COMPRENSIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO: DE PROCESO A OBJETO

Understanding the graph of the derivative function in high school students: from process to object

Lillo, E.[a], Moreno, M.[a], Orts, A.[b] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]IES Tavernes Blanques (Valencia)

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el desarrollo de la comprensión de la gráfica de la función derivada en estudiantes de bachillerato que usan tecnología. Se diseñó un experimento de enseñanza fundamentado en la teoría APOS, la génesis instrumental y la teoría de las representaciones semióticas. El análisis de los registros del experimento de enseñanza ha permitido identificar dos características de la transición de la comprensión de la gráfica de la función derivada como proceso a objeto: (i) el conocimiento del proceso límite de la tasa de variación media y (ii) la reflexión sobre la relación actividad-efecto al usar GeoGebra. Estos resultados proporcionan información sobre el papel de la tecnología en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes cuando un modelo de construcción del conocimiento (descomposición genética) se usa para diseñar la secuencia de actividades.

Palabras clave: *Concepto de derivada, gráfica de la función derivada, experimento de enseñanza APOS, GeoGebra.*

Abstract

The goal of this research is to characterize the understanding of the graph of the derivative function in high school students (16-17 years). A teaching experiment was designed from three perspectives: the APOS theory, the instrumental genesis that supports reflection on the activity-effect relationship, and the theory of semiotic representations. The analysis of the records of the teaching experiment has allowed to identify two features in the transition from knowing the graph of the derived function as a process to know it as an object: (i) knowing the limit process of the average variation rate, and (ii) reflecting on the activity-effect relationship using, GeoGebra (instrumental genesis). These results provide information on the role of technology in the development of students' understanding when sequences of activities are designed following a knowledge construction model (genetic decomposition).

Keywords: *Derivative concept, derivative function graph, APOS teaching experiment, GeoGebra.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de derivada ha sido estudiada a nivel internacional y nacional (Larsen et al., 2017; Sánchez-Matamoros y García, 2015). La importancia de este concepto en el currículo de bachillerato y primeros cursos universitarios se evidencia por su presencia en los libros de texto (Vargas et al., 2020) y su aplicación en diversos campos científicos y tecnológicos. Sin embargo, en su enseñanza, se tiende a enfatizar las aproximaciones algorítmicas concediendo menos atención a la noción de razón de cambio introducida mediante la tasa de variación media (Contreras, 2000). En los últimos años, la emergencia de herramientas digitales como GeoGebra permiten cambiar esta tendencia favoreciendo la relación entre los modos de representación gráfico, numérico y analítico

Lillo, E., Moreno, M., Orts, A. y Llinares, S. (2023). Comprensión de la gráfica de la función derivada: de proceso a objeto. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 323–330). SEIEM.

para apoyar la construcción del significado geométrico de la tasa de variación media (Orts et al., 2018). En este estudio se analiza la introducción del concepto de derivada desde la idea de variación enfatizando las conexiones entre representaciones con el uso del software GeoGebra. La hipótesis que subyace en este planteamiento es que la comprensión de la gráfica de la derivada, entendida como la capacidad de interpretar y entender el significado y las características de su representación gráfica, se puede favorecer aprovechando la noción de variación, el paso al límite y la tecnología para construir oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, en particular mediante la herramienta específica rastro que incorpora GeoGebra y la conexión entre registros de representación (Asiala et al., 1997). El problema de investigación planteado explora el papel de la tecnología para favorecer la comprensión de la gráfica de la función derivada, a partir de la tasa de variación, mediante un entorno de enseñanza diseñado ad hoc haciendo énfasis en la relación entre la tasa de variación y la pendiente empleando recursos visuales interactivos.

MARCO CONCEPTUAL

Esta investigación se apoya en tres marcos teóricos: la teoría APOS (Arnon et al., 2014), la teoría de la representación semiótica (Duval, 2017) y la génesis instrumental para caracterizar el resultado de la reflexión sobre la relación actividad-efecto (Rabardel, 1995).

