



O ensino de Álgebra na perspectiva dos Multisignificados de Equação: algumas possibilidades para a sala de aula.

Alessandro Jacques **Ribeiro**

Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Brasil

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

No presente trabalho são apresentados, discutidos e exemplificados diferentes significados que podem ser atribuídos à equação no ensino de Matemática. Fundamentado nos resultados de uma tese de doutoramento desenvolvida em 2007, este trabalho discute alguns resultados de pesquisas na área da Educação Algébrica, no que se refere ao ensino e a aprendizagem de equações. Em seguida, apresenta uma discussão acerca dos diferentes significados de equação que podem ser atribuídos a essa noção matemática. Procura ilustrar e exemplificar cada um dos diferentes significados atribuídos, relacionando-os com algumas possibilidades para as aulas de matemática. Nas considerações finais destaca-se o papel que uma abordagem enfatizando os multisignificados de equação pode trazer para o desenvolvimento desse fundamental conhecimento matemático.

Palavras Chave: multisignificados de equação, educação algébrica, equação, ensino e aprendizagem de matemática.

Introdução

A discussão a respeito de significados em Educação Matemática chamou a atenção de importantes pesquisadores de nossa área nos últimos tempos e resultou na publicação de *Meaning in Mathematics Education* (KILPATRICK, HOYLES & SKOVSMOSE, 2005). Nessa obra é discutida a complexidade que envolve a questão do significado em Educação Matemática. Tal complexidade é justificada pela possibilidade de junção-confronto de concepções filosóficas e não-filosóficas que parece compor os significados das noções matemáticas no âmbito da Educação Matemática.

Ainda com relação à questão dos significados em Educação Matemática, mas particularizando para o ensino e a aprendizagem de Álgebra e, em específico no que diz respeito à produção de significados para o conceito de equação, encontra-se um exemplo da preocupação de pesquisadores brasileiros sobre esse tema na pesquisa de Martins (2008). Neste trabalho o autor desenvolve um estado da arte sobre pesquisas relacionadas com o tema equações algébricas. Ele conclui que sete das nove pesquisas analisadas *atestam a importância da busca de significado para o ensino de equações algébricas*. (MARTINS, 2008, p. 103).

Em meio a esse cenário a proposta deste trabalho é apresentar e discutir diferentes significados que podem ser atribuídos ao conceito de equação no ensino e na aprendizagem de Matemática. Esses diferentes significados que serão aqui debatidos encontram-se dentre os principais resultados de uma pesquisa de doutoramento desenvolvida no Brasil, em 2007.

Para uma melhor compreensão do leitor, toda vez que for feita referência aos diferentes significados que podem ser atribuídos ao conceito de equação, será utilizado o termo “*Multisignificados de Equação*”, assim como tem sido feito pelo autor da referida tese de doutoramento. Ao longo deste trabalho essa idéia será amplamente explorada e debatida.

Vale ressaltar que, além da proposta anunciada anteriormente para o presente trabalho, pretende-se colocar em discussão as possibilidades e potencialidades que a abordagem dos Multisignificados de Equação podem trazer ao ensino e a aprendizagem de Matemática – com foco nas equações – seja na Educação Básica ou na Formação do Professor de Matemática.

Problematizando o tema

Diversas pesquisas em Educação Matemática, e em particular aquelas que versam sobre equações, procuram debater o tema sob diferentes pontos de vista. Existem aquelas que se debruçam sobre as dificuldades no equacionamento de problemas (ALMEIDA, 2006); sobre as dificuldades específicas na resolução de alguns tipos de equação (RIBEIRO, 2001); sobre as concepções de professores a respeito do tema (ATTORPS, 2006); entre outras que serão exploradas a seguir.

Um trabalho bastante relevante para todos aqueles que estão envolvidos com o ensino e a aprendizagem de Álgebra é o de Carolyn Kieran. Em 1992 esta pesquisadora já chamava a atenção para a necessidade de não se permitir que os alunos passassem muito tempo entendendo e concebendo as expressões algébricas e equações como sendo um amontoado de letras e símbolos sobre os quais se opera somente com números. Desde então, Kieran apontava para a questão da importância de propiciar aos alunos situações em que eles percebessem a possibilidade de entender essas entidades – expressões algébricas e equações – como objetos sobre os quais recaem propriedades e podem ser efetuar diversas outras operações, além de somar, subtrair, dividir ou multiplicar.

