



## Una propuesta didáctica para la noción de indeterminación

Fabio Alexander **Cortés** Garcés  
Universidad Nacional  
Colombia  
[faalcoga@hotmail.com](mailto:faalcoga@hotmail.com)  
René Alejandro **Londoño** Cano  
Universidad de Antioquia  
Colombia  
[renelondo@gmail.com](mailto:renelondo@gmail.com)

### Resumen

La propuesta pretende describir el nivel de comprensión de estudiantes que cursan espacios de conceptualización relacionados con el Cálculo en cuanto a la noción de indeterminación, partiendo de nociones previas fundamentales como las de límite e infinito. Este análisis se hará por medio de una entrevista socrática, la cual se consolida como una propuesta didáctica para tal fin, en el marco del modelo educativo de van Hiele. Las preguntas del guión entrevista se corresponderán con unos descriptores que inicialmente son hipotéticos, de acuerdo a la experiencia del investigador, pero que finalmente serán concebidos a medida que la entrevista se esté refinando; estos permiten situar y describir el nivel de comprensión en el que se encuentra razonando el estudiante.

*Palabras claves:* Indeterminación, límite, infinito, entrevista socrática, niveles de van Hiele.

### Formulación del problema

#### Justificación

Es evidente que un buen número de estudiantes de último año de bachillerato o primer año de universidad, pueden poseer los conocimientos previos necesarios para resolver operaciones relacionadas con la evaluación de límites. De hecho, algunos estudiantes tienen manejo de las

propiedades en los números reales para la solución aritmética y algorítmica de un límite y si éste produce una forma indeterminada la solucionan de manera correcta; sin embargo, el significado de esta solución desde alguno de los tres contextos (aritmético, gráfico y analítico) no es comprendido.

No obstante, el rastreo bibliográfico realizado, muestra que son pocas las investigaciones hechas alrededor de la comprensión de la noción de indeterminación, aunque se han encontrado algunos estudios referidos solo a una o dos de las formas indeterminadas más comunes y, es por esto, que esta estrategia sería el inicio a otras investigaciones en esta dirección.

El objeto de estudio sobre el cual se fundamenta el problema identificado hace referencia a la comprensión de la noción de indeterminación, vista desde los contextos aritmético, gráfico y analítico. Una de las dificultades que tienen los estudiantes para la comprensión de esta noción es la complejidad que se tiene al momento de razonar con la concepción de infinito. Por eso, aunque algunos de los estudiantes pueden tener el manejo aritmético y algorítmico en la solución de límites que producen formas indeterminadas, siguen teniendo dificultades en la comprensión e interpretación de dichos resultados, lo cual muestra que no hay manejo del pensamiento variacional. Según los lineamientos curriculares se afirma:

“Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- la función como dependencia y modelos de función; las magnitudes;
- el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado”. (MEN, 1998)

La presente investigación está directamente relacionada con el primer núcleo conceptual de los señalados anteriormente, dado que para el cálculo de límites que producen formas indeterminadas o determinadas en las que está involucrado el infinito, la tendencia de la función y las aproximaciones sucesivas son aspectos fundamentales. De acuerdo a lo anterior, la propuesta pretende abordar el siguiente problema:

Los estudiantes de último año de bachillerato y primeros años de universidad que cursan los espacios de conceptualización de cálculo, aunque solucionan de manera correcta ejercicios o problemas de límites que producen formas indeterminadas, no comprenden la noción de indeterminación desde las componentes aritmética, gráfica y analítica.

La investigación busca fundamentar en los estudiantes la noción de indeterminación y propiciar la aprehensión de ésta mediante una propuesta didáctica, la cual pretende posibilitar avances en la comprensión por parte de los estudiantes de grados superiores de las diferentes instituciones educativas, además de los estudiantes de primer año de universidad que cursen espacios de conceptualización del cálculo.

### Marco teórico

En algunos estudios referidos a la comprensión de conceptos matemáticos, tales como el de Jurado y Londoño (2005), se argumenta la pertinencia de la entrevista de carácter socrático, enmarcada en el modelo de van Hiele, en tanto que, se consolida como una propuesta didáctica que propicia un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando, a la vez que se convierte en una experiencia de aprendizaje.

