XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

# Aprendizajes aritméticos que contemplan los futuros aprendizajes algebraicos

Liliana Lucía **Lalanne**
Instituto de Formación Docente Nº 12 de la Provincia de Neuquén
Argentina
lilianalalanne@neunet.com.ar

## Resumen

La intención de este taller es proponer a la ecuación diofántica lineal como un eslabón entre aritmética y álgebra. Para ello, por un lado, se resolverán y analizarán problemas modelizables mediante ecuaciones diofánticas lineales y, por otro, se analizarán procedimientos espontáneos desplegados por niños (desde el comienzo de la escolaridad) al resolver estos problemas. Estas situaciones ponen en juego las nociones de variable y de generalización, nociones relevantes para organizar la enseñanza del álgebra. Esta propuesta se basa en el estudio presentado en el libro “Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario” (Barrio, Lalanne, Petich, 2010). En esta obra se analiza a la ecuación diofántica lineal desde tres miradas, independientes y complementarias a la vez, sustentadas por los siguientes marcos teóricos: La Epistemografía (Drouhard, 2005), la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1991) y La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1993).

*Palabras clave*: aritmética, álgebra, variable, ecuación diofántica lineal, campo conceptual, registro de representación semiótica, órdenes de conocimiento.

## Introducción

Varios documentos destacan la importancia que las nociones de variable y de generalización tienen en la planificación de propuestas para la enseñanza del álgebra de modo que ésta resulte significativa para los alumnos. Entre ellos, cabe citar el libro “Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario” (Barrio, Lalanne, Petich, 2010) en el que se basa este taller. Este libro presenta un estudio sistemático de la ecuación diofántica lineal (EDL)[1] desde tres miradas independientes y complementarias a la vez, encuadradas en los siguientes marcos teóricos: La Epistemografía (Drouhard, 2005), la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1991) y La Teoría de los Registros de Representación

[1] EDL: abreviatura de ecuación diofántica lineal.

Semiótica (Duval, 1993). Muestra así la pertinencia de considerar a la EDL como un posible eslabón entre aritmética y álgebra; aritmética por ser diofántica y algebraica por ser ecuación, como plantean Drouhard y Panizza (2010) en el prólogo de la obra.

El enfoque al que se adhiere aborda la problemática del pasaje de la aritmética al álgebra desde una perspectiva de articulación que compromete tanto a los docentes de primaria, como a los de secundaria. Se aclara que no se trata de adelantar los conocimientos a adquirir en la escuela primaria para facilitar la entrada al álgebra; la intención es brindar elementos que posibiliten un tratamiento de la aritmética que contemple los futuros aprendizajes algebraicos, pero respetando la identidad de cada nivel (primario y secundario) y la especificidad de cada dominio de conocimiento (aritmética y álgebra).

La triple mirada mencionada brinda un marco teórico consistente para analizar los problemas de EDL, permite así caracterizar ambos dominios (aritmética y álgebra) y favorecer propuestas de enseñanza que tengan en cuenta la comprensión de los procedimientos y dificultades de los alumnos. Además, como consideran Panizza y Drouhard (2010) al prologar la obra, muestra que es posible pensar el camino entre aritmética y álgebra como un camino donde se den continuidades y rupturas parciales y concebir así una transición entre estos dos dominios que no sea concebida solamente en términos de la Gran ruptura entre aritmética y algebra.

**Objetivos del taller**

A partir de los enfoques teóricos mencionados, se propone para este taller:

- identificar organizadamente los conocimientos de naturaleza diferente que se ponen en juego en la actividad matemática con los problemas modelizables mediante EDL para determinados momentos de la escolaridad, según el Modelo epistemográfico de Drouhard;
- explicitar las condiciones para el diseño de estos problemas con distinto grado de complejidad, según la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud;
- analizar modelos, representaciones y procedimientos espontáneos que los alumnos utilizan al resolver estos problemas, las dificultades que tienen, los errores que cometen y cómo evolucionan esos procedimientos a lo largo de la escuela, según la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y la Teoría de los registros de representación semiótica de Duval.

**Sobre las actividades a desarrollar**

Se considera pertinente aclarar algunos aspectos sobre las actividades a desarrollar en el taller, incluidas en el Anexo 1. No es habitual que la EDL sea un contenido curricular (en Argentina no figura en los documentos curriculares), tampoco es frecuente que en la escuela se presenten problemas con varias o infinitas soluciones, por lo que se cree que los problemas serán desafiantes para los docentes que participen del taller. En experiencias de capacitación similares, estos problemas permitieron a los docentes explorar, buscar representaciones adecuadas, elaborar conjeturas, validar sus afirmaciones, construir modelos. Se espera que los docentes que asistan experimenten la actividad matemática pues no solo podrán apropiarse de conocimientos matemáticos, sino también del modo en que se trabaja para producirlos.