Na direção de se considerar e valorizar o aspecto estrutural da Álgebra (KIERAN, 1992), os pesquisadores Dreyfus & Hoch (2004) procuram discutir uma abordagem estrutural para as equações. No trabalho desenvolvido com alunos de idade equivalente aos alunos do ensino médio brasileiro, os autores solicitaram a estudantes israelenses que falassem o que pensavam sobre equação. Dentre os resultados dessa pesquisa, vale aqui destacar que os autores

identificaram a pouca capacidade daqueles alunos em reconhecer a estrutura interna de uma equação, caracterizando a idéia de equação, na maioria das vezes, como um processo de resolução, i.e., relacionando equação com o processo de sua resolução.

Na pesquisa de Lima (2007) foram investigados os significados atribuídos por alunos de ensino médio à equação e aos seus métodos de resolução. Utilizando-se de questionários e entrevistas em que eram contempladas equações algébricas de 1º e 2º grau, a autora pôde constatar que os alunos investigados atribuem o significado de equação como uma “conta” a ser resolvida, na qual o sinal de igual assume um caráter unicamente operacional. Constatou ainda que os alunos apresentavam dificuldades ao tentar responder a questão: “O que é uma equação?”.

A partir das análises destas e de outras pesquisas envolvendo equações, e também considerando experiências acadêmicas e profissionais, pôde-se observar uma ênfase excessiva que é dada, seja por alunos, seja por professores, nos aspectos procedimentais que envolvem as equações. Como em Attorps (2006) e Lima (2007), verifica-se que a mecanização e automatização na resolução de equações sobrepõem-se a uma compreensão mais ampla de equação, que possa envolver aspectos conceituais, aspectos estruturais, entre outros.

A partir dessas reflexões e preocupações, Ribeiro (2007) desenvolveu um estudo de caráter teórico, no qual foram investigados diferentes significados que foram concebidos historicamente para o conceito de equação, seja em sua utilização por diferentes povos, como os Babilônios e Egípcios, seja por autores de livros didáticos e/ou pesquisadores em Educação Matemática.

Os multisignificados de equação

Como anunciado inicialmente, o presente trabalho tem entre suas pretensões apresentar e colocar em discussão os Multisignificados de Equação como uma possível abordagem para um ensino de Matemática que tenha dentre suas preocupações, possibilitar aos indivíduos a construção e a compreensão de diferentes significados para uma mesma noção matemática, nesse caso, as equações

Os multisignificados de equação apresentados neste trabalho, como já anunciado anteriormente, foram concebidos e amplamente discutidos no trabalho de doutoramento de Ribeiro (2007). Neste momento, eles serão apresentados e exemplificados, segundo uma ordenação histórica da forma como os quais foram surgindo, principalmente, em resposta à problemas matemáticos postos. Além disso, são considerados ainda os significados que emergiram de pesquisas em Educação Matemática e da análise de alguns livros didáticos.

A elaboração das categorias fundamentou-se num estudo epistemológico e didático desenvolvido por ocasião da elaboração da pesquisa de Ribeiro (2007). Contudo, há que se citar a influência do trabalho “*Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar*”, de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), para a constituição da nomenclatura utilizada para os multisignificados de equação. São eles:

Intuitivo-Pragmático: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção intuitiva, ligada à idéia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, os quais são originários de situações do dia-a-dia;

Dedutivo-Geométrico: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada às situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas, com intersecções de curvas;

Estrutural-Generalista: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias. A equação aqui é considerada por si própria, operando-se sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza;

Estrutural-Conjuntista: por esse significado o conceito de equação é concebido numa perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos;

Processual-Tecnicista: por esse significado o conceito de equação é concebido como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, nesse momento equação não é vista como um ente matemático sobre o qual as operações e manipulações que são realizadas atendem à regras bem definidas;

Axiomático-Postulacional: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção da Matemática que não precisa ser definida, uma idéia a partir da qual outras idéias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Por essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.

Embora os diferentes significados devam ser considerados de forma articulada e sem nenhum “nível de hierarquização”, acredita-se que o significado *axiomático-postulacional* pudesse ser concebido como o primeiro deles a ser considerado no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra. A partir dele, não seria preciso preocupar-se em definir o conceito de equação, podendo priorizar a discussão da idéia central desse conceito, quer seja – a idéia de igualdade – permitindo-nos, inclusive, a integração desse significado com outros que foram apresentados anteriormente.

