XIV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
2015
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

# Evidencias de pensamiento variacional en estudiantes que inician ingeniería

Marvin Mendoza **Valencia**
Universidad Autónoma de Honduras
Honduras
vinmar28@hotmail.com
Carlos Cabezas **Manríquez**
Universidad Católica del Maule
Chile
ccabezas@ucm.cl

**Resumen**

Presentamos algunas conclusiones sobre habilidades de pensamiento variacional que poseen estudiantes de primer año de ingeniería en una universidad chilena. Objetivo del estudio es comprender cómo se manifiesta la presencia de pensamiento variacional en sus razonamientos y las representaciones utilizadas para manifestarlo. Para conseguir tal objetivo, se analizó material escrito, fotográfico y fílmico recopilado en las clases, talleres y sesiones de estudio de los grupos de estudiantes en que se organizó un curso inicial de cálculo. Material básico para los talleres y sesiones de estudio, fueron guías de estudio especialmente confeccionadas para el efecto.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es estudiar las relaciones que los estudiantes producen cuando analizan situaciones dinámicas buscando covariaciones de magnitudes, que permitan la formulación de modelos matemáticos de las situaciones en estudio, entendiendo que el pensamiento variacional se desarrolla y se justifica en la formulación de modelos. Los resultados reflejaron algunas aproximaciones al Pensamiento Variacional, lo que refleja la necesidad de su desarrollo en los distintos niveles de escolaridad.

*Palabras clave*: pensamiento variacional, covariaciones, modelos, habilidades.

## Introducción

El pensamiento variacional ha tomado un lugar central en la investigación de los procesos de aprendizaje de la matemática y desarrollo de habilidades para representar y comprender la realidad. De acuerdo con Vasco (Vasco, 2010) "El objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad". Si, en coherencia con esta concepción del pensamiento variacional, nos situamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los cuales puedan investigar sobre los procesos de cambio que viven a diario, éstos podrán poner en evidencia sus concepciones pre matemáticas y, a través de un currículum adecuado, conducirlos a un aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos que el sistema educativo busca entregar, sistematizar y formalizar.

En este punto y, desde una perspectiva más allá del pensamiento variacional, afirmamos que la matemática no se comienza a aprender en la sala de clases. Esta afirmación es coherente con la descripción que Cantoral (Cantoral, 2000) hace del pensamiento matemático:

"Por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende al pensamiento matemático como una parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas."

Desde ésta perspectiva, se convierte en una necesidad didáctica, conocer las pre concepciones y experiencias pre matemáticas que los estudiantes traen cuando llegan a la sala de clases. Conocer estas preconcepciones, forma, entonces, parte del quehacer docente, pero también del quehacer del investigador en didáctica de la matemática. Godino (Godino, 2011), comentando la posición de ciertos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2005), acerca del enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una "ciencia de diseño" comenta sus reflexiones sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática:

> "¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras?
>
> "¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes? La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática en este último sentido, o sea, como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas".
>
> "Nuestra visión del diseño en la investigación educativa se basa, en parte, en las semejanzas y paralelismos entre la educación y la ingeniería como campos que simultáneamente buscan avanzar el conocimiento, resolver problemas humanos, y

> desarrollar productos para su uso en la práctica" (Hjalmarson y Lesh, 2008, p. 526, en Godino, 2011).

Adhiriendo a esta última posición y considerando la falta de propuestas explícitas para enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del fenómeno del cambio y la variación, particularmente con el fin de aportar al surgimiento de una propuesta de enseñanza del cálculo en el nivel inicial de la educación superior, nos interesa poner en evidencia las manifestaciones que, a pesar de un sistema educativo que no ha puesto atención en el particular, hayan podido desarrollar los estudiantes que llegan a este estadio en su proceso educativo.

## Marco Teórico

Como ya fue dicho en la introducción y en coherencia con Vasco (Vasco, 2010), entendemos por pensamiento variacional aquel tipo de pensamiento matemático que se preocupa de estudiar la variación y el cambio, característicos de los procesos dinámicos presentes en la naturaleza en los que ocurren covariaciones que representan generalmente relaciones de causalidad. En relación a las manifestaciones mediante las cuales los estudiantes expresan la presencia de pensamiento variacional, consideramos como referente la Teoría de Representaciones de Raymond Duval y asociamos las manifestaciones de los estudiantes, a diferentes registros de representación desde una interpretación pre matemática de sus manifestaciones. Entendemos como pre matemática una manifestación que desde el lenguaje verbal y puramente cotidiano y no matemático en la concepción del alumno, encierra potencialmente un concepto matemático expresable en algún registro de representación, ya sea geométrico, algebraico, numérico, tabular u otro.

