Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do Ensino Médio

Edson Rodrigues da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP
Brasil
professoredsonrodrigues@gmail.com
Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP
Brasil
zeze@pucsp.br

Resumo

Neste artigo apresentamos um recorte do trabalho de Silva (2012), que contempla umasituação de aprendizagem com oito estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo, cujo objetivo foi levá-los à construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir da ideia de taxa de variação média. Com esse intuito, e fundamentados nos pressupostos da Engenharia Didática, aplicamos e analisamos uma situação de aprendizagem composta por cinco atividades. Como aporte teórico utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, que nos auxiliaram na elaboração das atividades, cuja análise apontou que esses estudantes, por meio da mobilização simultânea dos registros de representação gráfica, algébrica e tabular, construíram significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação média.
Palavras-Chave: Taxa de variação média. Taxa de variação instantânea. Registros de Representação Semiótica. Teoria das Situações Didáticas.

Introdução

Identificar quando a representação gráfica de uma função cresce, decresce ou é constante deve ser uma tarefa trivial para qualquer cidadão que tenha concluído a Educação Básica, todavia, para perceber o quão rápido essa representação gráfica cresce ou decresce, ou seja, qualificar seu crescimento e decrescimento, é necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação. Segundo Rezende (2003, p. 33), “no mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto esta está crescendo/decrescendo”, ou seja, é importante que a ideia de taxa de variação faça parte do conhecimento matemático de todos. Todavia, sabemos que esta não é a realidade da maior parte da população, como podemos observar no relato do autor, ao expor que o índice de não aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial pode chegar a 95% entre estudantes do Ensino Superior que, constatamos que representam apenas 13,9% dos brasileiros entre 17 e 25 anos[1], quanto aos demais, se não tiveram acesso a estas ideias na Educação Básica, não mais as terão.

Rezende (2003) credita essa situação ao fato de que alguns problemas clássicos do Cálculo Diferencial são evitados, ignorados, ou tratados sem a devida atenção pelos professores da escola básica. Ponderamos que se estes problemas fossem abordados, ainda que intuitivamente, nesse nível de escolaridade, com o objetivo de levar os estudantes à construção de significado para suas noções fundamentais, essas fariam parte do conhecimento matemático de grande parte da população.Para nós, a problemática do estudo do Cálculo Diferencial na escola básica está em focar o processo de ensino e de aprendizagem nas ideias que o fundamentam e não em antecipar conteúdos e metodologias dos cursos universitários. Pensamos que essas ideias não são de difícil assimilação, pelo contrário, são simples e passíveis de serem compreendidas tanto por estudantes da escola básica quanto por estudantes universitários, basta que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

Posto isso, nos detivemos em buscar trabalhos que sugerissem abordagens intuitivas para a ideia de taxa de variação sem tratá-la com o rigor e formalismo do Ensino Superior, com o intuito de elaborar e aplicar uma situação de aprendizagem para um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Assim, encontramos em Machado (1988), Silva (2002) e Trotta (1980), as concepções pertinentes ao objeto matemático taxa de variação que nortearam nossos estudos, visto que para o ensino das noções de Cálculo Diferencial esses autores privilegiam “o significado das ideias fundamentais em detrimento do acúmulo de técnicas operatórias ou de definições formalmente rigorosas”. (Machado, 1988, p. 4).Desse modo, os estudos referentes ao objeto matemático taxa de variação nos permitiram visualizar outros métodos para seu ensino e aprendizagem e nos nortearam na tentativa de atingir o objetivo dessa situação de aprendizagem: Levar um grupo de estudantes à apropriação dos conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média.

Para atingir esse objetivo, bem como para desenvolver as atividades que compuseram a situação de aprendizagem, baseamo-nos na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau.A Teoria de Registros de Representação salientou a importância da diversidade de registros de representação e a articulação entre os mesmos nas atividades que compuseram a situação de aprendizagem, enquanto a TSDnos auxiliou a modelar o processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea com base nasrelações didáticas em que se pode identificar as interações entre o professor, o aluno, o saber e o meio, epropôs um modelo teórico para a construção, análise e experimentação da situação de aprendizagem.