El modelo de van Hiele en el cual se enmarca la investigación se caracteriza por tener tres componentes principales, en los cuales se da un proceso de razonamiento en el estudiante: el primero está relacionado con el *insight*, que da cuenta de la comprensión de los estudiantes del concepto estudiado; el segundo está relacionado con el aspecto descriptivo, postulando y clasificando los niveles de pensamiento en nivel 1 (de reconocimiento o visualización), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación o abstracción), nivel 4 (de deducción) y nivel 5 (de rigor); el tercero está relacionado con el aspecto prescriptivo, en el cual se definen cinco fases para que un estudiante pase de un nivel a otro, así: Fase 1 (de información), fase 2 (de orientación dirigida), fase 3 (de explicitación), fase 4 (de libre orientación) y fase 5 (de integración).

Aunque este modelo educativo está influenciado por la propuesta de aprendizaje planteada por Piaget, también surgen algunas diferencias, tales como:

- Para Piaget es más importante el desarrollo del niño que el aprendizaje, mientras que para los van Hiele el hecho de que los estudiantes avancen en los niveles es lo más importante.
- Para avanzar en los diferentes niveles del modelo de van Hiele, es necesario que los estudiantes tengan un manejo conceptual de los niveles inferiores; si ellos no han alcanzado estos niveles no pueden avanzar a los niveles superiores, mientras que para Piaget, el niño nace con estos niveles superiores, lo único que hace falta es que ellos sean conscientes de ello.

### Los objetos matemáticos

De acuerdo a Sánchez (s.f.), la indeterminación matemática:

“se refiere a aquellos casos del cálculo de límites en que realizando las operaciones habituales, basadas en las propiedades aritméticas de los límites, llegamos a un resultado indefinido, es decir, nos encontramos con una falta de resolución o de determinación en el resultado, que no permite obtener directamente el valor del límite buscado, sino que hace necesarias operaciones adicionales para que, transformando la expresión desaparezca la indeterminación y lleguemos al valor del límite.” (Sánchez, s.f).

Uno de los sustentos para la investigación de la noción de indeterminación en los estudiantes de los grados superiores de bachillerato y primer año de universidad, está basado en el proyecto de investigación “una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”, de la cual surge un trabajo de investigación a nivel de maestría para la comprensión de la noción de límite, usando como estrategia la entrevista de carácter socrático. (Jurado y Londoño, 2005).

Para alcanzar las pretensiones de la investigación, se hace necesario diferenciar las formas indeterminadas de las formas determinadas, mediante una propuesta didáctica que permita identificar un mecanismo desde los contextos aritmético, gráfico y analítico. Esta diferencia en la que se quiere enfatizar se propone, en tanto que, muchas de esas *formas extrañas* que pueden ser

determinadas o indeterminadas, usan los mismos símbolos matemáticos en los que está involucrada la idea de infinito. Tal es el caso de las formas:  $0^\infty$  (forma determinada que equivale a 0) e  $\infty^0$  (forma indeterminada).

Ahora bien, se logra apreciar que los autores que han trabajado con la noción de indeterminación, se enfocan sólo en las formas indeterminadas  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$  dejando de lado las otras expresiones.

### Metodología

Para propiciar el avance en la comprensión en cuanto a la noción de indeterminación, se diseñó una entrevista de carácter socrático fundamentada en el capítulo denominado “Menón” de los diálogos de Platón (Platón, 1996); inicialmente se diseñan y formulan unas preguntas, luego, se hipotetizan descriptores, los cuales permiten evidenciar el nivel en el que se encuentra razonando un estudiante en cuanto a la noción de indeterminación, en el marco del modelo de van Hiele. Las preguntas en primera instancia, son aplicadas en estudiantes de último grado de bachillerato y en estudiantes que están iniciando en la universidad sus procesos académicos en carreras relacionadas con los cursos de Cálculo.

