno perceba a necessidade e os benefícios da representação desse conceito em uma linguagem formal, para que se engaje na tarefa de superar o obstáculo representado pelo formalismo.

O conceito de limite

A partir da formalização do conceito de continuidade, tornou-se bastante natural passar à ideia de limite. Para isso, foi explorada a função I dada pelo gráfico da figura 4, focando-se a discussão no comportamento dessa função em torno do ponto x = 1.800, o que permitiu abordar o conceito de limites laterais (nessa função, tem-se I(1.800)= 0, mas $\lim_{x\to 1.800^+} I(x) = 135$). Depois de analisar outros exemplos, foi apresentado, ainda na quarta aula, o conceito de limite de uma função, de maneira formal.

Na quinta aula do curso, o conceito de limite foi ampliado para o caso em que x tende ao infinito, por meio da realização da parte 3 do estudo de caso. A utilização do programa de cálculo do imposto de renda disponibilizado pela receita federal tornou a atividade bastante dinâmica e favoreceu o engajamento dos alunos. Além disso, permitiu aos alunos que ainda tinham alguma dúvida no mecanismo de cálculo do imposto esclarecê-las.

Na pergunta Q5, a maioria dos alunos percebeu que a função A tendia a se estabilizar à medida que x crescia muito. O plano cartesiano fornecido para desenhar o gráfico de A trazia valores de x no intervalo de 0 a 30.000. Como A(30.000) = 24,7, muitos alunos tiveram a iniciativa de calcular a alíquota efetiva para valores bem maiores do que 30.000, verificando que ela tendia a 27,5. No entanto, o programa fornecia a alíquota efetiva com apenas duas casas decimais, arredondando os valores calculados. Com isso, para valores de x superiores a 17.000.000, ele apontava que a alíquota efetiva era 27,50%. Com base na descoberta dos alunos, foi lançada a seguinte pergunta: "existe algum valor de x para o qual a alíquota efetiva é exatamente 27,5?". Como não houve consenso, foi solicitado que passassem à questão Q6.

Para $x > 4.500$, a função I é dada por $I(x) = 0{,}275x - 832{,}5$. No mesmo intervalo, a alíquota efetiva é dada por $A(x) = 27{,}5 - 83.250/x$. A partir da análise dessa expressão, os alunos foram capazes de justificar a resposta da pergunta Q5 e compreender que, para a função A em particular, o valor 27,5 nunca é atingido, embora ele apareça no programa de cálculo do imposto. A partir dessemomento,foi formalizado o conceito de limite de uma função no infinito.

Conclusões

Desde o trabalho de Tall e Vinner (1981), muitos autores têm desenvolvido pesquisas nas quais se identifica grande concordância de que os alunos, de modo geral, apresentam dificuldade com o conceito de limite. Contribuições importantespara a busca de estratégiasque permitam superar essas dificuldades têm sido feitas desde então (veja, por exemplo, Cottrill et al., 1996; Szydlik, 2000; Cappetta e Zollman, 2013).

A questão do formalismo matemático com o qual os estudantes se deparam em seus cursos iniciais de Cálculo é, sem dúvida, um elemento que contribui para essa dificuldade. No Brasil, essa situação é ainda mais crítica, uma vez que os alunos não trazem conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial do Ensino Médio onde possam ancorar os novos conceitos apresentados, muitas vezes, com excessos de formalismo.

O estudo de caso apresentado neste trabalho exemplificou como a contextualização pode ser umaestratégia valiosa para diminuir a barreira ao aprendizado de limites, observada na maioria dos cursos iniciais de Cálculo. Durante a aplicação do caso,já emergiram as principais ideias envolvidas nos conceitos de continuidade e limite,facilitando muito a compreensão dos alunos da posterior formalização matemática.

Não se trata, portanto, de diminuir o rigor matemático com que os conceitos são apresentados. Esta é uma prerrogativa do professor, que deve levar em consideração os objetivos de aprendizagem que deseja alcançar, o conhecimento prévio dos alunos, as características do curso, entre outros aspectos.Pelo contrário, trata-se de uma estratégia que objetiva preparar melhor os alunos para o formalismo que é introduzido nos cursos iniciais de Cálculo.

Em termos de aprofundamento do estudo, uma questão emerge com base nessas conclusões: existe alguma relação entre a criação de significado no conceito de limites e a motivação dos alunos para aprender Cálculo? Com base no comportamento dos alunos, há sinais de que possa existir alguma relação, mas é necessária uma investigação mais profunda para coletar evidências que possam refutar ou não essa hipótese.

Referências e bibliografia

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*.Tesede Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de

São Paulo, Brasil.

BO (2011). Bulletin officielspécial n° 3 du 17 mars 2011.*Mathématiques - classe de 1èredes séries STD2A*. Disponível em: <http://www.education.gouv.fr/>. Acesso em 18.12.14.

BOE num. 147 (2008). *ORDEN ESD/1729/2008*, de 11 de junho, pela qual se regula a ordenação e se estabelece o currículo do bachillerato na Espanha. Disponível em: <http://www.boe.es/boe/dias/2008/06/18/pdfs/A27492-27608.pdf >. Acessoem 18.12.14.

Cappetta, R. W., Zollman, A. (2013). Agents of Change in Promoting Reflective Abstration: a Quasi-Experimental Study on Limits in College Calculus. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(3), 343-357.

Costa, J. C. O. (2011).*O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos*. Tesede Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D.,Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192.

DGE. Direção Geralda Educação. Ministério da Educação (Portugal). *Metas Curriculares – Ensino Secundário*.Disponível em: <http://dge.mec.pt/>. Acesso em 18.12.14.

Ervynck, G. (1992). Mathematics as a Foreign Language. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (16th, Durham, NH, August 6-11, 1992). Volumes I-III.

Lima, G. L. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. *Educ. Matem. Pesq.*, *16*, 125-149.

Machado, N. J. (2002). Sobre a ideia de competência. In: Perrenoud, P. et alii – *Competências para ensinar no século XXI*. Porto Alegre: ArtMed.

___________ . (2012). *Matemática e educação*. 6ª edição. São Paulo: Cortez Editora.

NCTM (2000).National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston.

Pimm, D. (1987). *Speakink Mathematically*. London: Routledge & Kegan Paul.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de naturezaepistemológica*. Tese de Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.

Sofronas, K. S., DeFranco T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior, 30*, 131-148.

Stewart, J. (2011). *Cálculo* (tradução da 6ª edição americana). Cengage Learning.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258-276.

Tall, D.,Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.