[1] Informações retiradas de site http://www.unb.br/noticias/unbagencia/unbagencia.php?id=3112 em22/06/2012.

Isso posto, adotamos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (2009) como metodologia de pesquisa visto que, de acordo com a autora, “como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino” (Artigue,1995, p. 36. tradução nossa). No processo da Engenharia Didática, Artigue (1995) delimita quatro fases fundamentais: a primeira, denominada de análises preliminares, a segunda voltada à concepção e análise *a priori* da sequência didática, a terceira designada à experimentação, e a quarta fase voltada à análise *a posteriori* e validação.

A Situação de Aprendizagem – Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea

Participaram voluntariamente do experimento oito estudantes, aqui apresentados por meio de pseudônimos, da terceira serie do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada na cidade de Santo André – SP que, na época, contava com aproximadamente 1700 alunos matriculados no Ensino Fundamental e Médio, distribuídos em três períodos. As cinco atividades que compuseram a situação de aprendizagem foram aplicadas em um encontro com duração de aproximadamente 2 horas, onde os oitos voluntários foram dispostos em quatro duplas, para facilitar a troca de informações e as discussões entre os componentes, o que vai de encontro às orientações dos PCN+, de que “a aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta”. (BRASIL, 2002, p.120).

Análise da Situação de Aprendizagem

Atividade 1 – O maratonista Marílson Gomes dos Santos é o maior vencedor brasileiro da São Silvestre, em 2010 ele completou a prova em aproximadamente 44min. Sabendo que o percurso da maratona de São Silvestre é de 15 km, determine a velocidade média desse maratonista em km/h, em seguida responda:

a) A velocidade média desenvolvida pelo maratonista durante a prova nos fornece informações precisas quanto a sua velocidade nos últimos 200 metros da corrida? Explique.

b) Pode-se afirmar que esse maratonista em nenhum momento ultrapassou sua velocidade média? E que a velocidade média desenvolvida pelo mesmo foi sua velocidade em toda a maratona? Explique sua resposta.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber que a velocidade média de um móvel, em um determinado intervalo, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um intervalo muito pequeno, ou em um instante qualquer. Logo no inicio, deparamo-nos com duas dificuldades que requereram a intervenção do professor, a primeira referiu-se a conversão das unidades de medida necessárias ao cálculo da velocidade média do maratonista em km/h e,a segunda, ao cálculo de sua velocidade média.Quando questionados se haviam estudado as conversões de unidade de medida ao longo de sua escolaridade, todos osalunos responderam que não ou que não lembravam, fato esse, que levou o professor a apresentar (relembrar) um procedimento para realizar tal conversão. Para isso, foi utilizadaa regra de três simples, por ser um processo de resolução conhecido pelos estudantes.

A dificuldade referente ao cálculo da velocidade média pôde ser percebida por meio da afirmação de William, “*a gente ta apanhando agora pra chegar na velocidade*” e, quando questionados a respeitos de possíveis estratégias para se obter a velocidade média do atleta, Artur afirmou que sua velocidade média poderia ser obtida da seguinte maneira: “*se ele correu em 44* *minutos, 15 quilômetros, o certo devia ser eu dividir 44 por 15, por que ai daria um tempo para cada quilômetro*", o que nos levou a inferir que a ideia de velocidade média não fazia parte de seu conhecimento matemático. Assim, a intervenção do professor foi de extrema importância para levar os estudantes à compreensão da noção de velocidade média de um móvel por meio de situações concretas, comuns aos alunos.Convém ressaltar que, tanto a noção de velocidade média quanto a de conversão de unidades, de acordo com o atual currículo do Estado de São Paulo, faziam parte do conhecimento matemático dos estudantes que participariam da pesquisa.