Ejemplos de expresiones pre matemáticas aparecen en el diálogo de los estudiantes cuando hablan, por ejemplo, de distancias sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada. En la enseñanza parvularia los niños juegan a relacionar objetos, animales con sus expresiones fónicas, los niños no perciben que estén haciendo matemática, sin embargo ubicados en contextos funcionales ellos están construyendo relaciones susceptibles de formalización matemática. A estos últimos se les conoce como conceptos pre numéricos por su proyección hacia los conceptos de ordinal y cardinal. En nuestra interpretación son, de manera genérica, manifestaciones pre matemáticas.

Un tercer referente teórico en este trabajo corresponde a la visualización matemática.

De acuerdo con Torregrosa y Quesada, (Torregrosa y Quesada, 2007), la definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, es un avance en la línea de conocimiento del fenómeno cognitivo, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales.

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por esta razón, concordamos con Torregrosa y Quesada que afirman: "vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría." En nuestro caso, cuando se enfrentan al análisis de situaciones dinámicas en las que intervienen correlaciones de variables.

## Metodología

El presente trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo pues busca conocer el núcleo de las significaciones que grupos de estudiantes manifiestan en las respectivas sesiones de estudio y actividades de taller. Es cualitativo por la naturaleza de sus datos.

La investigación se desarrolló con un curso de cálculo de primer año de ingeniería de una universidad chilena. Los estudiantes, 40 en total, se constituyeron en grupos de estudio por afinidad lo que significó que no todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, sin embargo ninguno llegó a tener más de 7 integrantes ni menos de 4. Los grupos se constituyeron para la realización de trabajos en la modalidad de talleres los que eran evaluados con nota y, sesiones de estudio sin nota pero, de acuerdo a la participación activa de los alumnos, influirían conceptualmente si las notas logradas en las pruebas llegaran a estar ligeramente bajo los niveles de aprobación.

Los talleres se realizaron de manera presencial en la sala de clases, estudiantes ayudantes de cursos avanzados filmaron el trabajo de los distintos grupos.

Las sesiones de estudio de los diferentes grupos se realizaron en los lugares que los estudiantes estimaron convenientes, generalmente lo hicieron en la casa de alguno de los alumnos del grupo y, en horarios que todos los integrantes de los respectivos grupos tuvieran disponibles. Los grupos entregaron filmaciones que ellos mismos realizaron de sus sesiones de estudio.

Para la recolección de la información se usaron las filmaciones y fotografías de los talleres y de las sesiones de estudio. También fueron considerados los trabajos escritos producto de los talleres y de las pruebas escritas.

El método utilizado, se describe a continuación:

1. Se tomó una prueba de diagnóstico.
2. En base a las respuestas de la prueba de diagnóstico y las consideraciones teóricas de Vasco (2006, 2010) y Duval (1999), se establecieron categorías de análisis.
3. Se construyeron situaciones de estudio para los grupos, en base a procesos dinámicos, que permitieran observar en sus procesos de razonamiento, la presencia de pensamiento variacional de acuerdo a las categorías de análisis.
4. Se construyeron situaciones problemáticas para la realización de los talleres.
5. Se filmaron las actividades de los talleres y las sesiones de estudio.
6. Se analizaron los videos y las pruebas
7. Se hicieron las conclusiones.

Con el empleo de esta metodología se pretendía que los estudiantes se potenciaran entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar, sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados, en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo y que pudiera ser interpretada como una manifestación de pensamiento matemático o pre matemático, en particular como pensamiento variacional o pre variacional.

## Descripción de la prueba de diagnóstico

De acuerdo a los objetivos planteados, en la prueba de diagnóstico se consideraron situaciones que los alumnos pudieran interpretar como dinámicas e intentaran establecer relaciones entre variables, que les permitieran conjeturar comportamientos covariacionales a la vez que pudieran describirlos o representarlos mediante diversos tipos de expresiones. Este objetivo no fue declarado a los estudiantes para no influenciar sus reacciones.

