FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA QUE MUESTRAN FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL ORDENAR FRACCIONES[1]

Mathematical flexibility: exploring prospective primary school teachers' strategies and representations to order fractions

Cid-Cid, A.[a], Joglar-Prieto, N.[b], Escudero-Ávila, D.[b] y Flores-Medrano, E.[b],

[a]Universidad Rey Juan Carlos, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones representa un reto para estudiantes y profesores de Educación Primaria por las características propias del concepto y la variedad de significados asociados a la fracción. En este sentido, consideramos interesante explorar los procesos que siguen cinco futuras maestras, para comparar fracciones propias y reflexionar sobre la idea de equivalencia, analizando la Flexibilidad Procedimental y la Flexibilidad Representacional que puedan mostrar en tareas de comparación y ordenación de fracciones, a través de situaciones creadas para fomentar las actitudes positivas hacia las matemáticas en un contexto manipulativo y lúdico. La exploración de estos procesos de resolución y reflexiones sobre el tipo de pensamiento que tienen estas futuras maestras nos ha proporcionado información base para la generación de mejores tareas para la formación inicial.

Palabras clave: *flexibilidad procedimental, flexibilidad representacional, formación inicial, fracciones*

Abstract

The teaching and learning of fractions represents a challenge for students and teachers in Primary Education due to the characteristics of the concept and the variety of meanings associated with the idea of fraction. In this sense, it seems adequate and interesting to explore the processes followed by five future primary school teachers when they compare fractions and reflect on the idea of fraction equivalence. We will analyze how the Procedural Flexibility and the Representational Flexibility is developed while they work in tasks of comparing and ordering fractions, through situations created to encourage positive attitudes towards mathematics in a manipulative and recreational context. The exploration of these resolution processes and reflections on the type of thinking that these future teachers use have provided us with basic information for the generation of better tasks for initial mathematics teacher training.

Keywords: *procedural flexibility, representational flexibility, pre-service teacher training, fractions*

INTRODUCCIÓN

Recientes estudios apuntan a la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento matemático flexible (tanto procedimental como representacionalmente), en el aula de Educación Primaria y Secundaria en España (Star et al., 2022). Para que un maestro sea capaz de promover y valorar esta

1 Esta investigación forma parte de un proyecto de investigación financiado por la Unión Europea - NextGeneration, EU, en el marco de las becas María Zambrano 2022-2024 y por la Red Iberoamericana MTSK perteneciente a las redes de investigación AUIP

Cid-Cid, A., Joglar-Prieto, N., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. (2023). Flexibilidad matemática que muestran futuras maestras de educación primaria al ordenar fracciones. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 307–314). SEIEM.

flexibilidad en el aula, requiere también de un conocimiento profundo sobre este constructo y sobre el papel crucial que juega en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

En esta comunicación se presentan los resultados de la primera parte de una investigación cuyo objetivo principal es describir y comprender la flexibilidad procedimental y representacional que evidencian cinco futuras maestras de Educación Primaria (FMEP) cuando abordan una tarea de comparación de fracciones, a través de situaciones creadas para fomentar las actitudes positivas hacia las matemáticas en un contexto manipulativo y lúdico diseñadas por la Red de Enseñanza Creativa de las matemáticas (RECREA Matemáticas[i]).

En este sentido mostraremos una reflexión sobre los resultados de un estudio exploratorio que consistió en la implementación de la primera versión de una propuesta de tarea formativa, y describiremos los procesos de resolución que se han identificado en la actividad, así como el potencial que tiene esta para desarrollar la flexibilidad procedimental y representacional en FMEP.

REFERENTES TEÓRICOS

Entender y saber usar las fracciones es fundamental, tanto para adquirir conocimientos matemáticos más avanzados, como para interpretar y resolver muchas situaciones problemáticas de la vida cotidiana (Fazio y Sigler, 2011). Sin embargo, su aprendizaje y enseñanza presenta importantes retos, por lo que ha sido uno de los contenidos matemáticos de Educación Primaria más investigados (Lortie-Forgues et al., 2015). Recientemente, varios autores han puesto el foco en la identificación y caracterización de los diferentes aspectos del conocimiento especializado que necesitan los maestros para enseñar fracciones (González-Forte et al., 2018).