Alguns resultados de pesquisas envolvendo os multisignificados de equação

Como continuidade às investigações desenvolvidas em Ribeiro (2007), novas pesquisas estão sendo levadas a cabo atualmente, como a de Barbosa (2009) e a de Dorigo (2010). Estas pesquisas buscam investigar como professores e alunos vêem, interpretam e tratam situações matemáticas que contemplem os diferentes significados de equação (RIBEIRO, 2007). As pesquisas acima ilustradas estão vinculadas a um projeto docente mais amplo, o qual é composto por outros alunos de graduação e de pós-graduação que fazem parte da equipe de trabalho.

Alguns resultados encontrados por Barbosa (2009) e por Dorigo (2010) possibilitaram refletir sobre o que professores e alunos pensam e fazem quando se deparam com situações matemáticas envolvendo equações. O trabalho de Barbosa (2009) foi desenvolvido com 6 professores de Matemática com diferentes tempos de experiência e diferentes tipos de titulação.

Enquanto que o trabalho de Dorigo (2010) foi realizado com um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio regular, de uma escola pública na cidade de São Paulo.

Barbosa (2009) e Dorigo (2010) apontam que, tanto professores como alunos apresentam em suas concepções uma forte presença do significado Intuitivo-Pragmático. Entretanto, ainda que os alunos “utilizem” com mais naturalidade tal significado (Dorigo, 2010), percebe-se que tais alunos sentem uma grande necessidade de utilizar-se de procedimentos e técnicas (significado Processual-Tecnicista) para tratar as situações às quais eles foram expostos.

Para ilustrar e fundamentar as discussões são apresentados a seguir, alguns protocolos nos quais pode-se observar dois exemplos de situações matemáticas que foram concebidas sob a perspectiva dos diferentes significados que compõem os Multisignificados de Equação: (1) situação relacionada ao significado Intuitivo-Pragmático e, (2) situação relacionada ao significado Processual-Tecnicista. Ambas as situações foram contempladas nas duas pesquisas, ou seja, foram vivenciadas tanto por professores como por alunos.

SITUAÇÃO 1: situação matemática que remete ao significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO, uma vez que a equação emerge de uma situação do cotidiano (pragmático) e pode ser tratada numericamente, utilizando-se de conhecimentos já adquiridos pelos indivíduos (intuitivo).

“Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R\$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$ 12,00 e um DVD custa R\$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$ 70,00?”

Figura 1: Exemplo de situação matemática utilizada para coleta de dados.

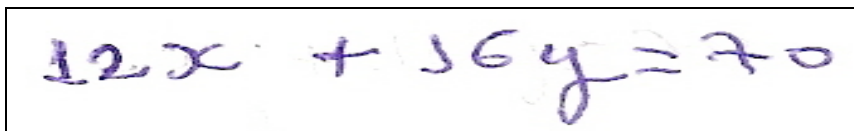
Handwritten mathematical work for a word problem. The work includes the following elements:

- Calculations for CD and DVD costs: $CD = 12,00 \times 2 = 24$ and $DVD = 16,00 \times 3 = 48$.
- A system of equations: $x + y = 70$, with $x = 12$ and $y = 16$ written above it.
- Long division calculations: $70 \div 12 = 5$ with a remainder of 10, and $70 \div 16 = 4$ with a remainder of 6.
- A final conclusion: "Possibilidades 3 CD e 2 DVD."

Figura 2: Protocolo Professor A

B. Por tentativa assim eu não consegui achar qual seria as possibilidades, sem usar fórmula nenhuma, tentando assim, por tentativa, colocando, comprando dois DVDs, um CD, não sei o quê... ou então usando...

Figura 3: Transcrição Professor B



A handwritten equation in blue ink: $12x + 36y = 70$.