Las situaciones planteadas en esta prueba, se detallan en el Apéndice A.

Seguidamente presentamos un reactivo de la prueba de diagnóstico y algunas consideraciones de las producciones estudiantiles.

## Reactivos de la Prueba de Diagnóstico

Presentamos en este apartado, el reactivo uno de la prueba de diagnóstico, las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis.

**Reactivo 1.**

La figura que se muestra a continuación, está construida mediante una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

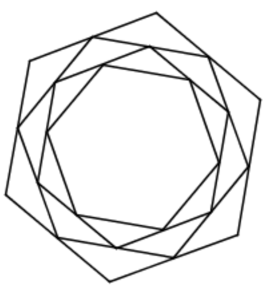


*Figura 1.* Hexágonos inscritos

a. Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa indefinidamente.
b. Agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

Este reactivo fue de gran motivación para los estudiantes ya que la mayoría de ellos presentó planteamientos respecto de las cuestiones planteadas.

Utilizaremos la codificación E1, E2, E3,… En, para referirnos a cada estudiante en particular.

Los estudiantes expresaron en este reactivo que la variación más frecuente en la construcción de los hexágonos era la de dos magnitudes. En ese proceso de construcción de hexágonos, el cambio de tamaño de las figuras con la longitud de los lados del hexágono fueron observaciones que emergieron en sus producciones, por ejemplo:

E2: Siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido

E5: El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias. Ambas citas expresan la variación de tamaño de la figura y la longitud.

Los estudiantes además relacionaron longitud, perímetro y área de la figura señalando que varían conjuntamente en el proceso de construcción de los hexágonos. En el siguiente enunciado se aprecia:

E8: A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados.

Algunos estudiantes no explicitaron la variación de magnitudes ya que expresaron que esta dependerá de las variables seleccionadas. La siguiente expresión da cuenta de esa afirmación.

E7: Considero que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

Con respecto a la variación que observaron los estudiantes, la expresaron mediante lenguaje coloquial utilizando palabras tales como: “achicando”, “decreciendo” para referirse a la disminución del tamaño de la figura en relación al hexágono inicial. Otras expresiones como “el proceso de seguir construyendo hexágonos inscritos continúa hasta llegar a tamaños microscópicos y a dimensiones que no se puede medir” emergen en este primer reactivo de la prueba.

Un estudiante (E8) expresó que “si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea”.

Por su parte E5, expresó que “si el primer lado mide 1m, el segundo lado medirá la mitad y así sucesivamente, y como lo explicado anteriormente el hexágono tendrá infinitos hexágonos más dentro de él”. Lo expresado por el estudiante induce a pensar en cierta madurez en el proceso de construcción que se le planteó, a su vez proporciona evidencias de conocimientos y desarrollo de pensamiento variacional, además se observa desarrollo habilidades de pensamiento superior e indicios de una mirada de cálculo infinitesimal.

En términos porcentuales, un 10% de los estudiantes expresaron que el proceso de construcción de hexágonos finaliza, es decir que es finito. Otro 10% manifestó que el proceso puede continuar indefinidamente, pero sujeto a ciertas condiciones.

En las siguientes citas se recopilan evidencias de la categoría antes señalada. E6, expresa que el proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias. Por su parte E3 considera que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

En la primera cita anterior, se observa que el estudiante reconoció con claridad de lo que sucede con el tamaño de la figura; sin embargo el estudiante argumenta que a partir de un momento no se puede continuar obteniendo otra distancia. Esta afirmación está ligada a una posible creencia de que las magnitudes se obtienen únicamente de la medición mediante un instrumento.

La segunda cita da cuenta que el estudiante visualiza el proceso de construcción de hexágonos es dependiente y está condicionado por sus medidas (longitud del hexágono).

Las dos argumentaciones anteriores reflejan que los estudiantes poseen mayor desarrollo de pensamiento numérico que algebraico.

La mayoría de los estudiantes realizaron sus desarrollos escritos presentando sus argumentaciones en lenguaje natural escrito, sin realizar ningún tipo de cálculo.

El 80% de los estudiantes comprendió la situación problema, a pesar de que cometieron errores al relacionar el punto medio del hexágono, con la longitud de los lados.

