Aprendizagem de cálculo: Dificuldades e sugestões para a superação

Lilian **Nasser**
Projeto Fundão – IM/UFRJ
Brasil
liliannasser@uol.com.br
Geneci Alves de Sousa
CETIQT/SENAI-UNIABEU-SEEDUCRJ- SME-RIO -Projeto Fundão/UFRJ
Brasil
prof.geneci@yahoo.com.br
Marcelo André Abrantes **Torraca**
UVA-CETIQT/SENAI-SEEDUCRJ- Projeto Fundão/UFRJ
Brasil
torraca@gmail.com

Resumo

Os altos índices de reprovação e de evasão nos cursos de Cálculo remetem a diversas investigações sobre suas causas, buscando sugestões para tentar reverter esse quadro. O baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. Este trabalho é parte de uma pesquisa, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundão (IM/UFRJ), com os objetivos de investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior e empreender ações para diminuir esses índices. Neste trabalho são apresentados exemplos de erros relacionados a obstáculos à aprendizagem de Cálculo e são sugeridas algumas estratégias que podem ajudar a superar essas dificuldades.

Palavras chave: Cálculo, obstáculos à aprendizagem, análise de erros.

Transição do Ensino Médio e seu impacto na aprendizagem de Cálculo

As dificuldades em Cálculo têm sido tema de estudos nacionais e internacionais, que investigam suas causas. Para amenizar tal situação, várias estratégias têm sido empreendidas, tal como a inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0). Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada.

Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina. Outra pesquisa sobre o tema foi desenvolvida por Palis (2010), com enfoque nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio, indicando a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos. Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia em relação ao conteúdo de funções e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como "desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos" (p. 54).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN/EM, 1999) destacam a dissociação existente entre vários conteúdos nesse nível de ensino, o que enfatiza a necessidade de uma proposta curricular diferente da praticada atualmente.

> "Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente". (PCN/EM, 1999, p. 225)

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

> "mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado". (Robert e Schwarzenberger, 1991, p. 133)

Tall (1991) também aponta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, ao afirmar que “[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições.” (Tall, 1991, p.20)

De acordo com Caraça (1984), o conceito de função está ligado à ideia de correspondência entre dois conjuntos. A função é vista como uma busca da compreensão da ‘Realidade’, com suas características fundamentais: a interdependência e a fluência (p. 109). Isto é, a função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades. Como exemplo, Caraça apresenta a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda livre de um corpo no vácuo (Caraça, 1984, p. 126).

As orientações do PCN/EM (2006) seguem na mesma direção, sugerindo que

> “o estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras”. (PCN/EM, 2006, p.72)

Por sua vez, Tinoco (1989) defende que é possível conseguir bons resultados com o estudo das funções a partir do segundo segmento do Ensino Fundamental, por meio da observação de exemplos práticos e sua representação gráfica. Mesmo sem exibir uma expressão analítica para representar a função, os alunos podem, por exemplo, relacionar as variações das distâncias de reação e frenagem, em função da velocidade do veículo (Tinoco, 1989, p. 13).

Even (1990) também observou dificuldades no domínio de funções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se $g(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que “há uma imagem única para cada número” (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x: π, $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta $\boldsymbol{y = x}$ com buracos, conforme ilustrado a seguir na figura 1.

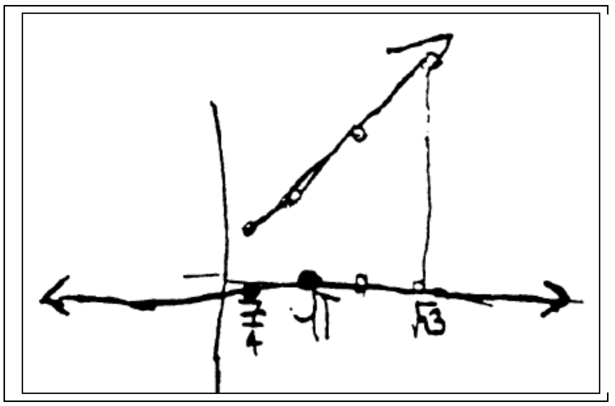

Figura 1. Gráfico de um futuro professor para a função g(x).