Los resultados son analizados para determinar cuáles preguntas son las más acertadas para el guión de la entrevista final y ayudan a consolidar los descriptores hipotéticos, de tal forma que estén en correspondencia con los niveles del modelo de van Hiele. El guión de entrevista fue diseñado con 40 preguntas, distribuidas en cuatro bloques que están en correspondencia con los niveles que postula el modelo de van Hiele, permitiendo la descripción de la comprensión de la noción en cuestión, en función de las respuestas dadas por los estudiantes.

Según el análisis de los resultados de la entrevista, se ubican los diferentes casos encontrados en uno de los niveles propuestos por van Hiele. Teniendo en cuenta este proceso de análisis de datos, la metodología está basada en un enfoque cualitativo, usando como método el estudio de casos. A continuación, se describe un episodio de las respuestas dadas por el caso Brian en el bloque 3 de la entrevista, quien alcanza el nivel III de razonamiento en el modelo de van Hiele, ya que cumple con los descriptores planteados para dicho nivel.

#### Bloque 3: caso Brian

Para este nivel de la entrevista, C2 podrá intuir que el resultado de  $\frac{0}{0}$  y  $0^0$  no es ni 1 ni 0, además  $1^\infty$  no es 1 y  $0^\infty$  corresponde al valor 0. Para lograr estos procesos de razonamiento, las preguntas proponen al estudiante que relacionen el componente algebraico con el componente gráfico de una función.

En el análisis de la forma  $\frac{0}{0}$ , C2 entra en confusión con sus respuestas, puesto que cuando encuentra la imagen de una función en un valor en el que no está definida, la identifica como indeterminada, pero cuando analiza las tendencias de los valores decimales en los cuales se hacen acercamientos a 0 por derecha y por izquierda, dice que su resultado es un decimal como se muestra a continuación.

Pregunta 7: Teniendo en cuenta las tendencias de los resultados de las expresiones

fraccionarias, en las cuales el numerador es un valor muy cercano a 0 y el denominador es otro valor muy cercano a 0 (por izquierda en la tabla 3 y por derecha en la tabla 4), ¿qué puedes concluir acerca de la expresión  $\frac{0}{0}$ ?

Tabla 3

$\frac{10^{-15}}{-10^{-12}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-14}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-16}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-18}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-20}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-22}}$
-0,001	-0,1	-10	-1000	-100000	-10000000

Tabla 4

$\frac{10^{-15}}{10^{-12}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-14}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-16}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-18}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-20}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-22}}$
0,001	0,1	10	1000	100000	10000000

Respuesta del estudiante

7) Que la expresion  $\frac{0}{0}$  con las condiciones que propone el ejercicio, da como resultado una expresion decimal

Figura 1: Respuesta de C2 a la pregunta 7

Esto cumple con el segundo momento de la entrevista de carácter socrático, en el cual acontece un desequilibrio conceptual.

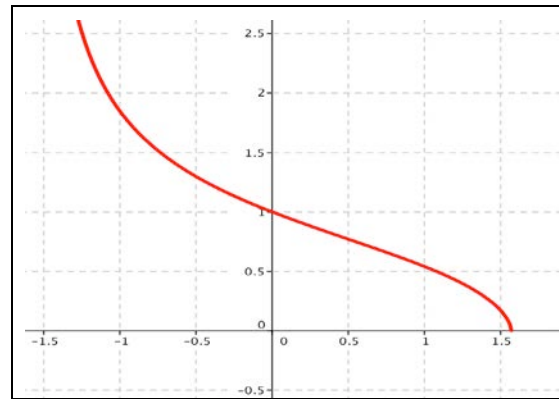
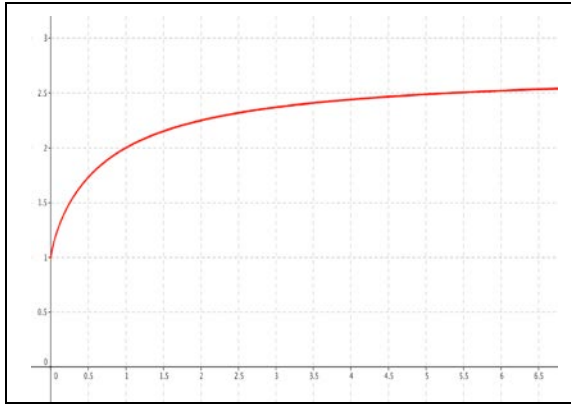
Con la forma  $1^\infty$ , el estudiante ya determina que su resultado no es 1 y logra relacionar el componente algebraico con el gráfico, al determinar el valor de los límites propuestos.