En la introducción se mencionaron los tres marcos teóricos en los que se sustenta esta experiencia. A partir de los procedimientos que los asistentes desplieguen al resolver los problemas, se trabajarán aspectos de los marcos mencionados. En este sentido, se aclara que los tipos de procedimientos que surjan (aritméticos o algebraicos) dependerán del grado de formación de los docentes que asistan. Es habitual que los docentes de nivel primario procedan aritméticamente y que los de nivel medio, utilicen procedimientos algebraicos. Al tratarse de un taller y desconocer los conocimientos previos de los asistentes, no se tiene certeza sobre qué procedimientos serán puestos en juego. Justamente, es la variedad de procedimientos, de representaciones, de registros, incluso de dificultades lo que enriquece el análisis desde la triple mirada. En esa variedad, se suele observar la evolución de la representaciones desde escrituras aritméticas hasta escrituras algebraicas.

Si bien este taller se ocupará de estudiar cognitiva y didácticamente a la EDL, se espera que los asistentes puedan descubrir la riqueza de estudiar otros contenidos escolares desde las tres miradas que se proponen.

***En cuanto a las actividades presentadas:***

- el primer problema se modeliza mediante la ecuación 4x + 6y = 82 y su conjunto solución es $\{(1,13),(4,11),(7,9),(10,7),(13,5),(16,3),(19,1)\}$
- el segundo problema se modeliza mediante la ecuación 4x - 6y = 82 y tiene infinitas soluciones[2], $(22,1)$ es solución, entonces $\left(22+\frac{6}{2}n, 1+\frac{4}{2}n\right)$, con n perteneciente al conjunto de números naturales, es solución.

Se destaca que al resolver el primer problema no es necesario plantear la regularidad correspondiente pues se pueden enumerar todos los pares solución. En cambio, para solucionar el segundo problema, hay que generalizar. Se comienza a ver cómo juegan las nociones de variable y de generalización en estos problemas y cómo la escritura algebraica es más ventajosa que la aritmética para describir la regularidad.

Por las experiencias previas que se han mencionado, se sabe que los docentes suelen proceder por covarianza (para el primer problema: escriben los múltiplos de 4 y de 6 y elijen aquellos cuya suma es 82; para el segundo: elijen aquellos cuya diferencia es 82) o por dependencia (para el primer problema: restan de 82 un múltiplo de 6 y observan si la diferencia es múltiplo de 4; para el segundo: suman a 82 un múltiplo de 6 y observan si la suma es múltiplo de 4). En varias ocasiones, los docentes han tenido ciertas dificultades para resolver y dar respuesta al segundo problema.

***En cuanto a los marcos teóricos:***

Dada la imposibilidad de sintetizar en pocas líneas los marcos teóricos en los que se basa esta propuesta, se mencionan a continuación, a través de citas textuales, algunos conceptos claves de estos enfoques que serán trabajados en el taller.

- …uno de los aspectos de la complejidad de la adquisición del conocimiento matemático reside en gran medida en la diversidad de conocimientos que confluyen en una actividad matemática. Poder pensar organizadamente en su naturaleza y en sus relaciones posibles o necesarias se revela fundamental para la didáctica. (Drouhard y Panizza, 2003, p. 52).
- La enseñanza del álgebra no se puede organizar en forma adecuada si el docente no es capaz de captar, en un solo vistazo, la totalidad del conjunto de situaciones y del conjunto de conceptos y

[2] Las EDL siempre tienen infinitas soluciones, pero consideramos acá las soluciones del problema.

teoremas en acto de manera tal que los símbolos y la manipulación simbólica adquieran sentido para el estudiante. (Vergnaud, 1996, p. 233).

- …es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado. (Duval, 1993, citado en Panizza, 2003, p. 34).

Además, en el apéndice A, se presenta el esquema según el cual Drouhard representa espacialmente el modelo epistemográfico y los esquemas correspondientes a dos subparadigmas de este modelo.[3]

## Referencias y bibliografía

Barrio, E., Lalanne, L. & Petich, A. (2010). Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Cortés, A., Vergnaud, G. & Kavafian, N. (1990). De l´arithmetique a l´algebre: La negociation d´une rupture.