La teoría APOS (Arnon et al., 2014), acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, se basa en el concepto de abstracción reflexiva para describir y explicar cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos (en nuestro caso, la gráfica de la función derivada). Esta teoría contempla varios mecanismos mentales para describir cómo los estudiantes construyen diferentes formas de conocer los conceptos matemáticos. Así, una acción es la manipulación de objetos matemáticos, mientras que la interiorización de esta acción como proceso se refiere al proceso por el cual un individuo toma conciencia de que es posible concebir esta secuencia de acciones sin realizarlas. Cuando el estudiante se da cuenta de que algunas propiedades puede actuar sobre el proceso, es cuando asumimos que el proceso se encapsula en un objeto mental. De manera inversa, la desencapsulación es el mecanismo mental de reconocer las propiedades y relaciones que pueden actuar sobre el proceso. En el caso de la comprensión de la gráfica de la función derivada, una acción es manipular la recta tangente y comprender su relación con la función, un proceso es imaginar la gráfica de la función derivada sin necesidad de utilizar la recta tangente. Encapsular la gráfica de la función derivada como objeto implica analizar características locales y globales de la gráfica de la función derivada en relación a la función original, mientras que desencapsular es utilizar estas características para representar la derivada a partir de la función. El proceso de investigación basado en la teoría APOS implica realizar un análisis del concepto que permite proponer un modelo hipotético de construcción de las formas de conocer denominado descomposición genética (Orts et al., 2016) con el cual diseñar e implementar un experimento de enseñanza para recabar información que permita refinar la descomposición genética inicial.

La segunda perspectiva teórica usada es la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 2017). Según Duval (2017), la actividad matemática se lleva a cabo en un contexto de representación utilizando notaciones simbólicas, gráficas o verbales. Se identifican dos tipos de representaciones: las imágenes mentales que un individuo tiene sobre un objeto y las representaciones semióticas que utilizan signos que pertenecen a un sistema de representación para comunicar los significados. En el caso del concepto de derivada, pueden ser el registro gráfico/geométrico y simbólico/analítico.

Finalmente, la génesis instrumental (Rabardel, 1995) describe y explica cómo las tecnologías pueden integrarse en el proceso de enseñanza de las matemáticas para apoyar el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos. La génesis instrumental estudia cómo un artefacto se convierte en un instrumento cuando el resolutor resuelve problemas (Artigue, 2002). La génesis instrumental permite describir cómo la reflexión sobre la relación actividad-efecto, cuando se usan instrumentos tecnológicos como GeoGebra, ayuda a los estudiantes a construir un concepto como un objeto cognitivo a partir de la resolución de las tareas instruccionales (Simon y Tzur, 2004).

La pregunta de investigación es: ¿Cómo un recurso tecnológico (GeoGebra) favorece la encapsulación como objeto de la gráfica de la función derivada en estudiantes de primero de Bachillerato al potenciar la reflexión sobre la relación actividad-efecto?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Los participantes de este estudio son un grupo de 29 estudiantes de primer curso de Bachillerato LOE de la modalidad de Ciencias y Tecnología que participaron en el tercer trimestre de 2022 en un experimento de enseñanza, sobre la construcción del concepto de gráfica de la función derivada, diseñado ad hoc. Los estudiantes habían completado el tema sobre el concepto de límite de una función y era su primer contacto con el concepto de derivada. El curso anterior, se realizó una prueba piloto con otro alumnado. Para el experimento se formaron 11 grupos de 2 o 3 miembros atendiendo al criterio de rendimiento académico similar y sintonía para facilitar la comunicación. Previo al experimento se instruyó a los estudiantes en el uso de dos programas de software libre y de código abierto: Obs Studio para la grabación de video y el software de geometría dinámica GeoGebra que permite la representación algebraica, gráfica y tabular. Se creó una página web donde los estudiantes podían trabajar con los applets y subir ellos mismos sus grabaciones de vídeo al finalizar la sesión. Además, se les proporcionaron, en papel, los enunciados de las tareas para responder a las actividades.

El experimento constaba de 6 tareas y se realizó en 6 sesiones de 55 minutos sin que hubiese ninguna puesta en común durante las sesiones. En cada sesión los estudiantes debían resolver una tarea que contenía varias actividades (tabla 1) trabajando cada grupo de manera independiente y con explicaciones en gran grupo para aclarar conceptos puntuales. Cada tarea, salvo la última, se acompañaba de un applet de GeoGebra. Las actividades se construyeron atendiendo a una descomposición genética del concepto de función derivada generada como hipótesis de la construcción de la comprensión de la gráfica de la función derivada, que se apoyaba en la invariabilidad de la pendiente en una recta y la noción de tasa de variación.