Pregunta 29:

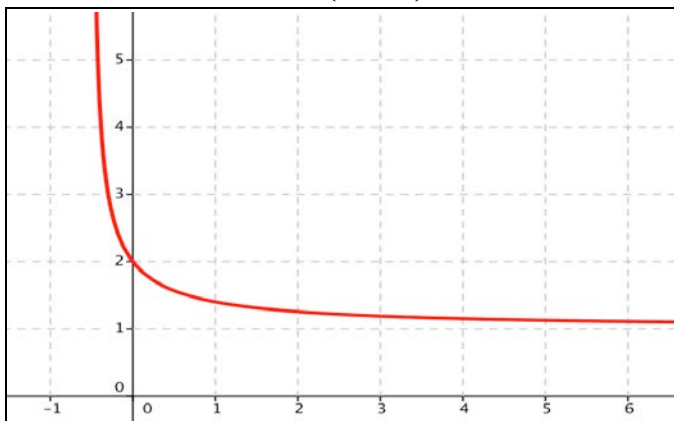
A continuación, se presentan algunas funciones con sus respectivas gráficas:

a.  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b.  $g(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$



$$c. h(x) = \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$



A partir de las gráficas anteriores, podrías encontrar el valor al cual tiende la función cuando:

- ✓  $x$  tiende a  $\infty$  en la gráfica a)
- ✓  $x$  tiende a 0 en la gráfica b)
- ✓  $x$  tiende a 1 en la gráfica c)

Pregunta 30:

¿Los resultados anteriores, pertenecen al conjunto de los números reales?, ¿hay diferencias en los resultados?

Respuesta del estudiante

2a) - cuando tiende a  $\infty$  se aproxima a ealer  
 - se aproxima a uno  
 - se aproxima a  $\infty$  infinito

30) el infinito no es un número así que todos los resultados no están en los números reales

Figura 2: Respuesta de C2 a las preguntas 29 y 30

Para los demás casos también logra encontrar el valor de los límites, aunque en este caso no se le pide al estudiante que conjeture cuáles son las condiciones para que una expresión matemática corresponda a una forma indeterminada o determinada, sin embargo, abre el camino para que el entrevistado logre crear nuevas redes de relaciones que lo lleven a deducirlas.

En vista del análisis de las preguntas, se puede concluir que C2 logra cumplir con los descriptores planteados para el nivel 3 de razonamiento del modelo de van Hiele.

Teniendo en cuenta que la entrevista socrática diseñada, además de permitir ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento en el modelo, se convierte en una experiencia de aprendizaje en relación a la noción de indeterminación, se consolida como una propuesta didáctica para tal fin.

### Resultados

Los resultados obtenidos en la investigación, muestran como el caso etiquetado como C1 logra alcanzar el nivel II de razonamiento del modelo de van Hiele, mientras que el caso etiquetado como C2 alcanza el nivel III; la entrevista de carácter socrático se consolida así como una propuesta didáctica que permite evidenciar los descriptores cumplidos por los entrevistados, en función de las respuestas dadas, además de propiciar un avance en la comprensión, mediante preguntas alternas acerca de la noción de indeterminación.

Los descriptores planteados, producto del trabajo de campo y del refinamiento continuo de la entrevista, se convierten en resultado esencial del presente estudio y se detallan a continuación:

#### Nivel I:

- Identifica la operación potencia como el producto de la base tantas veces lo indique el exponente.
- Reconoce gráficamente una función en el plano cartesiano.
- Dado un conjunto de expresiones algebraicas que corresponden a funciones, identifica las polinómicas, las racionales y las exponenciales.
- Calcula límites de funciones por simple inspección, cuyos valores son números reales.