Drouhard, J-Ph. & Panizza, M. (2003). Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. En Palou de Maté (coord.), La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua. Buenos Aires. C.E.Di.Co. UNC, GEEMA Grupo Editor Multimedial, pp. 51-69.

Drouhard, J-Ph. &y Grupo CESAME. (2005). La epistemografía: una representación de la organización de los conocimientos matemáticos, IREM de Nice, Francia y Proyecto UBACyT U004, UBA, Argentina. Montevideo. Conferencia presentada en la 19º Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 19. (Diapositivas de la presentación oral).

Drouhard, J-Ph. & Panizza, M. (2004). Perspective Paradigmatique et Ordres de Connaissances, À paraître dans : MERCIER (Dir.), Actes de la 12ème école d'été de Didactiques des Mathématiques, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Drouhard, J-Ph. (2004). Contradicciones 3: Subparadigmas. En Contradicciones en la formación docente, Argentina. Conferencia presentada en el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (Diapositivas de la presentación oral).

Drouhard, J-Ph. & Panizza, M. (2010). Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas, (pp. 9 - 14).

Duval, R. (1993).Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Strasbourg. En Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM. Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN. México, 1996, pp.37–65.

Duval, R. (1995). Semiosis et pensée humaine, Registres semiotiques et apprentissajes intellectuels. Traducido al español por Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV - I.PN. México, 1995.

Duval, R., (2001). L'apprendissage de l'algèbre et le problème cognitif de la designation des objets, Nice. SFIDA N° 13, IREM.

[3] Se decidió incluir este apéndice dado que este marco teórico es nuevo y, por lo tanto, menos conocido que los otros dos marcos citados.

Itzcovich, H. (2007). La matemática escolar. Buenos Aires: Aique.

Panizza, M. (2003). Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática, en Panizza, M. (comp.), Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Buenos Aires, Paidós, p. 35.

Panizza, M., Sadovsky, P. & Sessa, C. (1997). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. Barcelona. Enseñanza de las Ciencias, Vol. 17.

Petich, A. (2010). Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas, (pp. 22, 65, 69).

Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. En Steffe, Nesher, Cobb, Goldin y Greer (eds.), Theories of Mathematical Learning, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. & Durand, C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En Coll (comp.), Psicología Genética y Aprendizajes Escolares. Madrid: Siglo XXI.

Vergnaud, G. & Riccó, G. (1985). Didáctica y adquisición de los conceptos matemáticos. Problemas y métodos, Revista argentina de educación, Nº 6, pp. 67–91.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2-3, 1991, pp. 133–169.

## Apéndice A

"La Epistemografía permite representar la organización de los conocimientos matemáticos y tiene básicamente dos conceptos claves: órdenes de conocimiento y subparadigmas.

Jean-Philippe Drouhard (2004; 2005) representa el modelo "espacialmente", ubicando los tres órdenes, que son de naturaleza muy diferente, en forma vertical, de la siguiente manera:" (Petich, 2010, pp. 22, 65, 69)