Even (1990) afirma ainda que

> "essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico "simples" e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária". (p. 529)

Obstáculos à aprendizagem em Cálculo

Em relação à aprendizagem, diversos pesquisadores apontam a existência de obstáculos, cuja noção está relacionada a algum entrave como causa das dificuldades. Os obstáculos epistemológicos foram estudados inicialmente por Bachelard e explorados por vários matemáticos como Brousseau (1983) e Artigue (1989). Citando Igliori (2002, p. 101), Nasser (2009) destaca que

> "Brousseau distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: os de origem *ontogênica*, que se referem a limitações do próprio sujeito, os de natureza *didática*, que dependem das experiências de aprendizagem vivenciadas; e os de ordem *epistemológica*, inerentes ao conhecimento". (Nasser, 2009, p. 44)

Especificamente em relação à aquisição do conceito de função, Sierpinska (1992) destaca 16 obstáculos e 19 atos fundamentais, que são estratégias para transpor esses obstáculos.

Em nossas pesquisas com alunos do Ensino Médio e calouros universitários na disciplina de Cálculo, observamos algumas respostas que exemplificam a presença de algum obstáculo à aprendizagem, que destacamos a seguir.

- **a concepção ingênua de que "o gráfico de uma função não precisa ser exato"**. Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao traçar gráficos de funções simples como $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 4, & \text{se } x < -1 \\ 0, & \text{se } -1 \le x \le 3 \\ (x-5)^2 - 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$. A figura 2 mostra o descuido de um aluno de Cálculo I, em marcar os pontos críticos na representação gráfica dessa função.

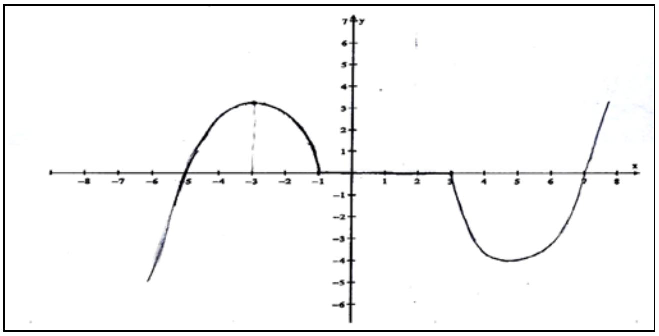

Figura 2. Gráfico sem exatidão nos pontos críticos

- a **concepção de que “apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”.** De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças.

A figura 3 mostra o gráfico apresentado por um aluno de Cálculo para a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} -4, \text{ para } x\le -3 \\ -x^2+5, \text{ para } -3< x\le 2 \\ x-2, \text{ para } x>2 \end{cases}.$$

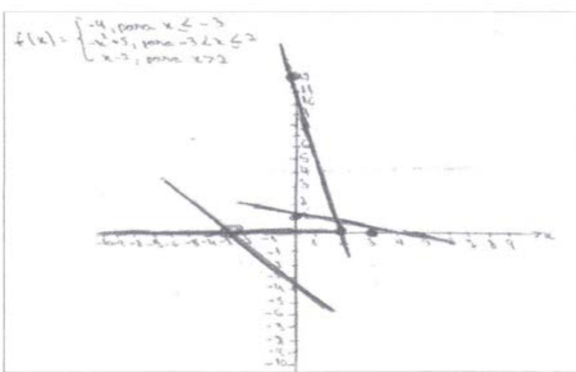

Figura 3. Gráfico incorreto de função definida por várias

- **a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta**, deixando de considerar a lei de formação da função. Na figura 4 é apresentado o gráfico traçado por uma aluna de Cálculo I com bom desempenho. Ela foi capaz de perceber a translação horizontal aplicada à função $\boldsymbol{y=sen(x)}$

para obter o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ marcando os pares ordenados, mas ligou-os por segmentos de reta.

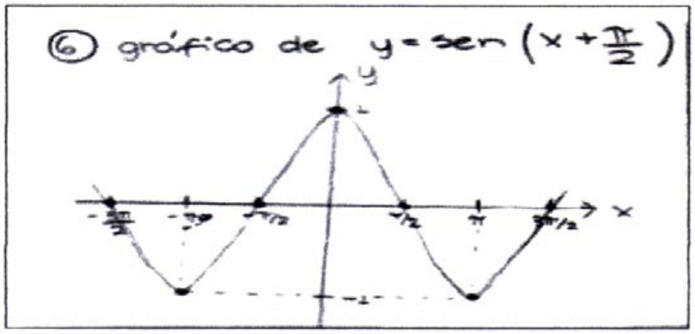

Figura 4. Exemplo de gráfico utilizando segmentos de reta para a ligação dos pontos**.**