Figura 4: Protocolo Professor C

C. Se eu atribuir valores para x e para y, se não, não dá, ou se eu tivesse outra equação montar um sistema.

Figura 5: Transcrição Professor C

1 DVD + 4 CDs = R\$ 64,00
2 DVDs + 3 CDs = R\$ 65,00
3 DVDs + 2 CDs = R\$ 72,00
4 DVDs + 1 CD = R\$ 76,00

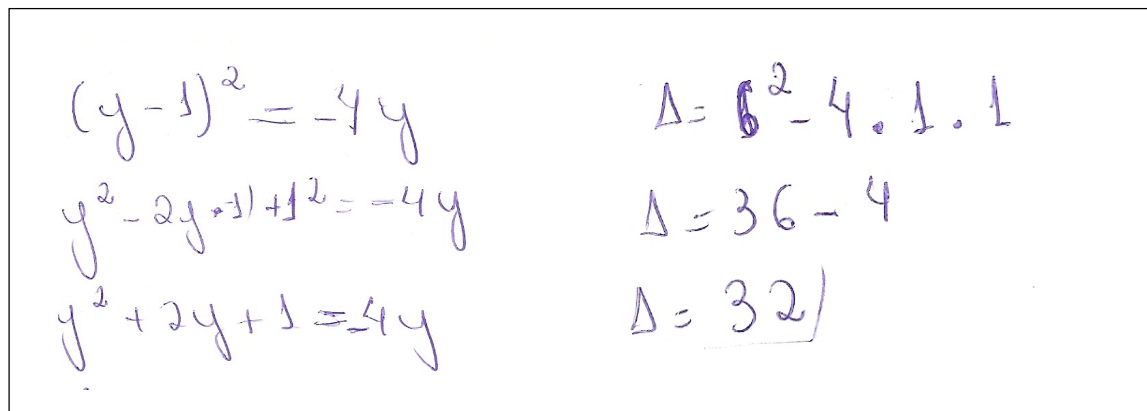
Conclusão: não há nenhuma possibilidade de comprar esses dois bens, gastando exatamente R\$ 70,00.

Figura 6: Protocolo Alunos (Dupla 1)

SITUAÇÃO 2: situação matemática que remete ao significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO, uma vez que a equação emerge de uma situação do cotidiano (pragmático) e pode ser tratada numericamente, utilizando-se de conhecimentos já adquiridos pelos indivíduos (intuitivo).

“Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a $-4y$.”

Figura 7: Exemplo de situação matemática utilizada para coleta de dados.



Handwritten algebraic steps for solving the equation $(y-1)^2 = -4y$:

$$(y-1)^2 = -4y$$
$$y^2 - 2y + 1 = -4y$$
$$y^2 + 2y + 1 = -4y$$
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$\Delta = 36 - 4$$
$$\Delta = 32$$

Figura 8: Protocolo Professor B

B. Então eu cheguei num ponto aqui que ou eu errei o sinal, ou raiz de 32 não vai ter como conseguir, algum passo aqui deve estar... alguma coisa que não está... se for para achar o valor no caso aqui, raiz de 32... aqui alguma coisa...
P. Não existe raiz de 32?
B. Não, assim... só nos números complexos, né?

Figura 9: Transcrição Professor B

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there are two squared binomials: $(y-1)^2$ and $(-1-1)^2$. Below $(y-1)^2$ is the term -2^2 . To the right of these, the word "igual" is written, followed by a horizontal line. Below the line, the expression $-4-y$ is written, and below that, $-4-1$ is written. At the bottom right, the result $= 4$ is written, with the number 4 circled. At the bottom left, the result $= 4$ is also written, with the number 4 circled.

Figura 10: Protocolo Alunos (Dupla 1)

Transcrição 1- Não reconhecemos e nem utilizamos equação. Pensamos que a melhor forma seria, ou a única forma que sabíamos de resolver era “chutando” para encontrar o resultado.

Figura 11: Transcrição Alunos (Dupla 1)

Nos resultados da pesquisa de Barbosa (2009) observou-se a presença do significado Processual-Tecnicista de forma mais aparente e freqüente, se comparada à pesquisa de Dorigo (2010). Os professores investigados por Barbosa encontraram dificuldades para tratar as situações matemáticas às quais eles foram expostos, quando não se recordavam de uma fórmula e/ou um algoritmo de resolução. Exemplos dessas situações podem ser observados nos protocolos acima ilustrados.

Outro indicativo bastante freqüente nas análises desenvolvidas em Barbosa (2009) apontam que, embora o significado Intuitivo-Pragmático também tenha emergido do trabalho dos professores, esses não se sentiram tão a vontade para usar “estratégias aritméticas”, como foi observado entre os alunos, na pesquisa de Dorigo (2010). Exemplos destas situações são exemplificados nos protocolos acima.