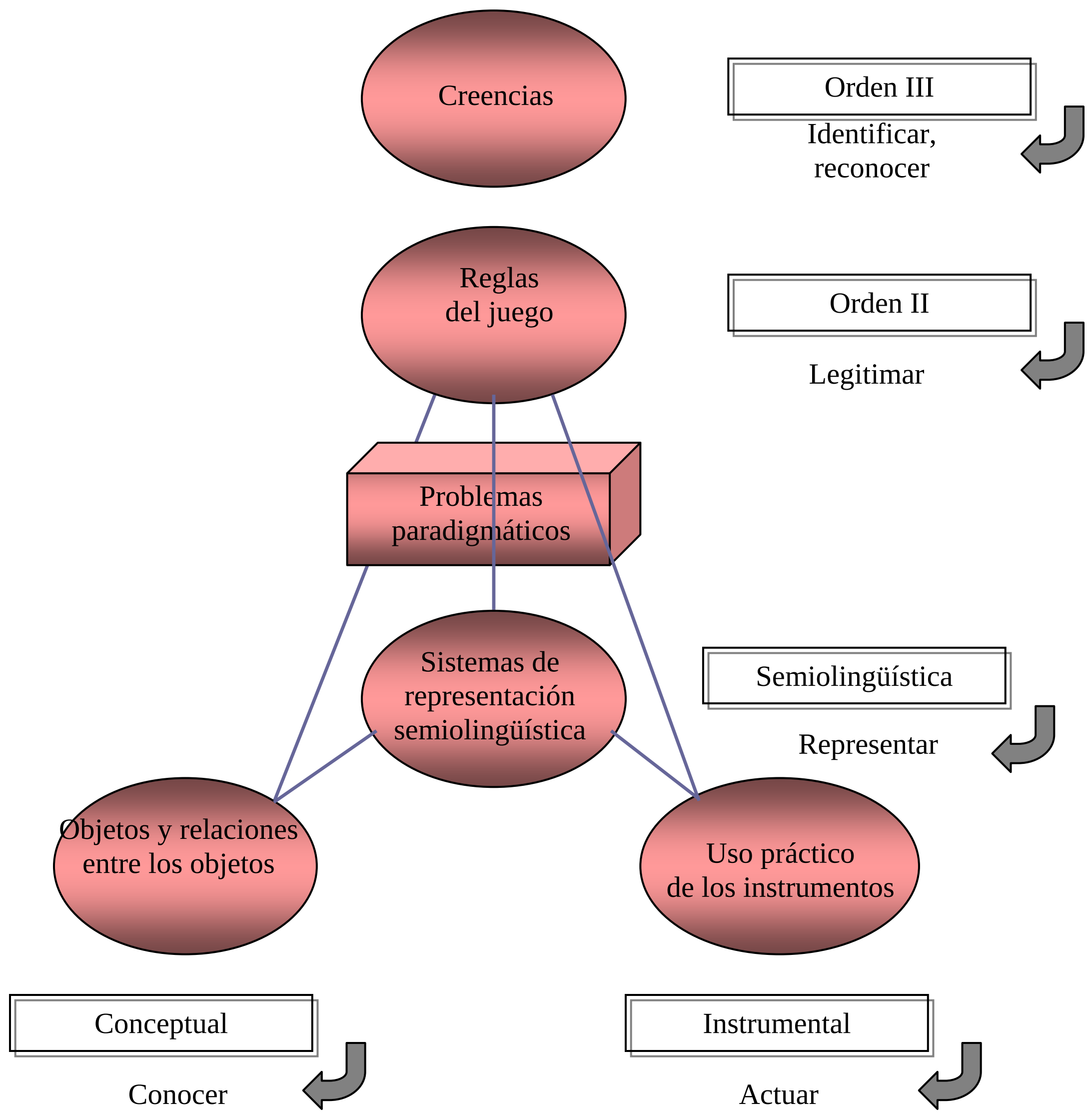


*Figura 1.* Órdenes del conocimiento (Petich, 2010, p. 22).

**Subparadigma Numérico** I

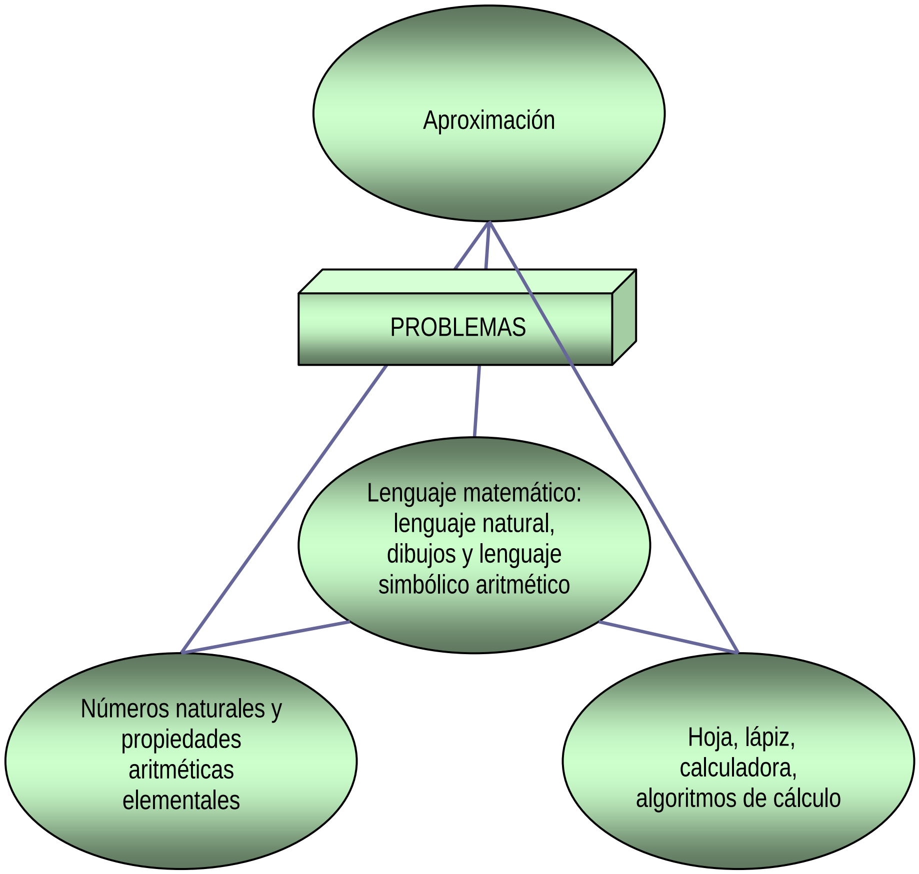


*Figura 2.* Subparadigma numérico I (Petich, 2010, p. 65).