Em sua pesquisa, Even (1990) ressalta que a primeira abordagem de funções, marcando pontos, não é difícil de aprender, mas

> "uma abordagem com marcação de pontos para o traçado de gráficos de funções é, em muitos casos, menos poderosa que um método que enfatiza uma análise mais global do comportamento da função. Por exemplo, fazer o gráfico de uma função quadrática que tem $(-100, 78)$ como vértice pela marcação de vários pontos próximos de (0, 0) não vai produzir um gráfico informativo. Também, traçar o gráfico de uma função que é descontínua em $x = 0,3$ pela marcação de pontos com coordenadas inteiras e ligá-los vai produzir um gráfico errado". (Even, 1990, p. 534)

- as dificuldades na transposição da representação verbal (descrição da situação problema) **para uma representação analítica**, isto é, escrever uma sentença matemática que relacione as grandezas envolvidas no problema.

De acordo com Duval,

> "Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato". (Duval, 2003, p. 31).

Em geral, a interpretação do enunciado de uma situação problema e sua transposição para uma expressão analítica da função que envolve não são tarefas fáceis para alunos do Ensino Médio, e mesmo no início da graduação. O seguinte problema foi proposto a alunos de Cálculo I:

A taxa de inscrição num clube de natação é de R$450,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. Expresse a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso.

Figura 5. Questão aplicada na pesquisa

O problema demandava uma análise dos dados apresentados e a representação dessa leitura de forma analítica, onde a taxa de inscrição fosse escrita em função do número de semanas passadas após o início do curso. Os alunos deveriam interpretar o enunciado, percebendo que se tratava de uma função afim, e que o gráfico de uma função que decresce linearmente é uma reta. Pelos resultados observados na nossa pesquisa, os alunos do curso de engenharia apresentaram um bom desempenho nessa questão, com cerca de 80% de acertos. O mesmo não foi verificado no desempenho dos alunos de uma turma de licenciatura em Matemática, onde menos de 30% conseguiram apresentar a expressão analítica da função corretamente. Alguns alunos chegaram à expressão analítica da função por meio do seu gráfico, demonstrando domínio da transposição entre as representações verbal, gráfica e analítica, como mostra a figura 6.

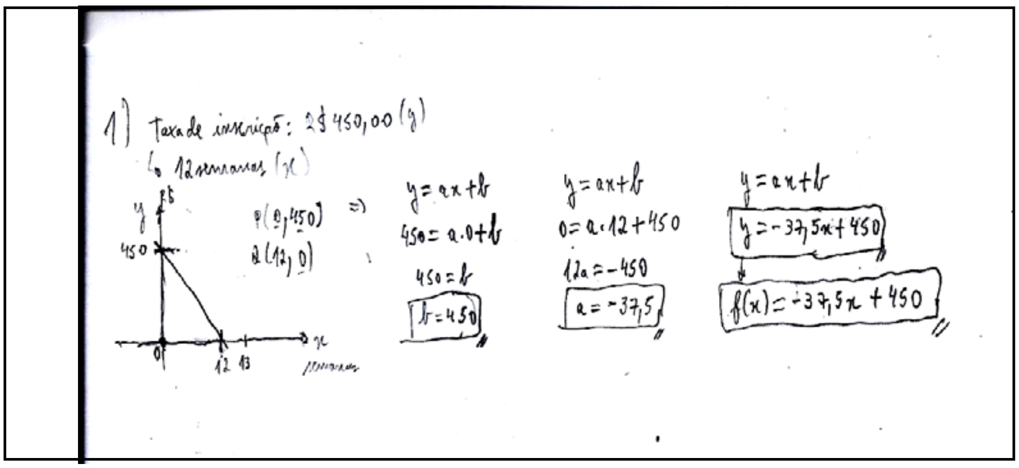

Figura 6. Resolução que denota a transposição entre as representações da situação problema.

- **dificuldades na transposição da representação verbal para uma representação gráfica**

Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo. Os autores afirmam que

> "o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é "congelado". (p. 247)

Essa dificuldade foi observada em nossa pesquisa, na resolução do seguinte problema de taxas relacionadas:

Um tanque tem a forma de um cone invertido, com 36 m de altura e uma base com 9 m de raio. A água flui no tanque a uma taxa de 4 m^3/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando no instante em que sua profundidade for de 15 m? Dado: $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Figura 7. Questão de taxas relacionadas

A figura 8 mostra a solução de um aluno que aplicou corretamente a razão de semelhança para encontrar o raio correspondente à profundidade de 15 m, mas substituiu a altura por 15 antes de derivar.