#### Nivel II

- Determina de forma aritmética la tendencia de las expresiones  $\frac{k}{0}$ ,  $\frac{0}{k}$ ,  $\frac{k}{C}$ ,  $1^k$ ,  $k^0$ ,  $0^k$ , con  $k, C \in R \neq 0$ .
- Dada la expresión algebraica o la gráfica de una función, encuentra su imagen en un punto determinado.
- Identifica claramente el crecimiento o decrecimiento de una función.
- Establece los valores de  $x$  para los cuales una función racional no está definida.
- Interpreta gráficamente el límite de una función en un punto, teniendo en cuenta que no es necesario que exista en este punto.

## Nivel III

- Conjetura que las expresiones de la forma  $\frac{k}{0}$ ,  $\frac{0}{k}$  y  $\frac{k}{C}$  pueden tender a valores distintos de 0 ó 1.
- Conjetura que expresiones de la forma  $C^k$ , con  $0 < C < 1$  tienden a 0 cuando  $k$  crece, y con  $C > 1$  tienden a valores cada vez mayores, conforme  $k$  también lo hace.
- Conjetura que expresiones de la forma  $k^0$  y  $0^k$  pueden tender a valores distintos de 0 y 1.
- Reconoce gráficamente cuando una función crece al infinito o decrece al infinito.
- Establece gráficamente el valor del límite de funciones tales como  $y = x^{\frac{1}{x}}$ ,  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ ,  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , entre otras, que conducen a las formas especiales.

### Conclusiones

#### Consecución de los objetivos:

##### Objetivo general:

Diseñar una entrevista socrática para la comprensión de la noción de indeterminación, a través de la descripción y análisis de los procesos de razonamiento de los estudiantes, de acuerdo a la consecución de ciertos descriptores en el marco del modelo educativo de van Hiele.

Para alcanzar este objetivo fue necesario plantear unos objetivos específicos de carácter experimental:

##### Objetivos específicos:

1. Aplicar una entrevista socrática a estudiantes de último grado de bachillerato y primeros semestres de universidad que estudian matemáticas, para determinar los descriptores que los ubica en uno de los niveles del modelo de van Hiele.

Los descriptores planteados para ubicar los estudiantes en uno de los niveles de van Hiele, fueron construidos a partir de los conceptos matemáticos propios que hacen parte del objeto de estudio (noción de indeterminación). Para cada uno de los niveles del modelo de razonamiento de van Hiele se proponen los descriptores que conceptualmente deben tener los estudiantes para determinar el grado de comprensión de la noción de indeterminación.

2. Diseñar los descriptores apropiados para determinar la comprensión de los estudiantes de la noción de indeterminación, en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele.

El diseño de los descriptores se hacen en conformidad con los niveles de van Hiele y los procesos de razonamiento de los estudiantes sobre el concepto en cuestión. A continuación se hace una descripción detallada del cumplimiento de los descriptores en cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (visualización) se proponen cinco descriptores, los cuales tratan conceptos matemáticos como: números en forma de fracción e interpretación de una potencia, se aborda al concepto de función desde su componente gráfico y el de límite de una función en un punto. Este



nivel se toma como el momento de confianza en términos de Menón tomado de los diálogos de Platón, en el cual el estudiante por su claridad en los conceptos cree saber las respuestas a las preguntas planteadas en la entrevista. Este primer nivel fue superado por los casos C1 y C2 puesto que cumplieron con cada uno de los descriptores planteados para el nivel, el análisis a las respuestas se hizo a partir del método de investigación planteado por Stake (1999), estudio de casos.