Com isso, apesar de apresentar aqui somente dois exemplos das situações que Barbosa (2009) e Dorigo (2010) trataram em suas pesquisas, outros tantas foram desenvolvidas, contemplando os demais significados que compõem os Multisignificados de Equação.

Nas análises desenvolvidas por eles e nos resultados apresentados, pudemos observar que há necessidade de se discutir tanto com professores, como com alunos, situações “não usuais”, quer seja, situações que possibilitem abordar as equações em problemas e contextos que “fujam” do excesso de procedimentos e técnicas, ratificando resultados de outros pesquisadores, como os que foram discutidos no início deste trabalho.

Conclusões e considerações finais

Após essa discussão inicial, que pretendia apresentar, categorizar e exemplificar diferentes significados do conceito de equação, passa-se à discussão sobre reflexões e orientações que julga-se pertinentes e importantes de serem consideradas, principalmente na Formação do Professor de Matemática, locus no qual acredita-se que a abordagem dos multisignificados seja mais relevante e apropriada.

A primeira reflexão apontada refere-se às possibilidades e potencialidades que os multisignificados de equação incorporam no que tange ao trabalho integrado e articulado entre diferentes significados desse conceito. Nessa perspectiva, tal proposta é corroborada pela discussão apresentada por Duval (2003) em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A abordagem proposta permite discutir o conceito de equação articulando-se diferentes registros de representação semiótica, trabalho que Duval indica como necessário na/para a compreensão Matemática.

Uma vez que Duval destaca a importância de utilizar diferentes registros de representação semiótica para a construção do conhecimento matemático, pode-se conjecturar que, articulando-se o *intuitivo-pragmático* com o *dedutivo-geométrico* por exemplo, propicia-se situações em que o conceito de equação, ainda que entendido como um problema entre igualdade de quantidades, possa ser interpretado e representado de diferentes formas gráficas, seja por meio de diagramas, de esquemas gráficos, ou mesmo, posteriormente, pela intersecção de duas curvas, gerando a solução para o problema apresentado.

Uma segunda reflexão que é compartilhada neste trabalho refere-se à possibilidade que a abordagem dos multisignificados de equação pode propiciar para as aulas de Matemática. No que tange à variedade e à amplitude, observa-se que o termo *significado* é assim contemplado nessa abordagem. Retomando a obra de Kilpatrick, Hoyles e Skovsmose (2005) sobre a questão dos significados em Educação Matemática, vale lembrar que:

(...) a questão torna-se ainda mais complexa, pois há uma mistura de interpretações filosóficas e não-filosóficas. Assim, de um lado, nós podemos reivindicar que uma atividade tem significado como parte do currículo, enquanto os alunos podem sentir que a mesma atividade é totalmente desprovida de significado. Observações como estas sobre o significado podem ser discutidas com referência a dados empíricos. Por outro lado, a discussão da questão de saber se o significado tem sentido com relação ao seu referente ou ao seu uso é conceitual, mas não facilmente explicada por cada significado (KILPATRICK, HOYLES & SKOVSMOSE, 2005, p. 2), *tradução do autor*.

Nesta direção, acredita-se que a abordagem dos multisignificados de equação nas aulas de matemática pode propiciar uma “mistura” de situações que envolvam tanto uma discussão com relação aos referentes, como com relação aos usos:

Uma vez que diferentes formas de conceber e tratar equação estão presentes no cerne dos multisignificados, a sua abordagem em ambientes de aprendizagem pode propiciar para

aqueles que interagem como os mesmos, a possibilidade de vivenciar significados matemáticos, não matemáticos, do senso comum, significados individuais ou coletivos, etc. no que se refere à noção de equação (RIBEIRO, 2008, p. 117).

Por último, mas não menos importante, entende-se que pesquisas como a desenvolvida em Ribeiro (2007) e apresentada no presente trabalho tendem a trazer para o ambiente da Formação do Professor de Matemática, uma discussão sobre temas da Educação Básica – como é o caso das equações – que não contemple um simples caráter de revisão e retomada de conteúdos “elementares”. Tal abordagem pode possibilitar discussões epistemológicas e/ou didático-pedagógicas desses conhecimentos, o que pode propiciar a ampliação das concepções que os futuros professores possam ter dessas noções matemáticas.