Tabla 1. Estructura del experimento de enseñanza

S	Objetivos desde la Descomposición Genética	Foco de la tarea
1	Observar la invariabilidad de la pendiente en una recta	i) La pendiente de una recta como razón entre los desplazamientos verticales y horizontales. ii) Uso del deslizador para observar gráfica, analítica y numéricamente que la pendiente no depende ni del número de triángulos considerados ni del intervalo considerado. iii) La invariabilidad de la pendiente de una recta no puede aplicarse en una curva.
2	Establecer la idea de tasa de variación media	i) La TVM de forma geométrica y numérica en un intervalo. ii) La TVM de forma geométrica y numérica en una partición del intervalo para obtener información de la gráfica de la función utilizando el “mecanismo de triángulos” junto a los valores de las distintas tasas de variación media.
3	De la tasa de variación a la función derivada: TVI como límite de la razón de cambio	i) Uso de la TVM, en su registro numérico y geométrico, para observar cómo las diferentes TVM convergen hacia un valor al hacer cada vez menor la longitud del intervalo dejando el extremo inferior fijo. ii) Introducir el concepto de tasa de variación instantánea como el valor al que convergen las diferentes TVM. iii) Formar la idea de función derivada al poder asignar a cada punto del dominio de la función un y solo un valor como TVI.

		iv) Obtención analítica de la definición de TVI como límite de la razón de cambio.
4	De la tasa de variación a la función derivada: Igualdad del límite de la razón de cambio y el cociente incremental	i) Identificar la TVM con la pendiente de la recta secante. ii) Uso del deslizador de GeoGebra para visualizar dinámicamente la convergencia de las rectas secantes a la recta tangente. iii) Obtención de la pendiente de la recta tangente como el valor al que convergen los valores de las pendientes de las rectas secantes y su identificación con la TVI y viceversa. iv) Establecer la igualdad entre la TVI y la derivada en un punto utilizando la noción de límite de la razón de cambio y el cociente incremental.
5	La función derivada como proceso a partir de la recta tangente	i) Relacionar gráfica y numéricamente el valor de una función en un punto y el valor de la derivada en ese punto. ii) Representar la gráfica de una función derivada al desplazar la recta tangente por la gráfica de la función. iii) Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su derivada, f'. iv) Realizar un esbozo de la gráfica de f' a partir de la gráfica de la función.
6	Gráfica de la función derivada como objeto	i) Relacionar la gráfica de una función derivada con la gráfica de su primitiva. ii) Realizar un esbozo de la gráfica de la función a partir de la gráfica de su primitiva.

Datos de la investigación

Los datos de esta investigación proceden de las grabaciones de las interacciones de los estudiantes con el ordenador (audio y registros escritos; de las producciones de los estudiantes en papel y de las notas del profesor). Solo se consideraron tres grupos de estudiantes de los 11 que participaron en el experimento de enseñanza porque generaron datos en todas las sesiones y sus aportes permitía realizar el análisis de todas las grabaciones, producciones escritas y anotaciones del profesor.

Análisis

El análisis de los datos se realizó conjuntamente por cuatro investigadores para discutir diferencias en las interpretaciones y consensuar los resultados. El análisis se llevó a cabo en dos fases. En la primera revisamos las respuestas de cada grupo a cada tarea para identificar los momentos de la resolución y el papel que desempeñaban los modos de representación (interacciones con los applets). Una vez identificados estos momentos, los relacionamos con la descomposición genética conjeturada. Con el fin de dar cuenta de las posibles construcciones mentales que los estudiantes estaban haciendo, se realizó un análisis. En la segunda fase, para cada grupo de estudiantes se analizó la resolución de la secuencia de tareas y el papel de la tecnología en su resolución, identificando evidencias de la reflexión de los estudiantes sobre la relación actividad-efecto al coordinar registros gráficos/geométricos y numéricos/algebraicos cuando manipulaban los applets (génesis instrumental). Este análisis permitió generar perfiles sobre cómo se construyó el significado de la gráfica de la función derivada.