Para el nivel 2 (análisis) se plantean cinco descriptores, los cuales tratan el objeto de estudio (noción de indeterminación) mediante el análisis de los resultados decimales que se hacen a los diferentes acotamientos por izquierda y por derecha a las formas indeterminadas  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$  y  $0^0$ ; también a la forma determinada  $0^\infty$ . Este es el primer acercamiento que hace el estudiante a la concepción de infinito potencial, puesto que puede deducir cuando una serie de resultados crece o decrece. También analiza el límite de una función desde la gráfica intuyendo que no es necesario que exista la función en ese punto para que el límite de la función exista, y además logra establecer cuales son los valores en los cuales una función racional no está definida. Este nivel hace parte del segundo momento (desequilibrio) de la entrevista de carácter socrático en el cual se torpedea al estudiante para que sus conocimientos previos entren en conflicto. Para los casos que se estudian sus procesos de razonamiento logran superar este nivel de comprensión.

Para el nivel 3 (abstracción) Se plantean cinco descriptores, donde para este nivel se pide al estudiante que identifique con claridad algunas características de las formas indeterminadas. Por ejemplo, deducir que el resultado de las formas indeterminadas  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$  y  $0^0$  no es ni el valor 0 ni el valor 1 y el resultado de la forma determinada  $0^\infty$  es 0. Los estudiantes están en capacidad de determinar si una función crece o decrece al infinito, e identifica el valor del límite de las funciones que generan formas indeterminadas de forma gráfica. Todavía este nivel hace parte del momento del desequilibrio de la entrevista de carácter socrático. En el análisis realizado a C1 y C2 se pudo concluir que en este nivel tuvieron algunas dificultades, puesto que algunas de sus respuestas eran ambiguas, pero mediante los aportes de información lograron concretar algunas, lo cual hizo que lograran alcanzar este nivel.

Nivel 4 (análisis) Se plantean cuatro descriptores, los cuales dan cuenta del análisis realizado a las características que hacen que una expresión matemática pueda generar una forma determinada o indeterminada. En este punto de la entrevista ninguno de los casos estudiados logro alcanzar el nivel puesto que no tuvieron el lenguaje para elaborar conjeturas válidas acerca de cuando una forma es determinada o indeterminada. Este nivel hace parte del momento de equilibrio conceptual.

3. Identificar el nivel de razonamiento de un estudiante en cuanto a la noción de indeterminación, mediante los descriptores que son concebidos, a través del refinamiento del guión entrevista.

Ahora bien, mediante los descriptores planteados se pudo analizar los procesos de razonamiento de los dos casos de estudio, se pudo concluir que el caso C1 analizado no logra alcanzar el nivel 3 de razonamiento puesto que no intuye cuales son las condiciones para identificar que una expresión matemática es una indeterminación o una forma determinada. El

caso C2 no logra alcanzar el nivel 4 de razonamiento puesto que no tiene el lenguaje para interpretar las condiciones que hacen que una expresión matemática corresponda a una forma determinada o indeterminada.

### Proyectos hacia futuro

Las futuras líneas de investigación que se abren a partir de este trabajo, pueden ser:

- Mejorar el guión de la entrevista abordando las formas indeterminadas que tienen que ver con infinito como  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty^0$ ,  $0 \cdot \infty$ ; llevando al estudiante que razone sobre qué las hace indeterminadas.
- La presente investigación logra ubicar al estudiante en uno de los niveles de van Hiele, sobre la comprensión que éste tiene acerca de la noción de indeterminación; quedan las puertas abiertas para una nueva investigación en la cual se construya una entrevista de carácter socrático la cual permita conseguir que un estudiante pueda avanzar de un nivel de razonamiento a otro en la comprensión de la noción de indeterminación.
- Extender la entrevista socrática como una nueva estrategia metodológica en la comprensión de otros conceptos matemáticos como la noción de infinito, límite de una función, discontinuidad y derivada los cuales dan sentido a las formas indeterminadas.

### Referencias y bibliografía

- Jurado, F. M., & Londoño, R. A. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie via áreas de figuras planas*. Medellín, Colombia.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá.
- Platón. (1996). *Diálogos*. México: Porrúa.
- Sánchez, J. (s.f.). *Cala.unex*. Recuperado el 5 de 12 de 2013, de Cala: <http://cala.unex.es/cala/epistemowikia/images/6/69/Indeterminaciones.pdf>
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. España: Ediciones Morata.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Heckelin, M. (2010). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Santa Fé, Esperanza, Argentina.