Nessa direção, parece que o trabalho com os Multisignificados de Equação na Formação do Professor de Matemática possibilitaria ainda a elaboração de contextos em que sejam discutidas as diferentes vertentes do conteúdo (SHULMAN, 1986), bem como permitiria reflexões e discussões acerca do *Mathematical Knowlegde for Teaching* – Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL et al, 2008), no que se refere às equações.

Ratificando a importância de se contemplar e desenvolver pesquisas que tenham a preocupação de investigar os conhecimentos do professor de matemática que ensina Álgebra, Doerr (2004) ressalta *a carência de um corpo substancial de pesquisas sobre o conhecimento e a prática do professor no ensino de Álgebra* (DOERR, 2004, p. 268).

A continuidade dos trabalhos e investigações iniciadas em Ribeiro (2007) caminha na direção de observar, contemplar e sistematizar tais discussões e reflexões, uma vez que desenvolve pesquisas com professores e alunos acerca do conceito de equação, em aulas de Matemática. Além dos trabalhos já concluídos, ou em fase final de conclusão, outros mais estão sendo levados a cabo na mesma perspectiva.

Dentre as propostas finais que pretende-se alcançar estão, por um lado, a apresentação de resultados que possam ser incorporados às práticas dos professores de matemática no que se refere ao ensino de equações na Educação Básica e/ou no Ensino Superior. Por outro lado, reflexões teóricas estão sendo desenvolvidas no intuito de delinear o MKT (*Mathematical Knowlegde for Teaching*) referentes ao conceito de equação.

Fundamentado nos resultados apresentados e nas reflexões aqui desenvolvidas, alguns questionamentos encontram-se em aberto e estimulam muitas inquietações, tais como: Qual é o conhecimento específico (ou especializado) sobre a noção de equação necessário para o professor de matemática? Como considerar e contemplar o desenvolvimento epistemológico do conceito de equação na formação do professor de matemática? Quais as principais dificuldades de aprendizagem estão presentes quando se ensina equações na Educação Básica e/ou no Ensino Superior? Quais as principais dificuldades para o ensino de equação na Educação Básica e/ou Ensino Superior? Qual poderia (ou deveria?) ser o percurso para o ensino de equação, do ponto de vista curricular, na Educação Básica e/ou Ensino Superior?

Enfim, as questões ainda são muitas; são amplas; são complexas. Todavia, certamente, elas são necessárias e fundamentais se queremos propiciar a alunos e a professores um ensino e uma aprendizagem de equações que vá além da mera manipulação sem sentido e sem significados de símbolos, procedimentos e técnicas.

Referências Bibliográficas

- Almeida, M.M.M. (2006). *Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Attorps, I. (2006). Teachers' images of the 'equation' concept. In: *European Research in Mathematics Education III*. Disponível em <http://ermeweb.free.fr/cerme3/groups/tg1/tg1list.html> acesso em 15/12/2006.
- Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* (59) 389-407.
- Barbosa, Y. O. (2009). *Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 196 f.
- Doerr, H. M. (2004). Teachers' Knowledge and Teaching of Algebra. In: Stacey, K. ; Chick, H. ; Kendal, M. (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. New York : Kluwer Academic Publishers, 267-289.
- Dorigo, M. (2010). *Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 137 f.
- Dreyfus, T., Hoch, M. (2004). Equations: a structural approach. *Proceedings of the 28th Conference of Internatoinal Group for the PME*, 1-152 – 1-155.
- Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In MACHADO, S. D. A. (org) *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 11-33.
- Fiorentini, D., Miorim, M. A., Miguel, A. (1993). Contribuição para um Repensar ... a Educação Algébrica Elementar. *Revista Pro-Prosições*. Faculdade de Educação da Unicamp, vol 4, n. 1[10], 79-91.
- Kieran, C. (1992). The learnig and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan, 390-419.
- Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skvsmose, O. (2005). *Meaning in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 358 f.
- Martins, A. de M. (2008). *Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 142 f.

Ribeiro, A. J. (2001). *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 116 f.

_____ (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 142 f.

_____ (2008). *Multisignificados de equação e o ensino de matemática: desafios e possibilidades*. São Paulo: Blucher Acadêmico.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in the teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.