Para o item (a), esperávamos levar os estudantes a um questionamento quanto à precisão do cálculo da velocidade média desenvolvida pelo atleta durante a maratona em relação a um intervalo relativamente pequeno, de modo que concluíssem que nos últimos 200 metros de corrida a velocidade do maratonista possa ser diferente de sua velocidade média. A dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur afirmou que a velocidade média do maratonista fornece informações quanto a um intervalo de tempo de corrida e não da corrida inteira, o que nos levou a inferir que os estudantes não compreenderam a noção de velocidade média apresentada pelo professor.Enquanto as demais duplas concluíram que a velocidade média do maratonista não corresponde a sua velocidade durante toda a corrida, como se pode observar na figura 1, que mostra a solução apresentada por Gabriel e Adriano.

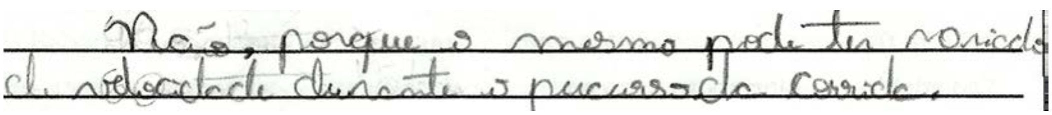

Figura 1. Resolução do item a da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano

Para o item (b), esperávamos que os estudantes percebessem que não se pode afirmar que o corredor não ultrapassou sua velocidade média durante a maratona, nem que a velocidade desenvolvida pelo atleta foi constante e igual a sua velocidade média.

Novamente, só Guilherme e Artur não atingiram o objetivo deste item, pois afirmaram que a velocidade do maratonista não ultrapassou sua velocidade média e, que sua "*velocidade foi constante e igual à velocidade média*", o que levou o professor a retomar a ideia de velocidade média com esses alunos,de modo a levá-los a perceber o erro/equivoco cometido, como se pode observar na fala de Artur, "Éverdade, pode ser que ele diminuiu para pegar água né!". Já as demais duplas atingiram o objetivo deste item, como se pode observar na figura 2, que apresenta a solução dadupla Gabriel e Adriano.

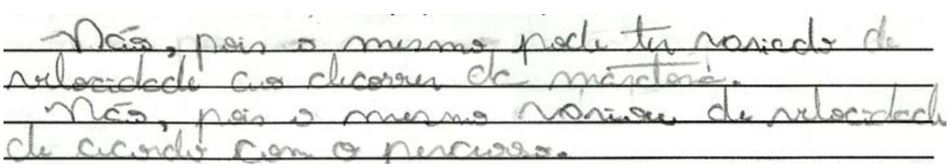

Figura 2. Resolução do item b da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano

.

Atividade 2 – Determine a velocidade média de um carro entre às 8h e às 10h de um determinado dia, sabendo que às 8h ele estava no quilômetro 50 e às 10h estava no quilômetro 210 da mesma rodovia. A seguir responda:[2]

a) É possível afirmar que o carro não ultrapassou os 80 km/h no intervalo considerado? Justifique sua resposta.

b) Sabendo que durante esse percurso o carro esteve parado durante 20 minutos, o que se pode afirmar sobre sua velocidade máxima entre os instantes considerados?

c) A velocidade média desse carro nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo em um determinado instante de tempo, por exemplo, as $9h\ 33min$? Explique sua resposta.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a uma reflexão quanto à precisão do cálculo da velocidade média de um móvel em um intervalo muito pequeno ou em um instante qualquer, e fazê-los sentir, ainda que intuitivamente, a necessidade de uma nova grandeza para o cálculo da velocidade de um móvel em um instante.

Para o item (a), esperávamos que os estudantes deduzissem que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não ultrapassou sua velocidade média no intervalo dado, e apresentassem uma justificativa plausível para esse fato. Somente Guilherme e Artur não atingiram o objetivo deste item, pois concluíram que o veículo não ultrapassou sua velocidade média pelo fato da mesma ser constante, oque levou o professor a retomar as explicações apresentadas no item b da atividade anterior e, novamente, apresentar a ideia de velocidade média para esses estudantes.Já as demais duplas perceberam, quase que instantaneamente, que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não foi maior ou menor do que sua velocidade média.