Las fracciones tienen distintos significados dependiendo del contexto y los fenómenos o aplicaciones a las cuales están ligadas: como una relación parte-todo (en contextos continuos y discretos), como medida, como cociente, como razón y como operador (Moriel-Junior y Reyes, 2022) y todas estas se deben abordar en el proceso de enseñanza y aprendizaje para conseguir una comprensión amplia y profunda de las ideas relacionadas con el concepto de fracción (Lamon, 2020). Desde el punto de vista de la enseñanza, no es posible aislar cada una de las interpretaciones y hay estudios que sugieren que la interpretación parte-todo constituye la base sobre la que se desarrollan las demás (Llinares y Sánchez, 1997).

En la literatura podemos encontrar evidencias de dificultades que los estudiantes pueden tener cuando estudian fracciones, por ejemplo: a veces no son capaces de identificar las diferentes interpretaciones cuando se trabaja en distintos contextos y en otras de entender que existen múltiples representaciones de la misma cantidad, o intentan extender el razonamiento y propiedades de los números enteros a los racionales (Siegler et al., 2013), así como dificultades asociadas a la noción y naturaleza de la unidad. También se reportan dificultades para entender que en la recta real un único número entero se coloca en una posición, pero si se consideran fracciones, múltiples fracciones pueden tener el mismo valor y situarse en el mismo punto de la recta (Ni y Zhou, 2005).

En el contexto de formación inicial del profesorado de Matemáticas, distintas investigaciones señalan que los futuros maestros suelen presentar dificultades muy similares a las que presentan los estudiantes respecto del contenido matemático escolar de las fracciones (Rojas et al., 2013), lo cual dificulta el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos asociados al mismo.

Según autores como Lesh (1997) y Schneider y colegas (2011), la comprensión de un concepto matemático se alcanza en profundidad cuando se es capaz de resolver un problema poniendo en juego conocimientos matemáticos utilizando varias estrategias, diferentes sistemas de representación y de convertir con fluidez una estrategia en otra, comparando y valorando en paralelo los elementos y las ventajas de cada una. Sin embargo, en la matemática escolar en España parece que, en general, esta riqueza de estrategias y representaciones no juega el papel central que se merece. Con demasiada frecuencia los estudiantes resuelven problemas automáticamente usando una única estrategia en el registro simbólico guiados por su profesor quien justifica esta decisión en la necesidad de no confundir a sus estudiantes y de minimizar la aparición de errores (Star et al., 2022). En este sentido, consideramos interesante implementar tareas que permitan a los FMEP explorar distintos procesos de resolución de un problema matemático usando diferentes representaciones, es decir, tareas que promuevan el desarrollo de la flexibilidad matemática en la formación inicial, en especial de temas que tienen dificultad como son las fracciones.

En esta comunicación consideramos la flexibilidad matemática desde dos perspectivas. Por un lado, hablaremos de *flexibilidad procedimental* (FP) entendida como la capacidad de una persona de producir diferentes estrategias para resolver un problema dentro de un sistema de representación y ser capaz de distinguir la más eficaz ante un problema concreto (Rittle-Johnson y Star, 2007). Por otro lado, hablaremos de *flexibilidad representacional* (FR) entendida como la capacidad de una persona de usar varios sistemas de representación en paralelo para representar, no solamente el resultado del problema que aborda, sino también el procedimiento o la estrategia seguida, siendo capaz de comparar en ambos sentidos dichas representaciones (Lesh, 1997).

En lo que se refiere a las representaciones de fracciones, adaptando levemente el Modelo de Lesh (1997) consideramos cinco sistemas de representación: el sistema simbólico-numérico (SN), el sistema icónico-gráfico (IG), el sistema manipulativo (M), el sistema de la situación real (SR) y el sistema de la lengua natural oral o escrita (LN). Especialmente importantes en la etapa de primaria (cuando se está haciendo un primer acercamiento a la idea de fracción) son el registro M (que facilita a los alumnos una interacción), el IG y el registro LN. Es claro que no es adecuado en esta etapa priorizar exclusivamente el trabajo a nivel simbólico, aunque no hay que perder de vista la secuenciación adecuada del uso y conversiones de sistemas de representación para facilitar el proceso de abstracción yendo de representaciones concretas a representaciones más abstractas, perdiendo la vinculación con el contexto del problema en dirección hacia la generalización.

A partir de estos referentes hemos identificado y caracterizado las diferentes estrategias y los distintos sistemas de representación que usan en paralelo las cinco futuras maestras cuando ordenan fracciones, así como el tipo de flexibilidad que evidencian en sus procedimientos de resolución de la tarea. En este sentido, se han explorado si estrategias para comparar fracciones como: la posición relativa respecto a la unidad o a ½ en el caso de fracciones propias, la igualación de denominadores (para comparar numeradores como naturales), la conversión a decimales, o la ubicación en una recta numerada surgen durante la resolución de la tarea y si lo hacen de manera *espontánea* por la consigna que tiene la tarea o *inducida* por la interacción de las FMEP con la guía de la actividad.