E6 expresa lo anterior, ya que para él tomando al principio un hexágono regular, la construcción de estos hexágonos tomando como puntos medios de los lados y así formar otro hexágono, en mi opinión se seguirán construyendo hexágonos cada vez más pequeño. Por lo que puedo observar que la figura disminuye sus lados (dependiendo del valor de la primera) (suponiendo que es 5), la figura tiende a disminuir cada vez más su medida en una fracción. Si el primer hexágono mide 1m, a medida que se van construyendo más hexágonos, su medida de los vértices de los otros hexágonos será menor, sus lados también lo serán, si el lado del hexágono mide1, tomando los puntos medios se pueden formar triángulos con 2 lados iguales con medidas ½, pudiendo así sacar la medida de sus lados.

Lo anteriormente expresado por el estudiante hace referencia al proceso de construcción de hexágonos, donde se considera un hexágono inicial, y en base a este, se construyen otros más de manera indefinida. La argumentación que plasmó el estudiante, evidencia cierto desarrollo de pensamiento variacional y habilidades de orden superior, y visualización del proceso.

Respecto a la manera de objetivar sus registros de representación en el reactivo propuesto, el 10% de estudiantes mezclaron diferentes registros de representación, puesto que expresaron sus argumentaciones combinando lenguaje natural escrito y gráficas (hexágonos, circunferencias). Mientras que otro 10% de los estudiantes desarrollaron argumentos mediante lo numérico y lo escrito. E8 da cuenta de la utilización de estos registros. Para él, si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente. Si el hexágono grande mide 1metro de lado(a)…entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el que vendrá será $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}$ y así sucesivamente.

**Análisis del reactivo 1 de la prueba diagnóstico**

Los estudiantes en su mayoría reconocieron que el proceso de construcción de hexágonos se realiza de manera infinita. Esto fue expresado mediante diferentes argumentaciones discursivas de los estudiantes. En este particular se hizo referencia a la construcción de hexágonos inscritos fue realizada mediante la unión de los puntos medios del hexágono circunscrito anterior. En este orden de ideas, los estudiantes sostuvieron que siempre existirá otro hexágono inscrito, construido en los puntos medios del hexágono circunscrito anterior.

En este proceso de construcción de hexágono se reportan varias visiones al respecto. Algunos estudiantes, expresaron que este proceso se podrá continuar hasta que un lado del hexágono llegue a cero y siga manteniendo la forma de hexágono. Por su parte, otros estudiantes sostuvieron la longitud del lado que será próxima a cero pero no llegará a serlo. Uno de ellos, mencionó que las dimensiones de "algunos hexágonos" serán microscópicas. Otro estudiante, se refirió que el tamaño de los hexágonos se irá achicando, es decir la medidas de su lado se hará tan pequeña hasta un punto que "no se puedan sacar más distancia". Otro, mencionó que el proceso de construcción de hexágonos es "infinito hacia dentro", con la posibilidad que el proceso de construcción podría generar una sucesión de hexágonos hacia "afuera del primero"

Respecto la variación de magnitudes en la construcción del hexágono fueron recurrentes ciertas expresiones en las producciones estudiantiles tales como: "al interior va disminuyendo su lado", "se va achicando el lado", "la figura se hace más pequeña". En algunos casos, variación de dos magnitudes como "el perímetro y el área" y en otros, variación conjunta de tres magnitudes: longitud del lado, perímetro y área.

Otros aspectos de análisis de la prueba diagnóstica responden al análisis de cómo los estudiantes expresaron sus argumentos y qué procedimientos realizaron. En el primer aspecto, los estudiantes utilizaron con mayor frecuencia el lenguaje natural escrito, con excepción de algunos estudiantes que combinaron dos registros. En el segundo aspecto algunas producciones estudiantiles reportan la descomposición del hexágono en triángulos congruentes. En este sentido, algunos estudiantes mencionaron que se originaron "pequeños triángulos" al ir construyendo un hexágono dentro del otro. Para ilustrar este proceso, deconstruyeron la figura y le calcularon la longitud de los lados de los triángulos, iniciando por el hexágono más grande y luego por cada uno de los inscritos hasta encontrar un patrón en la construcción.