Para o item (b) esperávamos que os estudantes percebessem que o fato do veículo ter permanecido parado durante vinte minutos e ter percorrido a mesma distância no mesmo intervalo de tempo, implica em uma velocidade máxima maior do que sua velocidade média. Embora Guilherme e Artur tenham mobilizado corretamente tanto a ideia de conversão de unidades de medida quanto a de velocidade média, a dupla calculou a velocidade média do veículo em um intervalo de 100 minutos (descontando os 20 minutos que o veículo esteve parado) e compararam-na com o resultado apresentado no item anterior, seguidoda afirmação "*Agora aumenta de 80 km/h para 96,38 km/h*", o que levou o professor a intervir por meio dos seguintes questionamentos: "*Mas os fato de o veículo ter permanecido parado por 20 minutos diminui o tempo de viajem? Ou foram gastas as mesmas 2h? O que vocês acham?*" levando-os a refletir quanto a solução que apresentaram, como se pode observar na fala de Guilherme, "*É mesmo, o tempo não diminui. Então ele correu mais né*".Já as demais duplas atingiram o objetivo deste item,como se pode observar na figura 5, que apresenta a solução de Gabriel e Adriano.

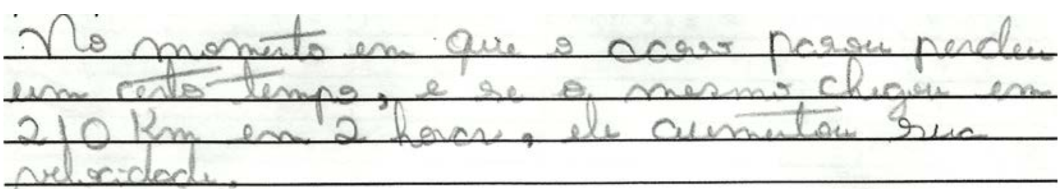

Figura 3. Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos Gabriel e Adriano

[2] Adaptado de Machado (1988, p. 30).

Para o item (c), esperávamos que os estudantes concluíssem que a velocidade média desenvolvida pelo veículo no intervalo apresentado, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante. Embora as duplas Guilherme/Artur e Gabriel/Adriano tenham afirmado que a velocidade média do veículo não fornece informações quanto a sua velocidade em um determinado instante, suas justificativas fugiram as nossas expectativas, pois ambas particularizaram-na por meio das informações apresentadas no item b, ao justificar suas soluções recorrendo ao fato de o veículo ter parado por vinte minutos e por não se saber em que instante o veículo parou. Já as demais duplas atingiram o objetivo o objetivo esperado, visto que para os alunos Leonardo e William, a "*velocidade do veículo pode ter variado ao longo do percurso*", enquanto para a dupla Caroline e Daniel, o veículo pode, em alguns momentos, ter realizado "*movimentos acelerados ou retardados*".

Após os estudantes terem desenvolvido as atividades 1 e 2, o professor apresentou uma devolutiva e iniciou a uma institucionalização local, em que formalizou com os alunos que a velocidade média de um móvel não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante por meio de alguns questionamentos pertinentes as atividades desenvolvidas.

Atividade 3 – Ao fim de um teste de resistência de um veículo popular, sua trajetória foi modelada de acordo com a função horária $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ (s em metros, t em segundos), a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Considere o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, calcule $s(2)$ e $s(4)$ e, em seguida, determine a velocidade média deste veículo nesse intervalo de tempo.

b) Agora, determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 3s]$.

c) Determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$?

d) Considere agora o intervalo de tempo $[2s, (2 + \Delta t)s]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 2s$, calcule $s(2)$ e $s(2 + \Delta t)$ e, em seguida, determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

e) Com base na expressão matemática apresentada como solução para o item anterior, complete o quadro utilizando 4 casas decimais e, em seguida preencha as lacunas da frase abaixo.

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$						

O valor de Δtestá se aproximando de _______, ao mesmo tempo, o valor de $v(\Delta t)$ está se aproximando de ______.

f) Como você interpretaria fisicamente a velocidade média do veículo no item (d), quando Δt tende a zero?

g) Qual a velocidade do veículo no instante $t = 2s$?