RESULTADOS

En esta comunicación describimos dos características que parecen determinar la encapsulación del significado de la gráfica de la función derivada como proceso en objeto a partir de la reflexión sobre la relación actividad-efecto realizada por los estudiantes: (i) La dificultad de considerar el proceso de paso al límite (como un hito que debe superarse) y (ii) la necesaria coordinación de los registros gráficos/geométricos y numéricos/algebraicos cuando se usan instrumentos tecnológicos (génesis instrumental) (como un hito que determina la encapsulación de proceso a objeto).

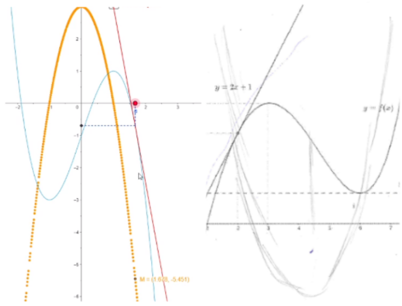
Dificultad para considerar el proceso de paso al límite

Uno de los aspectos característicos viene dado por la dificultad en considerar el paso al límite. Por ejemplo, el grupo GP12 identificó el punto al que convergen las TVM como la TVI. Sin embargo, la falta de comprensión del concepto de límite les impidió asignar un valor y dotarlo de significado. Esta dificultad se evidenció: (i) en su incapacidad para expresar en el registro simbólico o analítico el paso al límite de la sucesión de TVM, (ii) en hallar el valor límite del cociente incremental cuando h tiende a 0, y (iii) cuando en el registro gráfico no se identifica la recta a la que converge la sucesión de rectas secantes. Aunque la tecnología les permitió reconocer la gráfica de la función derivada de una función como una acción y representar la gráfica de una función derivada distinta a la del applet, a partir del establecimiento de similitudes y diferencias, estos estudiantes no consiguieron dotar de significado la gráfica representada porque no pudieron relacionar la gráfica de una función con la de su derivada si no podían establecer relaciones con la representada en el applet. Por ejemplo, cuando se pedía relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su derivada, diferentes a las del applet (actividad 5.3), las alumnas respondían:

E: Es que claro, yo ésta la he hecho... [Refiriéndose a la gráfica de la tarea anterior, figura 1]

O: Teniendo en cuenta esta, que es girada [Refiriéndose a la gráfica del applet], por eso hemos sabido que es justo al revés, pero, ¡es que las otras!?? [las gráficas de la actividad]

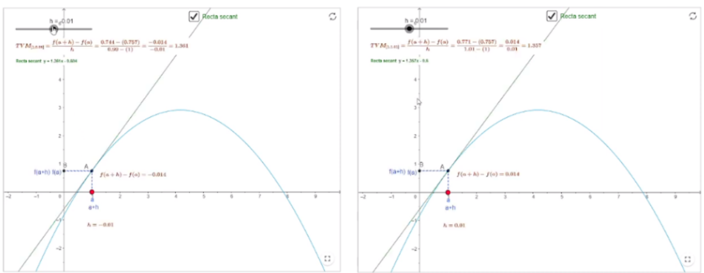
Figura 1. Derecha gráfica del applet. Izquierda gráfica representada por el grupo GP12 en actividad 5.2



Reflexión sobre la relación actividad-efecto apoyando la génesis instrumental

La reflexión sobre la relación actividad-efecto apoya la génesis instrumental. Identificamos dos características: (i) la coordinación entre los registros gráfico y numérico para construir la recta tangente como el límite de la sucesión de las rectas secantes, y (ii) el uso del rastro generado por un punto M con abscisa en el dominio de la función y ordenada igual a la pendiente de la recta tangente para identificar la función derivada. Por ejemplo, en la actividad donde se les pedía que dibujaran la recta a la que se aproximaban las secantes cuando h=0 (la recta no aparecía en el applet) (actividad 4.2.c), la estudiante R explicaba a su compañera cómo obtener dicha recta:

Figura 2. Respuesta del grupo GP16 a la actividad 4.2.c



R: Aquí pasa una recta secante y te dice que hay un valor de h en el que no existe función, es una asíntota [refiriéndose a la recta tangente]. Entonces tienes que dibujar la recta secante que pasaría por ahí [refiriéndose a la recta tangente], pero a ti no te la pone, porque no existe [cuando h= 0 la recta secante no aparece en el applet al no estar definida]. Entonces hemos cogido….

C: ¿cómo?

R: porque cuando h vale 0 la función no existe [refiriéndose a la recta tangente], la recta secante.