## Sesiones de Estudio

Con base en los objetivos propuestos tanto para la clase, como para la investigación y, en los resultados del diagnóstico se diseñaron diferentes situaciones en distintos contextos con el propósito de organizar el estudio de los estudiantes de tal manera que en el estudio de éstas, sus argumentaciones nos revelaran la presencia de elementos del pensamiento variacional emergente. A manera ilustrativa, presentamos la descripción de una de las actividades de las secuencias de aprendizaje elaborada con los propósitos declarados.

### Descripción de la primera situación de estudio

Situación de estudio 1.

*Figura 2*. Situación problema relacionada con funciones trigonométricas

Se describe la sesión de estudio mediante episodios. En ella participa un grupo de cuatro estudiantes que designamos como E1, E2, E2, E3, y E4 en la transcripción de esta.

En la primera parte solicitada, uno de los estudiantes presenta una situación particular, E1 expresa que una persona que iba pasando por una plaza y frente a él había un poste a 12 metros de distancia, detrás del poste había un árbol y arriba del árbol había un gato. El hombre sabía que desde él hacia el árbol había 15 metros de distancia y él quería saber a qué distancia se encontraba el gato.

Ahora para hacer el cálculo se debe hacer con la altura de la persona, ésta debe ser 1,80 aproximadamente. Pero mirando el ángulo para calcular desde la perspectiva del ojo de la persona, 1,70 aprox. El ángulo de visión de la persona hacia el poste habían 20°, ahora la altura del poste. Primero hay que calcular la medida del poste.

E2: Muestra el dibujo y expresan: Ahí está el dibujito, el ángulo alfa por teorema de Thales mide 70° ya que aquí hay una proporción (mostrando los elementos de los triángulos). Hacen más cuentas y deducen la altura del árbol.

Respecto a la variación los estudiantes discuten y expresan algunas ideas, E3 menciona Analizando las situaciones de variación planteadas comentan: Cuando c disminuye el ángulo b aumenta para que se mantenga la igualdad de estos triángulos y se mantenga la igualdad de todos los lados interiores de (murmullo)…

E4: Si el ángulo c disminuye, el ángulo C también disminuye,

Todos: murmullos…

E1: Es que estoy diciendo ángulo y ángulo, ahí hay un error…

Todos: murmullos…

E2: Si pregunta por c esta es una distancia del ángulo A al ángulo B…

E3: Ah! está preguntando por este c, c lado ya, si c, este c aumenta, el ángulo C también aumenta, para mantener la igualdad de los ángulos interiores que deben sumar 180. Porque si el ángulo B está aumentando el ángulo C debe estar disminuyendo.

E2: Si b y c varían simultáneamente, por ejemplo si c crece y b disminuye, a2) deberían hacerlo en la misma proporción.

E3: claro para que no se alterara el triángulo dentro deberían aumentar y disminuir juntos, si lo hacen por separado varían las medidas del triángulo.

E2: para que se mantenga la propiedad de ser un triángulo rectángulo a1) hummmm cuatro.

4. seno (pausa)…aaah aquí la craneamos toda la… (No se entiende) seno (murmullos) seno…seno del ángulooo c e igual aaa opuesto partido por a, murmullos

E2: seno de éste llega…silencio…eeehhh, con los catetos opuestos la adyacente y la hipotenusa dependiendo de cada ángulo se pueden calcular todas las demás funciones trigonométricas que hay en el triángulo.

E3: el seno de C sería 3, no, sería, cuatro quintos y, a ver la tangente dee,

E4: espérate, de B, la tangente de B es cuatro tercios…murmullos…

## Análisis de la actividad

Los estudiantes describen una situación problema que involucran en su solución las funciones trigonométricas, sin embargo la situación no representa variaciones. Se trata de una situación estática y sin pretensiones de representar alguna dinámica o proceso variacional, en efecto las distancias involucradas en el problema son fijas y, aunque la persona que "pasa" por la plaza permanece aparentemente en movimiento, se tiene como referente un punto fijo de su trayectoria. En relación a una actividad de visualización matemática, esta se revela en la aplicación del teorema de Thales, donde consideran un dibujo a partir del cual atribuyen propiedades matemáticas a la situación, justificando la presencia de proporciones que permiten movilizar el cálculo. En el proceso de confección de la situación problema van descubriendo la necesidad de nuevas hipótesis pero en ningún caso descubren motivaciones para integrar a la situación elementos dinámicos.