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes ao cálculo da taxa de variação instantânea de um veículo a partir da taxa de variação média de sua posição em relação ao tempo por meio da mobilização dos registros de representação algébrica e tabular.

Para os itens (a), (b) e (c), esperávamos que os estudantes apresentassem a taxa de variação média da função $s$em alguns intervalos previamente escolhidos por nós, e percebessem intuitivamente que esses intervalos diminuem cada vez mais, e que tendem há um instante t. No início da resolução destes itens,constatamos que os estudantes depararam-se com algumas dificuldades parasubstituir os valores correspondentes ao tempo na função $s(t)$, que só foram superadas por meio da intervenção do professor ao verbalizar que "*bastasubstituir os valores dados na função s*".Todas as duplas apresentaram a taxa de variação média da posição em relação ao tempo nos intervalos fornecidos, exceto os alunos Guilherme e Artur, que não realizaram as substituições corretamente, quecompreenderamseus erros quando o professor apresentou a devolutiva destes itens, como se pode observar na fala de Artur "*A então era isso!*".

Almejávamos que para o item (d) os estudantes apresentassem a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo genérico $[2s, (2 + \Delta t)s]$, em que Δt corresponde a um acréscimo muito pequeno ao instante t, e concluíssem que a expressão $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ é a solução mais adequada para esse item.Somente Caroline e Daniel chegaram à solução esperada e atingiram o objetivo deste item quase que instantaneamente, enquanto os demais, não interpretaram o enunciado como esperávamos e não mobilizaram os conhecimentos necessários para chegar a solução almejada, pois tentaram determinar o valor de Δt por meio de manipulações algébricas, tomando Δt como um valor desconhecido. E quando questionados, prontamente exclamaram que não conseguiam determinar o valor de Δt, fato esse, que nos chamou a atenção, pois não foi solicitado o valor de Δt e, que necessitou da intervenção do professor, querealizou uma leitura minuciosa do enunciado deste item junto aos alunos, de modo a levá-los a interpretar o que lhes foi solicitado e abandonar o tecnicismo até então empregado, em detrimento do cálculo da taxa de variação média da posição em relação ao tempo no intervalo fornecido.

Para o item (e) esperávamos que os alunos deduzissem, para o intervalo $[2s, (2 + \Delta t)s]$, que á medida que o valor de Δt tende a zero, a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t tende à taxa de variação instantânea no instante $t = 2s$, e completem o quadro fornecido, como segue abaixo:

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$	14	10	7,3	7,03	7,003	7,0003

E esperávamos que percebessem que à medida que o valor de Δt tende para zero, o valor correspondente de $v(\Delta t)$ tende para 7 m/s, e que esse valor corresponde à velocidade do veículo no instante $t = 2$.Nenhuma dupla apresentou dificuldades para completar o quadro fornecido e chegar à solução esperada, mas Guilherme e Artur afirmaram que quando "*o valor de Δt está se aproximando de 0,0001, ao mesmo tempo, o valor de v(Δt) está se aproximando de 7.0003*", o que levou o professor intervir por meio do seguinte questionamento: "*E se diminuirmos o intervalo cada vez mais, para 0,00001? E se ele chegar bem pertinho de zero, o que ocorre com a velocidade?*", quando Artur respondeu "*quando Δt se aproxima de zero, a velocidade é 7*", o que nos levou a inferir que a dupla também atingiu o objetivo deste item.

Para o item (f), esperávamos que os alunos percebessem que à medida que Δt tende a zero a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$. Embora os estudantes não tenham relatado esse fato, constatamos, por meio de suas verbalizações, que todos atingiram esse objetivo, entretanto, Guilherme e Artur interpretaramΔt tendendo a zero como t tendendo a zero (instante em que se inicia o movimento do veículo), o que nos levou o professor a retomar as discussões realizadas no item anterior de modo a levá-los a perceber que era o intervalo de tempo que estava tendendo a zero.