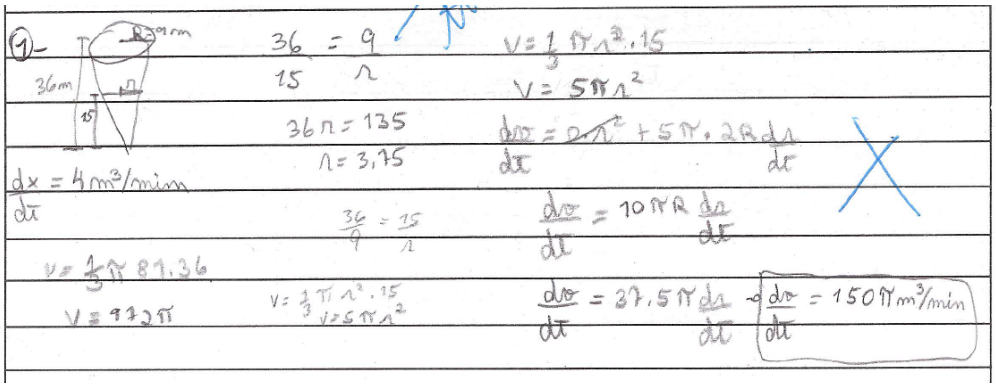

Figura 8. Erro típico em questões de taxas

- dificuldades em questões de máximos e mínimos

Na resolução de problemas de máximos e mínimos observamos grande número de erros no trato algébrico, na sentença matemática que equaciona o problema e no cálculo de derivadas. A figura 9 a solução de um aluno, que cometeu erro ao equacionar o problema.

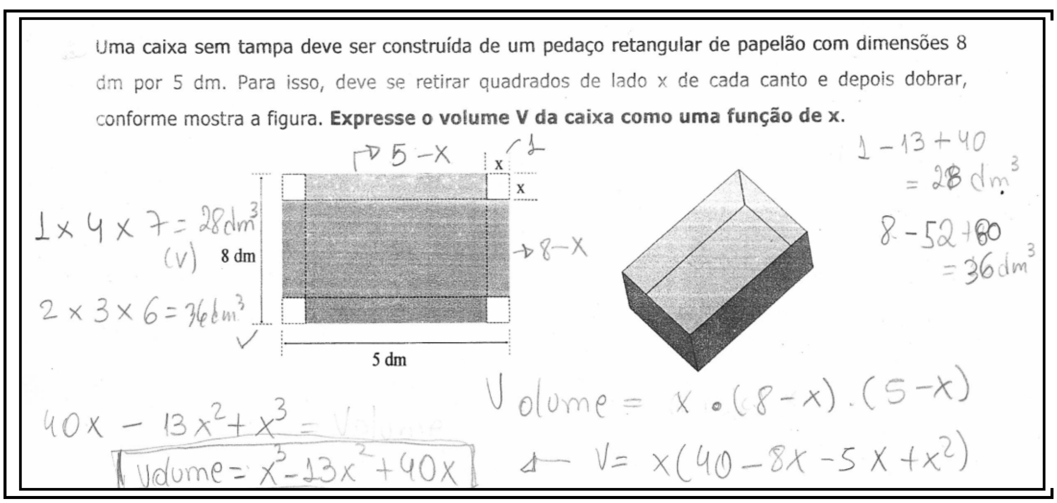

Figura 9. Erro ao equacionar um problema de máximos e mínimos

Recomendações para minimizar as dificuldades:

Com base nas pesquisas citadas e na experiência dos membros do grupo, algumas ações podem ser destacadas como favoráveis à superação de obstáculos, à construção do conceito de função e ao domínio do traçado de gráficos, minimizando as dificuldades.

- ✓ **o reconhecimento de padrões em sequências de figuras constitui uma boa prontidão para o conceito de função**, que pode ser explorado desde os primeiros anos do Ensino

Fundamental. Cândido (2000) relata uma experiência propondo um caráter dinâmico para o ensino de funções. Inicialmente, a ênfase é na familiarização com a variação de grandezas, observando a dependência entre as variáveis. A seguir, numa segunda etapa, as atividades abordam a análise e comparação de variações, em que as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais. A partir daí, passa-se à familiarização com as idéias que dão suporte ao conceito de função do 1º grau, com suas características algébricas e geométricas. A seguir é apresentada uma atividade proposta nesse trabalho.