[…]

R: Lo que hemos hecho es coger un valor muy aproximado a cero por la derecha y un valor muy aproximado a 0 por la izquierda y dibujar la de en medio que es lo que sería. Eso es lo que estamos haciendo

Por otro lado, la respuesta del grupo GP14 a la cuestión que pedía completar una tabla con distintos valores de h y determinar a qué valor se aproxima la TVM o pendiente de la recta tangente cuando h tiende a 0 (cuestión 4.2.b), mostraba cómo obtenían el valor numérico de la pendiente de la recta tangente y cómo coordinaban los registros numéricos y gráficos en un solo proceso:

Ro: … cuando pones h aproximándose a 0 básicamente pones el TVI […]

Ro: se está aproximando a … [mientras va desplazando h a valores cercanos a 0 por la derecha y la izquierda en el applet]

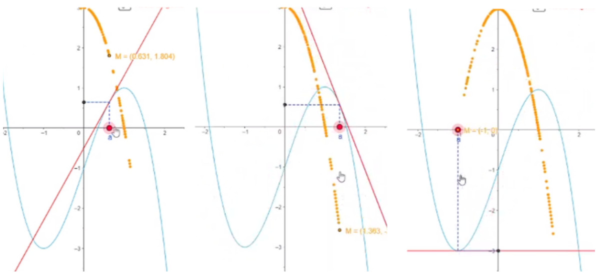
Cr: 1,36 […]

Cr: Sí, la derivada es la pendiente de la recta tangente, es lo mismo. La derivada y la pendiente de la recta tangente es lo mismo, es lo que calculábamos el otro día, que era el punto que no se podía calcular [Refiriéndose cuando h=0].

Este proceso se generó a partir de la coordinación de lo gráfico y lo numérico y permitió a los estudiantes encapsular la recta tangente como un objeto, manipularla e identificar el rastro de M generado por sus pendientes como la función derivada (como una evidencia de la reflexión sobre la relación actividad-efecto). Así, en la actividad en la que se pedía, usando el applet, completar una tabla relacionando el punto M y la recta tangente, y determinar alguna relación con un concepto previamente estudiado (actividad 5.1), la alumna C del grupo GP16 reconocía la función derivada:

C: A ver, vamos a dibujar todos los puntos, ¿lo he dibujado pasando por aquí? No, ¿verdad?, ah, sí, sí, sí, está dibujando. Es por donde pasa M. M es el conjunto de todas las pendientes pero que también forma una derivada [desplazan la recta tangente observando el rastro de M].

Figura 3. Respuesta grupo GP16 actividad 5.1



El uso simultáneo de la recta tangente y el rastro permitió al grupo GP16 relacionar los extremos relativos y la monotonía de la función con los ceros y el signo de la función derivada. Esto es lo que evidencia la encapsulación de la gráfica de la función derivada como objeto. Por ejemplo, en la resolución de la tarea en la que se pedía analizar la gráfica de una función, determinar las características de su función derivada f'(x), y esbozar la gráfica de f'(x) justificando la respuesta (actividad 5.2), este mismo grupo indicó:

C: Cuando llegamos al máximo es una recta horizontal y en el otro lado yo creo que igual, sí. [Desplazando la recta tangente del máximo al mínimo], cuando llega aquí [en el mínimo] […]

R: pasa por aquí y por aquí [Refiriéndose a los puntos de corte]. Es como habíamos dicho, ahora falta saber si es feliz o triste [Refiriéndose a la curvatura de la función derivada] […]

R: Si lo pones en medio, si lo pones en medio del máximo y el mínimo está en medio, está arriba. [la recta tangente es creciente] […]

R: yo creo que es contenta.

Estas alumnas lograron representar la gráfica de la función primitiva a partir de la gráfica de una derivada, que puede ser entendido como evidencia de desencapsular la gráfica de la función derivada identificando extremos relativos y monotonía, aunque mostraron dificultades en puntos de inflexión con tangente horizontal. Por ejemplo, cuando indicaron:

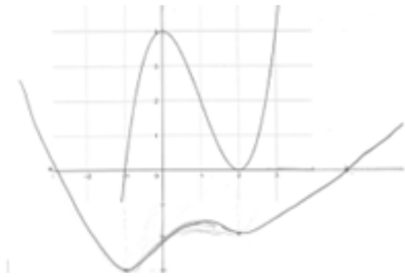
C: Ésta pasa dos veces, pasa solo 2 veces. [corta al eje OX]

H: Entonces tiene dos máximos o mínimos. […]

C: Tiene que hacer algo así [figura 4]. Sí, pero es que me parece raro, no sé, no me pega, en plan. Porque todas tenían un … […]

C: Ya. Pero no sabemos, por qué, hasta donde sube [No identifican el punto de inflexión].