Já para o item (g), almejávamos que os estudantes apresentassem a taxa de variação instantânea do veículo no instante $t = 2$, e concluíssem que sua velocidade neste instante foi igual a $7m/s$, pois quando Δt tende a zero, $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ tende a 7. Todas as duplas atingiram a finalidade desse item quase que instantaneamente. Somente os alunos Guilherme e Artur afirmaram, inicialmente, que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $4\ m/s$ e, logo em seguida, perceberam, com o auxilio do professor e por meio das inferências pontuadas nos itens anteriores, que avelocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $7\ m/s$.

Atividade 4 – Agora com o auxilio do geogebra, retomemos os itens da atividade anterior. No referencial cartesiano, construa a curva de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, em seguida faça o que se pede.

a) Para o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, você verificou que $s(2) = 4$ e que $s(4) = 30$, em que $(2, s(2))$ e $(4, s(4))$ podem representar dois pares ordenados, que por sua vez, podem ser representados no plano cartesiano por dois pontos. Marque esses pontos na parábola e os nomeie de A e B respectivamente, em seguida faça o que se pede:

i. Trace uma reta definida por A e B, selecione a ferramenta "inclinação" e aplique-a sobre a mesma, em seguida, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare com o resultado que você apresentou no item (a) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

ii. Apresente a equação da reta definida por A e B, em seguida verifique se há algo comum entre a equação da reta e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

b) Para o intervalo de tempo $[2s, 3s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B'(3, s(3))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B', aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, em seguida, compare o resultado com a solução apresentada no item (b) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B' e verifique o que há em comum entre esta equação e o valor da razão fornecido obtida no item anterior.

c) Para o intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B"(2.1, s(2.1))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B", aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare o resultado obtido com o resultado que você apresentou no item (c) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e $B"$ e novamente observe o que há em comum entre esta equação e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber, por meio da mobilização dos registros de representação gráfica e algébrica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t, em um intervalo qualquer, corresponde ao coeficiente angular da reta secante à representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo "$(t, s(t))$", extremos desse intervalo.Para o item (a), almejávamos que os estudantes verificassem que o coeficiente angular da reta de equação $y = 13x - 22$, como mostra o gráfico 1, corresponde a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$, conforme foi verificado no item (a) da atividade anterior, e concluíssem que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$ foi igual a 13.

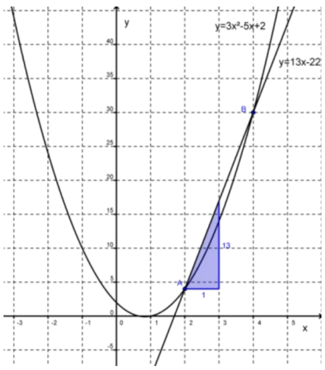

Figura 4. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B

Todas as duplas alcançaram o objetivo deste item e apresentaram soluções similares a que havíamos previsto. Os alunos Caroline e Daniel, por exemplo, afirmaram que o valor da velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B, enquanto os alunos William e Leonardo enfatizaram que o valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo, obtido por meio da "ferramenta inclinação", corresponde à taxa de variação de $s(t)$ em relação at.

Para o item (b), esperávamos que os estudantes percebessem que o coeficiente angular da reta de equação $y = 10x - 16$,como mostra o gráfico 2, corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 3s]$, como foi verificado no item (b) da atividade anterior, e concluíssem que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t nesse intervalo foi igual a 10,.

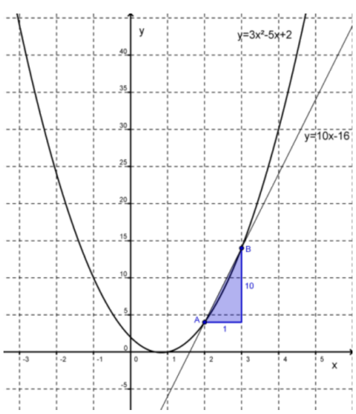

Figura 5. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B'

Novamente todas as duplas atingiram o objetivo deste item. Os alunos Caroline e Daniel afirmaram que a velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B', enquanto os alunos William e Leonardo basearam sua solução na ideia de taxa de variação, e novamente afirmaram que o valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação" é igual ao valor da taxa de variação de $s(t)$ em relação at. Já os alunos Guilherme e Artur, embora tenham apresentado a equação da reta definida pelos pontos A e B', não relataram, nem verbalizaram, que o valor do coeficiente angular dessa reta corresponde ao valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação", o que foi percebido somente quando o professor apresentou a devolutiva desta atividade.