Las siguientes situaciones que se plantean, movilizan en los estudiantes habilidades para una lectura variacional de la situación, pero debemos considerar que las situaciones son explícitamente variacionales y solicitan a los estudiantes directamente estudio de las variaciones, pero sus aproximaciones a una respuesta que analice y explique las variaciones, responden solo y de manera explícita a las solicitudes hechas. Los estudiantes no analizan las diversas posibilidades de variación, excepto cuando se plantea la variación simultánea de dos lados del triángulo, esto lo entendemos producto de la insinuación de esta posibilidad en la naturaleza de la variación presentada.

Los estudiantes conjeturan acerca de las variaciones de las funciones trigonométricas sin establecer relaciones formales que les permitan estudiar la dependencia entre las variables que intervienen en las respectivas situaciones presentadas.

## Algunas Conclusiones

Las actividades propuestas tanto en la fase diagnóstico, como en la etapa de intervención didáctica pusieron en evidencia la necesidad de desarrollo de habilidades cognitivas así como también de pensamiento matemático en diferentes niveles de escolaridad. Si bien es cierto en las producciones desarrolladas por los estudiantes se observaron diferentes estrategias de resolución, se observó además la debilidad para detectar covariaciones en procesos dinámicos y establecer modelos matemáticos. Lo anterior pone en evidencia la necesidad de trabajar con el desarrollo de Pensamiento Matemático desde los primeros niveles de escolaridad utilizando diferentes recursos y situaciones problemas que permitan que la comprensión de variación se desarrolle como un aspecto natural en la vida del individuo.

## Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (1999). ... Y en Matemáticas, los que instruimos, ¿ qué construimos? *Números, 38*, 39-56.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.*Educational Studies in Mathematics, 52* (3), 215-24.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 125–203). New York, USA: Academic Press.

Cantoral Uriza, R. (2000*). Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ciudad de México: Editorial Trillas.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Godino, J. D., (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas de la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME),* Recife (Brasil).

Hjalmarson, M. A. & Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520- 534). London: Routledge.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005). Mathematics Education as a design science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,(International Reviews on Mathematical Education), l37* (6), 490-505.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 275-300

Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148).

Vasco Uribe, C. E. (2010). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

## Apéndice A

## Prueba Diagnóstico

Le agradecemos resolver los problemas planteados, con el máximo de acuciosidad y poniendo en juego, si es posible, diferentes estrategias dentro del marco de sus conocimientos y originalidades.

**Por favor lea las siguientes solicitudes especiales:**

Realice todos los cálculos que estime necesarios.

Deje plasmado en la hoja de respuestas todo lo que realice.

No borre lo realizado aunque le parezca incorrecto.

Si considera que algo es erróneo y no debe ser considerado en la revisión, sólo enmárquelo y advierta que lo es.

Garantizamos la confidencialidad de la prueba y el uso de la misma para el propósito que la investigación persigue.

**SU APORTE SERÁ MUY VALIOSO Y AGRADECEMOS DE MANERA MUY ESPECIAL SU PARTICIPACIÓN**

**Problema 1** La figura que se muestra a continuación, está construida mediante una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

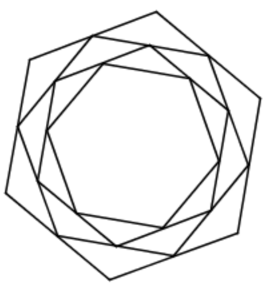


Figura 1. Hexágonos inscritos

a. Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa indefinidamente.
b. Agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

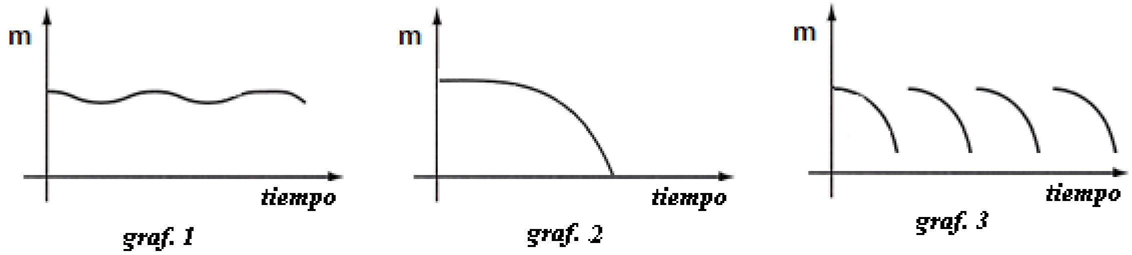
**Problema 2** La población de cierta especie evoluciona en el tiempo de acuerdo al modelo representado por la fórmula:

$E(t) = 5 + 3^{-t}$

Haga un análisis de la evolución de la población.