Figura 4. Respuesta grupo GP16, a la actividad 6.2 que pedía realizar un esbozo de la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esa investigación tenía como objetivo caracterizar el desarrollo de la comprensión del significado de la gráfica de la función derivada cuando se introducen instrumentos tecnológicos que favorecen la reflexión sobre la relación actividad-efecto (génesis instrumental). Los resultados muestran dos características relevantes en la transición de conocer la gráfica de la función derivada como proceso a objeto: (i) dificultad para conocer el proceso de paso al límite, y (ii) el papel desempeñado por la reflexión sobre la relación actividad-efecto para apoyar la génesis instrumental.

Cuando los estudiantes comprenden el paso al límite pueden construir y dar significado a la recta tangente y a su pendiente como la derivada de una función en un punto, coordinando los registros numérico y gráfico. Sin embargo, cuando los estudiantes tienen dificultades en el paso al límite no construyen el concepto de TVI ni el de recta tangente. Estas limitaciones vienen dadas porque el concepto, la TVI o la recta tangente, se define mediante un paso al límite, como aquel valor al que converge la sucesión de TVM o de rectas secantes, respectivamente. Para los estudiantes el límite es un concepto definido y que les permite resolver ciertas tareas procedimentales, como calcular $\lim_{x\to 1} x^2$ ó hallar el valor al que se aproxima una sucesión como 0,9; 0,99; 0.999 … pero no han interiorizado su significado debido a la no coordinación entre los registros numérico y gráfico y un uso inadecuado de la tecnología como sucede con las alumnas del grupo GP12.

La segunda característica en la construcción de la gráfica de la función derivada como un objeto implica transitar desde la gráfica de una función a la gráfica de la correspondiente función derivada. La tecnología ha demostrado ser útil en este proceso, permitiendo el uso simultáneo de la recta tangente y el rastro de sus pendientes, lo que facilita la encapsulación de la función derivada como objeto (mediante la utilización del rastro para el reconocimiento de la función derivada y el establecimiento de relaciones con la gráfica de la función con apoyo de la recta tangente). La tecnología permite a los estudiantes reflejar estas características, relacionar la monotonía de la recta tangente con el signo de la derivada de la función. Al mismo tiempo, permite relacionar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es 0 con los extremos relativos de la función, relacionar los extremos relativos de la función con los puntos de corte de la función derivada con el eje de abscisas. Esta segunda característica es la que permite a los estudiantes representar gráficamente la función derivada a partir de la gráfica de la función primitiva, y representar gráficamente la función primitiva a partir de la gráfica de la función derivada.

Los resultados de esta investigación permiten complementar el conocimiento que teníamos del proceso de comprensión de los estudiantes de la gráfica de la función derivada (Asiala et al., 1997) cuando introducimos recursos tecnológicos para favorecer los procesos de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon y Tzur, 2004) que se apoyan en la génesis instrumental (Rabardel, 1995) al aprovechar la potencialidad de los applets que permiten apoyar la noción de variabilidad y la coordinación de los diferentes registros (Duval, 2017).

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Contreras, A. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad: una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En N. Climent, ,L.C. Contreras, y J. Carrillo. (Eds.) *Actas del IV Simposio de la SEIEM*

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations*. Springer Nature. http://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D. y Graham, K. (2017). Understanding the Concepts of Calculus: Frameworks and Roadmaps Emerging from Educational Research. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 526-550). NCTM.

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Elementos para una descomposición genética del concepto de recta tangente. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 111-134. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164

Orts, A., Boigues, F. y Llinares, S. (2018). Génesis instrumental del concepto de recta tangente. *Acta Scientiae, 20*(2), 78-95. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Sánchez-Matamoros, G. y García, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada. En C. Azcarate, M. Camacho-Machin, M.T. González y M. Moreno, (Eds.). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 97-103).

Simon, M.A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (18)*, 87-102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288