Já para o item (c), esperávamos que os estudantes deduzissem que o coeficiente de angular da reta de equação $y = 7{,}3x - 10{,}6$, como mostra o gráfico 3, corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 2{,}1s]$, como foi verificado no item (c) da atividade anterior, e concluíssem que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t foi igual a 7,3.

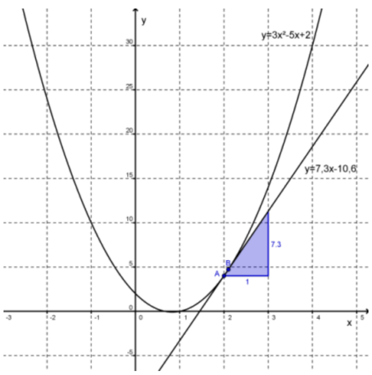

Figura 6. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B''

Novamente, todasas duplas apresentaram soluções compatíveis com a que esperávamos, entretanto, os alunos Guilherme e Artur, embora tenham afirmado que a velocidade média do veículo no intervalo $[2s, 2{,}1s]$ foi igual a $7{,}3\ m/s$, apresentaram dificuldades para relacionar este valorcom o coeficienteangular da retadeequação$y = 7{,}3x - 10{,}6$, que só foram superadas após a devolutiva desta atividade. Caroline e Daniel, novamente afirmaram que o valor da velocidade média do veículo pode ser obtido por meio do coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B'', e que esse valor corresponde ao valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação". Ao final desta atividade, o professor apresentou uma devolutiva e deu início a uma institucionalização local, em que formalizou, via registro de representação gráfica e algébrica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t em um intervalo qualquer do domínio de s, corresponde ao coeficiente angular da reta secante a representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo "$(t, s(t))$" extremos desse intervalo.

.

Atividade 5 – Na atividade anterior, você deve ter observado que os pontos B, B' e B'' estão se aproximando cada vez mais do ponto A. Na atividade 3, você pôde verificar que à medida que o intervalo Δt se aproxima de zero, isto é, quando os pontos que definem as retas secantes aproximam-se cada vez mais do ponto A, o intervalo de tempo aproxima-se cada vez mais do instante $t = 2s$, e a velocidade média do veículo tende à velocidade instantânea do mesmo no instante $t = 2s$, que é igual a $7m/s$. No geogebra, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, marque o ponto $A(2, s(2))$, em seguida faça o que se pede:

a) Selecione a ferramenta "reta tangente", aplique-a no ponto A da representação gráfica de s, de modo a obter uma reta tangente à curva no ponto A, em seguida, marque um ponto qualquer sobre a representação gráfica de s, nomeio de B, trace uma reta definida por A e B e aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, movimente o ponto B e complete a frase: À medida que o ponto B se aproxima do ponto A, o intervalo de tempo Δt aproxima-se de ______.

b) Aproxime o ponto B o máximo possível do ponto A, calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal, fornecidos pela ferramenta "inclinação", e compare o resultado com a solução que você apresentou no item g da atividade 3.

c) Assim pode-se concluir que: quando o intervalo de tempo tende a zero, ou seja, quando o ponto B aproxima-se o máximo possível do ponto A, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea, que é igual a _______.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber que à medida que o intervalo Δtdiminui, os pontos que definem a reta secante AB aproximam-se cada vez mais um do outro, de modo que a reta tenda a tangenciar a representação gráfica de $s(t)$ no ponto $A(2, s(2))$, como mostra o gráfico 4.