**Problema 3** Un cierto estanque tiene capacidad para contener 6.000 litros de agua. Si inicialmente el estanque está vacío y se vierte agua en él a razón de $A(t) = \frac{6t}{t+9}$ litros por hora ¿Cuánto tiempo deberá esperar para que el agua vertida en el estanque supere los 5.000 litros? ¿Cuándo llegará a llenarse el estanque?

**Problema 4** Relacione cada una de las siguientes gráficas con el texto que mejor describe la información proporcionada por ésta. Si alguna de las situaciones planteadas no se refleja en alguna de las gráficas que se le presentan, haga una gráfica que a su criterio represente la situación. Además explique la razón del por qué considera cada caso.



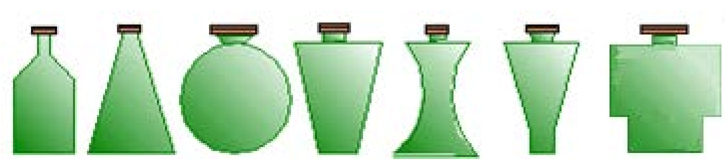

a) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección.

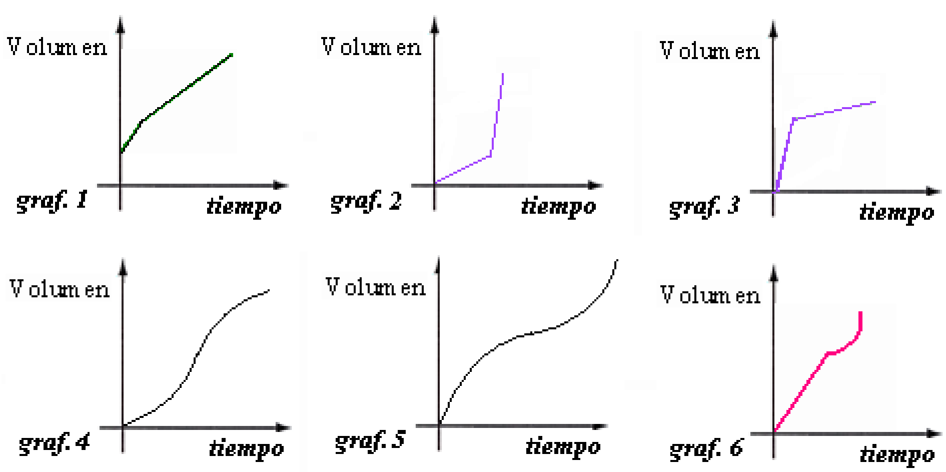
b) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo.

c) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una mezcla del medicamento con suero y vía intravenosa.

**Problema 5** Se presentan 7 frascos y 6 gráficas. Asocie una gráfica con cada frasco y explique el criterio utilizado para ello.

Si considera que, de acuerdo al criterio utilizado, alguna (s) de las gráficas no puede (n) asociarse a frasco alguno, o vice versa, puede diseñar un frasco o proponer una gráfica para completar las asociaciones. En estos casos, escriba las justificaciones pertinentes.



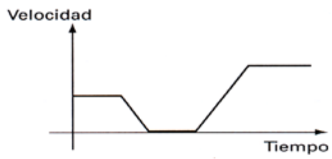



**Problema 6** Bosqueje una gráfica que represente cada una de las siguientes situaciones:

a) La altura de los rebotes de una pelota que cae desde la azotea de una casa con respecto al tiempo.

b) La altura con respecto al tiempo de izar manualmente una bandera en un asta.

**Problema 7** Seleccione el texto que mejor describe la siguiente gráfica. Presente argumentos para justificar su selección o rechazo de cada texto.




a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.

b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido, llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.

c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.

d) Beatriz vive en una casa con desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo, finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.