METODOLOGÍA

Debido a que nuestro objetivo fue comprender las estrategias de las FMEP para generar una tarea formativa que sirva para el desarrollo de conocimientos y habilidades específicas sobre fracciones y su didáctica, el proyecto se ha concebido bajo el marco de investigación de diseño (Molina, 2021). En este sentido, los resultados que mostramos corresponden a un primer microciclo que se ha desarrollado en las tres fases que deben tener este tipo de estudios: preparación y diseño, implementación/intervención y análisis retrospectivo.

Las tareas propuestas a las FMEP corresponden a una adaptación de la situación “La Densidad del Dominó” (Alvarado et al., 2018), la cual es una actividad creada con el objetivo principal de favorecer la creatividad y mejorar la percepción de los estudiantes de primaria hacia las matemáticas, para mejorar la relación socioemocional que se tiene con esta asignatura.

En la fase inicial del proyecto de investigación, un grupo de 6 investigadoras e investigadores hemos realizado una adaptación de la situación para usarla como una tarea que pudiera promover en las FMEP la exploración de distintos procedimientos de ordenación de fracciones y la reflexión sobre la variedad de estrategias y representaciones que pueden estar implicados en una tarea como esta. Los cambios fueron mínimos en tanto que se utilizaron las consignas de las tareas originales (ver Tabla 1). Además, se incorporó a la actividad el uso de una caja con materiales didácticos que pueden utilizarse para representar fracciones y que se consideraba que podrían servir para inducir nuevas estrategias y así promover la flexibilidad a lo largo de la actividad (calculadora, regletas *Cuisenaire*, cubos *Multilink*, bandas plastificadas, rotuladores y reglas graduadas).

Tabla 1. Actividades, tareas y consignas utilizadas en la situación con las FMEP.

	Consigna de la tarea
Actividad (A) 1: El orden del dominó	Tarea (T)1.1. Selecciona 10 fichas de dominó (base 6) y ordénalas de menor a mayor
	T1.2. Ordena de forma diferente las mismas fichas y compara todas las estrategias que han aparecido
A 2: Las fichas de dominó como representación de fracciones	T2.1. Ordena de menor a mayor las mismas fichas considerándolas como fracciones. Reflexión
	T2.2. Ordena las 10 fichas utilizando otra estrategia diferente. Desde este momento cuentas con una caja de materiales didácticos
A 3: Las fichas de dominó como representación de fracciones propias	T3.1. Ordena todas las fichas de dominó de base 6 considerándolas fracciones propias. Reflexión
	T3.2. Realiza de nuevo la tarea anterior usando otras estrategias diferentes
A 4: Puesta en común e identificación de estrategias	T4.1. Ordena todas las fichas de dominó de base 7, 8 y 9 considerándolas fracciones propias. ¿Pueden usarse las mismas estrategias que en la Actividad 3? ¿Qué dificultades aparecen?

Esta adaptación se aplicó con un grupo de 5 estudiantes matriculadas en el tercer año del Grado en Maestro en Educación Primaria. Las participantes habían cursado la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I el año anterior (aritmética y su didáctica), y estaban completando la asignatura Matemáticas y su Didáctica II (las fracciones y su didáctica), la cual era impartida por uno de los investigadores colaboradores de este proyecto. Las actividades fueron guiadas por una formadora que es coautora de este trabajo, la cual restringió su participación a motivar a que las FMEP verbalizaran sus procesos y profundizaran en sus respuestas. Otras dos formadoras actuaron como observadoras tomando notas de campo y apoyando con la grabación y la gestión de los materiales.

En esta comunicación nos centramos en mostrar el análisis descriptivo e interpretativo de los procesos de resolución que han seguido las FMEP. Esto nos permitirá mostrar a los lectores los primeros resultados de esta investigación, los cuales nos han servido para comprender cómo se va activando la flexibilidad durante la intervención y con ello formular las primeras hipótesis de las trayectorias que podrían seguir los FMEP al trabajar con cada una de las tareas y, en un futuro, realizar una segunda adaptación de la tarea.