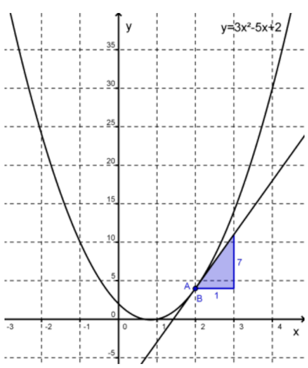

Figura 7. Reta tangente à representação gráfica de $s(t)$ no ponto A

Para o item (a), almejávamos que os estudantes percebessem que à medida que o intervalo Δt aproxima-se de zero, os pontos que definem a reta secante aproximam-se cada vez mais um do outro. Somente Guilherme e Artur atingiram a finalidade deste item, enquanto os demais afirmaram que o intervalo Δt se aproxima de sete quando o ponto B se aproxima do ponto A, o que levou o professor a intervir e solicitar que os estudantes retomassem as soluções apresentadas na atividade anterior e relacionem-nas com os itens que compõem esta atividade.

Esperávamos que para o item (b), os estudantes percebessem que a taxa de variação de $s(t)$ em relação àt corresponde ao coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de

$s(t)$ no ponto A, e concluíssem que a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto A é igual a 7. Com exceção de Guilherme e Artur, todas as duplas atingiram a finalidade deste item quase que instantaneamente. Acreditamos que Guilherme e Artur não atingiram a finalidade deste item de imediato, porterem apresentado dificuldades para atingiro objetivo do item (g) da terceira atividade, todavia, após a intervenção do professor, que retomou as discussões realizadas no item g da atividade 3, os estudantes chegaram a solução esperada.

Para o item (c), esperávamos que os estudantes generalizassem as inferências e conjecturas pontuadas a partir dos itens anteriores, e concluíssem que quando o intervalo Δt tende a zero, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$, que é igual a $7\ m/s$. Todas as duplas atingiram o objetivo deste item, e perceberam que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $7m/s$.

Após a devolutiva referente às atividades que compuseram essa situação de aprendizagem, o professor saiu do contexto em que estava inserido junto aos estudantes e formalizou, para uma função qualquer $f(x)$, que o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação ax em um ponto qualquer de seu domínio corresponde ao coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$, tangente à representação gráfica de $f(x)$ neste ponto.

Considerações Finais

Embora algumas noções matemáticas que julgávamos fazer parte do conhecimento matemático dos estudantes não foram mobilizadas, nossa situação de aprendizagem parece tê-los levadoa modificações comportamentais frente ao objeto matemático taxa de variação, o que caracterizou a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média, pois segundo Brousseau (1975),

> "um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos". (Brousseau, 1975, p. 6 apud Almouloud, 2007, p. 31)

Acreditamos que a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea foi facilitada por meio da mobilização simultânea dos registros de representação algébrica, gráfica e tabular, pois "a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação" (Duval, 2009, p. 81), e é a articulação de registros de representação que constitui uma condição de acesso à compreensão matemática. Desse modo, pensamos que o processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio deve ser abordado por meio de situações de aprendizagem que permitam a coordenação entre os vários registros de representação, de modo que os estudantes tenham independência e condições para construir significado para esta ideia.

Posto isso, concordamos com Silva (2012), ao inferir que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem construir significado para a noção de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação, desde que não se traga para esse nível de escolaridade a estrutura e as terminologias abordadas no Ensino Superior. Sendo assim, pensamos que seria viável abordar algumas ideias presentes no estudo do Cálculo Diferencial no âmbito do Ensino Médio, em particular a ideia de derivada em consonância com o ensino de funções, de modo que os estudantes compreendam-na como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P de seu domínio.

Referências e bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.

Artigue, M.; at all. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. México, 33-59.

Artigue, M. (2009).*Didactical Design in Mathematics Education*.Nordic Research in Mathematics Education

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais (2002). *Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMT.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. 1ª ed. Trad. de Levy, L. F.; Silveira, M. A. da. São Paulo: Ed. Livraria da Física.

Machado, N. J. (1988). *Matemática por assunto: noções de cálculo*. Ed. Scipione, v. 9, São Paulo.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo.

Silva, B. A. et all. (2002). *Atividades para o estudo de funções em ambiente computacional*. São Paulo: Iglu.

Silva, E. R. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Trotta, F.; Imenes, L. M. P.; Jakubovic, J. (1980). *Matemática Aplicada:3*. São Paulo: Moderna.