- ✓ **as progressões devem ser tratadas como funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.**

Está é uma recomendação destacada anteriormente na citação do Pcn/EM (1999, p.225), e reforça a idéia de relacionar o tópico de funções com outros conteúdos da Matemática e de outras Ciências.

- ✓ **é recomendável o uso de transformações no plano para chegar ao gráfico pretendido por meio de translações e reflexões nos gráficos básicos.**

Os alunos devem ser incentivados a traçar gráficos de funções afim e quadráticas usando transformações a partir dos gráficos básicos de $y = x$ e $y = x^2$, respectivamente. A figura 10 mostra as transformações aplicadas à parábola $y = x^2$ para obtenção da parábola $y = x^2 - 4x + 3$. É preciso completar o quadrado e expressar essa função por $y = (x - 2)^2 - 1$.

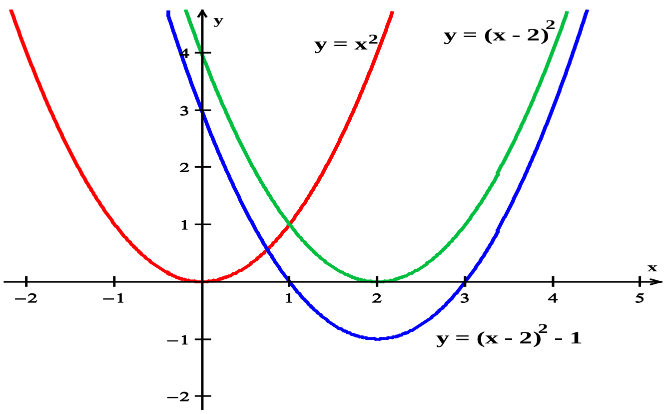

Figura 10. Gráfico obtido a partir de translações

Esse método também pode ser usado, em Cálculo I, para traçar gráficos de funções envolvendo $y = ln(x)$ e $y = e^x$. Mais adiante, em Cálculo III, o mesmo procedimento pode ser usado com funções de duas variáveis, para facilitar a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (Nasser, 2009, p.52). Numa turma habituada com essa estratégia em Cálculo I, foi constatado o raciocínio de um aluno de Cálculo II, que utilizou a translação de gráficos para resolver a seguinte questão:

Determine todos os pontos de interseção das cardióides: $R = 1 + \cos\theta \quad \text{e} \quad R = 1 - \text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

O objetivo era que os alunos igualassem as duas equações polares, percebendo que os pontos de interseção se referem ao ângulo θ que satisfaz à igualdade $\cos\theta = -\,\text{sen}\,\theta$, ou seja, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$. No entanto, um aluno apresentou a solução mostrada na figura 11, aplicando a translação de gráficos, enfatizada em outro contexto.

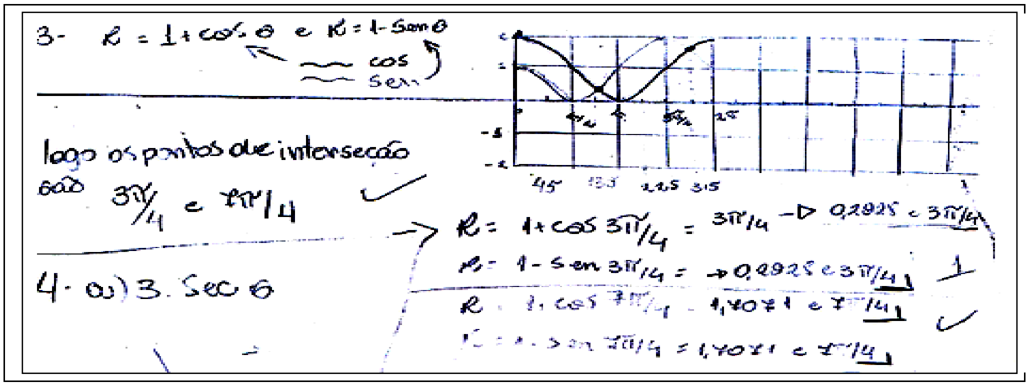

Figura 11. Solução de um aluno de Cálculo II usando transformações.