La intervención se desarrolló en dos sesiones de 90 minutos en dos días de una misma semana y fueron videograbadas. Las actividades y tareas están secuenciadas para facilitar la aparición progresiva de diferentes estrategias y representaciones y para promover la comparación entre las mismas. Así, nos interesa identificar si la FP surge de manera *espontánea* o *inducida* (Star et al., 2022), y también podemos analizar si ha habido *comparación* entre estrategias diferentes, además de identificar las representaciones puestas en juego (tanto por ellas mismas, como por otros compañeros) para describir así la FR. Las respuestas de cada grupo a cada actividad fueron recogidas también por escrito.

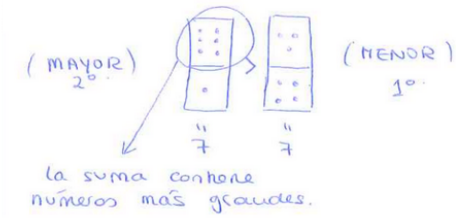
RESULTADOS

En la A1 se han podido identificar 3 posibles estrategias para ordenar las 10 fichas. Inicialmente miran las fichas como si fueran fracciones, sin embargo, les causa conflicto la ficha (0,4), al considerar el 0 como denominador.

Por ello, proponen una segunda estrategia que es considerar la cantidad total de puntos que tiene cada ficha. Así, espontáneamente surgen dos estrategias para ordenar las fichas, y tras una discusión entre las estudiantes, las comparan y deciden quedarse con la que no les genera un conflicto matemático. La tercera estrategia surge cuando se les pide en la T1.2 pensar en otra forma de ordenar las fichas. Identifican cada ficha con el valor numérico de la resta de los puntos de cada parte de la ficha. Surge de nuevo un conflicto en el grupo, en esta ocasión, por la posible aparición de números negativos dependiendo de cómo coloquen las fichas. Basándose en el currículo de Educación Primaria, deciden que restarán siempre el valor menor del mayor de cada ficha. Aunque se insiste en que busquen otros criterios, no se les ocurren más.

Ante las estrategias de sumar o restar los puntos de la ficha, llama la atención que, cuando encuentran fichas con el mismo valor numérico asociado, no consideran que sean equivalentes dejándolas en la misma posición en su acomodo (por ejemplo, superponiéndolas), sino que sienten la necesidad de considerar un nuevo criterio para ordenarlas: identificar como mayor a la ficha que tuviera una parte con mayor cantidad de puntos (Figura 1). Como estaba previsto, usan en paralelo los registros LN y M haciendo conversiones entre ellos.

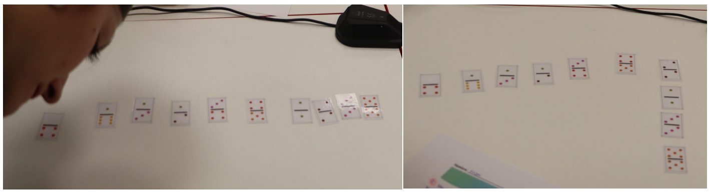
Figura 1. Criterio de orden para anular la equivalencia



Cuando, en la A2, se les pide ordenar las fichas interpretando que son fracciones, sienten la necesidad inmediata de considerarlas como fracciones propias y justifican su decisión en la dificultad que habían encontrado en la tarea anterior (se da la circunstancia de que no habían elegido la ficha del doble cero). En este momento, colocan las fichas siguiendo las siguientes estrategias: colocan primero las fichas *dobles* que interpretan como la unidad ((1,1), (2,2), (3,3), (5,5)) y, de nuevo, sienten la necesidad de utilizar un orden secundario para colocar las fichas que han surgido como equivalentes atendiendo a la cantidad de puntos. Así las colocan de menor a mayor (Figura 2, izquierda), de manera que cada una de esas cuatro fichas ocupa una posición diferente en su acomodo. Una vez han colocado las fichas que valen 1, toman la ficha (1,2) y la colocan a la izquierda de la ficha (1,1) dejando hueco (posición relativa respecto a 1). A continuación, acomodan la ficha (3,4) entre las dos anteriores (posición relativa respecto a ½ y 1), pero no sitúan (3,4) en el punto medio entre (1,2) y (1,1). Después colocan (1,3) diciendo que la fracción que representa es menor que la que representa (1,2) (fracciones con el mismo numerador, atendiendo al tamaño de las partes). Hasta este momento habían tratado las fichas como un número fraccionario en cuanto al registro LN, lo cual es evidente cuando les asignan un nombre (un medio, un tercio y tres cuartos). Sin embargo, cuando cogen la ficha (1,6) sienten la necesidad de pasar a la expresión decimal dividiendo y, para acomodarla, usan la expresión decimal. Hacen lo mismo con la fracción que representa (1,3). En ese momento sitúan la ficha (0,4) a la izquierda del acomodo. Pasan también a decimal la fracción representada en la ficha (4,5). Inicialmente colocan mal esa pieza, pues la ponen a la izquierda de la ficha (3,4), pero enseguida ven su error a través de las expresiones decimales (dicen oralmente que ¾ es 0,75) y lo corrigen. Aunque surge la estrategia de comparación de fracciones unitarias (caso particular de fracciones con el mismo numerador), no la emplean en todos los casos, está más arraigada la estrategia de dividir numerador entre denominador para usar la expresión decimal (en este caso mentalmente). Como estaba previsto, en esta primera parte de la A2 usan en paralelo los registros LN y M haciendo conversiones entre ellos.

Cuando describen a la guía cómo han realizado esta tarea, consideran solamente la estrategia de usar las expresiones decimales. De forma implícita, están comparando las estrategias usadas y eligen esta como la más adecuada. Además, solo cuando la guía pregunta sobre la colocación de las fichas equivalentes, reconocen que son iguales, pero insisten en que necesitan un orden, aunque al final deciden que están agregando criterios innecesarios y deciden colocar las fichas equivalentes en acomodo vertical (Figura 2, derecha). Muestran aquí una confusión entre equivalencia y orden.

Figura 2. Colocación de las fichas: fracciones equivalentes.



Cuando abordan la T2.2, para volver a ordenar sus fichas con otras estrategias que no sean la de división, tienen a su disposición una caja con materiales. Sin embargo, reconocen tener dificultades para buscar otras estrategias. Intentan recordar contenidos vistos durante su formación previa sin éxito y justifican su falta de FP y FR en que limitan su forma de proceder a lo que haría el alumnado de primaria. Tienen problemas para usar las regletas y los cubos *Multilink* al pensar siempre en la unidad representada con estos materiales como dividida en 10 partes iguales. Entonces la guía les ofrece el muro de fracciones. Se fijan en que en las piezas de este material aparecen varias representaciones en paralelo (IG con rectángulos o secciones triangulares de polígonos regulares sombreadas, SN con la expresión decimal, porcentajes y fracciones), además de la representación física (M) de las barras con el propio material y la verbal oral (LN) que movilizan constantemente. Reconocer la expresión decimal en las barras del muro les da seguridad y confianza. Las anima el poder manejar físicamente las piezas para comparar fracciones como (4,5) y (3,4) colocando las barras al lado verticalmente. Aunque inicialmente reconocen que las fichas (1,1), (2,2), (3,3) y (5,5) representan "la barra grande del muro", la unidad, siguen sintiendo la necesidad de representar cada ficha con el material para enfatizar que son el mismo número racional. Así, buscan otro muro ante la limitación de no poder hacer esto solamente con uno. Es fuerte para ellas la percepción de que, como fracciones, las fichas son diferentes, aunque sean equivalentes, aunque representen el mismo número racional, y quieren que eso se vea reflejado en todos los sistemas que usen. Colocan las barras siguiendo la misma disposición que en la Figura 2, derecha, representando las fichas con el material. Es decir, no usan el material para comparar de dos en dos las fichas (idea de relación binaria), lo usan para representar el acomodo completo. Es importante destacar que esto no era parte de la consigna. Con este material son capaces de movilizar interpretación de las fracciones como parte-todo.

Para finalizar la primera sesión, en la A3 ordenan todas las fichas de dominó de base 6. De nuevo surge la limitación del material: no tienen suficientes piezas para representar todas las fracciones de las fichas. Así, descartan la estrategia anterior de representar todas las fichas. Tras una discusión, empiezan a comparar dos a dos (relación binaria). La limitación con el material hace que no representen todos los elementos de la clase de equivalencia de una fracción, dejan un solo representante emergiendo la idea de clase de equivalencia.

Al comenzar la segunda sesión se les presenta una estrategia: representar cada una de las fracciones de las fichas de dominó en una regla graduada con 60 marcas haciendo uso del significado de la fracción como operador. Son capaces de hacerlo con facilidad y rapidez, valorando esta estrategia positivamente. Aunque identifican la equivalencia de dos fracciones al ocupar la misma posición en la regla, siguen sintiendo la necesidad de etiquetar ambas usando rotuladores de colores. Lo hacen mucho más rápido que con sus estrategias espontáneas y sin ningún error, ellas dicen que “no necesitas pensar, lo tienes dibujado” y no vuelven a la expresión decimal.