- ✓ **a tecnologia pode ser utilizada para a observação de modificações no traçado de gráficos.**

Perspectivas de melhoria do ensino–aprendizagem podem ser criadas com o uso de softwares para visualizar gráficos de funções (Torraca, 2005), tais como Excel, Derive, Maple e Winplot. Além desses, podem ser usados o Geogebra e o Régua e Compasso, de fácil aplicação. Por exemplo, os alunos podem ser desafiados a investigar o que ocorre com o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando são feitas alterações nos coeficientes *a*, *b* e *c*, separadamente. Em particular, utilizando o Winplot, é possível traçar uma família de funções da forma $f(x) = x^2 + bx + 1$ quando o coeficiente de b varia no intervalo $-4 \le b \le 4$. O lugar geométrico dos vértices dessa função quadrática quando b varia é uma função quadrática da forma $f(x) = -x^2 + 1$, que pode ser observada na figura 12.

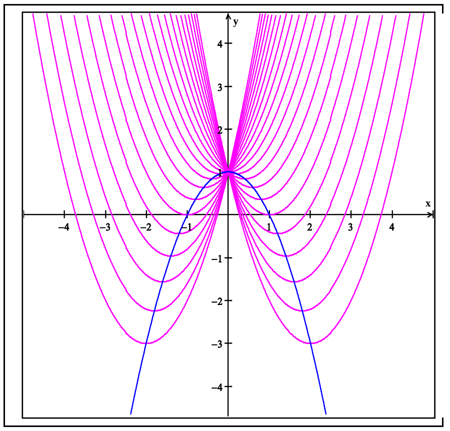

Figura 12. Lugar geométrico dos vértices do gráfico de $f(x) = x^2 + b\ \ast 1$ quando o coeficiente b varia.

Considerações finais

As dificuldades na aprendizagem de Cálculo e em particular na aquisição do conceito de funções tem sido motivo de preocupação, gerando vários trabalhos de pesquisa O objetivo deste trabalho é empreender mobilizações didáticas para a aprendizagem significativa do conceito de funções e das estratégias para a resolução de problemas em Cálculo. Resultados de pesquisas indicam a existência de alguns obstáculos epistemológicos para a aquisição desse conceito, como a concepção ingênua de que o gráfico de uma função não precisa ser exato, a concepção de que apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções, a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta. Destacam-se ainda as dificuldades na transposição entre as representações verbal (descrição da situação problema), analítica (expressão por meio de uma função ou equação) e gráfica.

Foram aplicadas atividades investigativas a alunos do Ensino Médio e de cursos de Cálculo, que comprovaram a existência desses obstáculos. A análise das soluções e dos erros desses alunos a questões propostas sobre diversos aspectos do conceito de funções, sobre taxas relacionadas e sobre máximos e mínimos mostrou que a maioria dos erros se deve a lacunas na aprendizagem de Matemática da Escola Básica. Isso indica a necessidade de uma abordagem significativa dessa disciplina, visando ultrapassar possíveis obstáculos. Considerando a evolução histórica do conceito de função e as sugestões de Caraça, é possível desenvolver uma abordagem moderna para esse tópico, baseada na observação de fenômenos. A tecnologia pode ser usada para facilitar a visualização e a construção desse conceito pelos alunos. Desse modo, os resultados indicam que uma abordagem adequada de alguns tópicos da Educação Básica, como o de funções, pode minimizar as dificuldades e a reprovação na disciplina de Cálculo I.

Referências

Balomenos, R., Ferrini-Mundy, J. e Dick, T. (1994). Geometria: prontidão para o Cálculo. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Atual Editora, São Paulo.

Bergeron, J. e Hercovics, N. (1982). Levels in the understanding of functions concept. *Proceedings of the Workshop of Functions*. Enschede, The Netherlands.

Brasil (1999). *Ministério da Educação e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília.

________________ (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et lês problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique dês Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caraça, B. DE J. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 43-58). SBEM.

Nasser, L., Sousa, G. & Torraca, M. (2012). Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? *Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.

Palis, G. (2010). A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (em CD). Salvador, BA.

Rezende, W. (2003). O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: Machado, N.J. e Cunha, M.O, *Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática* (pp. 313-336). Escrituras Editora, São Paulo.

Robert, A. e Schwarzenberger, R. (1981). Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level. In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E; Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ.

Tinoco, L. A. A.(coord.) (1989). *Construindo o Conceito de Função*. ProjetoFundão. IM- UFRJ.

Torraca, M. A. A. (2005). *Um estudo sobre álgebra em sistemas computacionais formativos*. Dissertação (Mestrado em Informática), NCE – UFRJ.