Para empezar con la A4 la formadora les pregunta: “¿qué pasa si metemos la ficha (1,7)?”. Intentan usar la regla graduada como antes, pero tienen dificultades al no encontrar un número entero de rayas, de las 60 en las que está dividida, que represente (1,7). Vuelven a la división con la calculadora al tener esta dificultad y de esta forma colocan todas las fichas que completan el dominó de base 9, abriendo huecos en su acomodo de la A3. Hacen uso de la calculadora (que muestra representación SN) para colocar y comprobar que la disposición de las fichas es correcta (no vuelven ni al muro de fracciones ni a la regla en este momento).

Tabla 2. Resumen de resultados obtenidos por tareas.

Tarea	Estrategias	FP observada	FR observada
T1.1	Mirar las fichas como representación de fracciones. Considerar la cantidad total de puntos en la ficha.	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y M, sin conversiones*
T1.2	Identificar la ficha con el valor numérico de la resta del lado con más puntos menos el lado con menos puntos.	*Inducida* *Comparación*	
T2.1	Ordenar como fracciones propias para delimitar orden entre 0 y 1. Colocar fichas dobles (unidad). Colocar el ½ como referencia. Ordenar con la referencia de mayor o menor que ½. Convertir a decimal	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y M* *Conversiones*
T2.2	Uso de materiales físico para representar y ordenar	*Inducida*	*Uso de registros IG, SN, M y LN* *Conversiones*
T3.1	Comparación dos a dos (relación binaria)	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros M, sin conversión*
T3.2	Representar cada fracción como un punto sobre una recta graduada con 60 rayas	*Inducida* *Comparación*	*Uso de registros LN, SN y M* *Conversiones*
T4.1	Intentan representar 1/7 en la regla de la A3. División para convertir a decimales usando calculadora	*Inducida* *Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y SN* *Conversiones*

Para finalizar, la formadora les pregunta si podrían seguir colocando más fichas (de base 12, por ejemplo), y ellas responden que sí, que *infinitamente*. Aunque no hacen explícita la propiedad de densidad de los racionales en la recta real, intuitivamente, con el material y la actividad sí tienen muestran tener una percepción de esta idea.

CONCLUSIONES

En esta actividad se encuentran evidencias de que, cuando la nueva estrategia o el nuevo registro facilita y agiliza la resolución de la tarea, las FMEP valoran positivamente la flexibilidad, tanto representacional como procedimental. El desarrollo de la flexibilidad a través de la secuenciación de las tareas les permitió reconstruir la idea de equivalencia de fracciones. Sin embargo, se han evidenciado dificultades en el uso y las conversiones de registros y limitaciones del uso de algunos recursos, que no se han superado a pesar de que se facilitaron otras estrategias y otros recursos para fortalecer el proceso de inducción en la segunda sesión.

Los resultados mostrados este estudio, junto con los análisis en curso de otros grupos participantes en la investigación, nos permitirán continuar con un segundo ciclo de adaptación de la actividad en la que comenzaremos a poner el foco en los conocimientos y competencias profesionales que puedan desarrollarse en los FMEP alrededor del tema de fracciones.

REFERENCIAS

Alvarado, A., Olvera, C., y Mata, A. (2018). *La estimación y el cálculo mental en educación secundaria.* Secretaría de Educación del Estado de Durango-UJED.

Fazio, L., y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. International Academy of Education.

González-Forte, J.M., Fernández, C., y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). SEIEM.

Lamon, S.J. (2020) *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad «real» de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias*, *15*(3), 377-391. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4166

Llinares, S., y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Síntesis.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., y Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221. http://dx.doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 – 97). SEIEM.

Moriel-Junior, J.G., y Reyes, A. (2022). Conocimiento especializado de las fracciones. En J. Carrillo, M.A. Montes, y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino* (pp. 135-150). Dykinson, S. L.

Rittle-Jhonson, B., y Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574. https:// https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 47-64.

Ni, Y., y Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B. y Star, J.R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1525-1538.

Siegler, R.S., Fazio, L.K., Bailey, D.H., y Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13-19.

Star, J.R., Tuomela, D., Joglar-Prieto, N., Hästö, P., Palkki, R., Abánades, M.Á., Pejlare, J., Jiang, R. H., Li, L., y Liuu, R.-de (2022). Exploring students' procedural flexibility in three countries. *IJ STEM Ed 9*, 4. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00322-y

---

i https://www.recrea-matematicas.com/