**Subparadigma Numérico** II

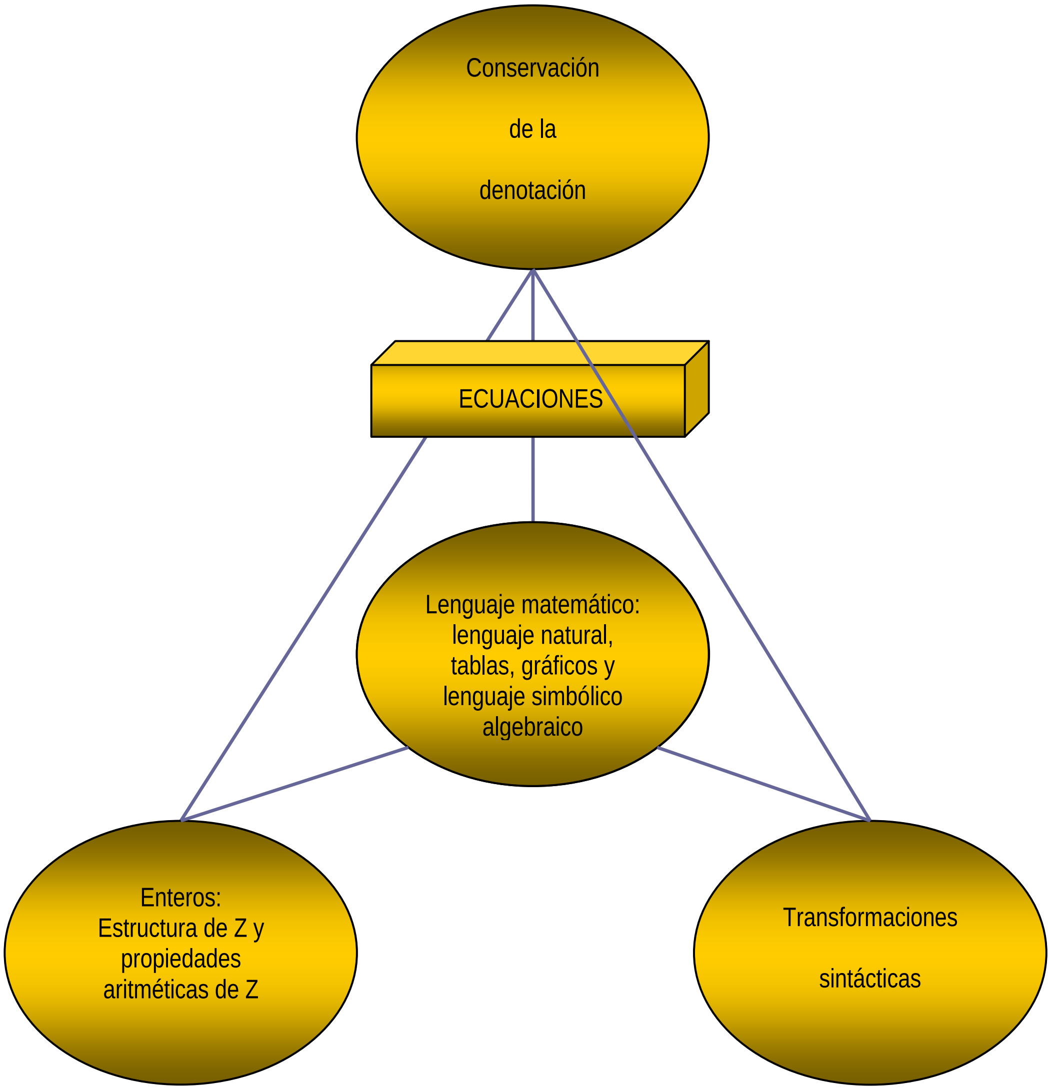


*Figura 3.* Subparadigma numérico II (Petich, 2010, p. 69).

## Anexo 1

## Guías de trabajo

***1.-** Resolver el siguiente problema en grupo.*
*Una vez resuelto el problema, deberán armar un afiche (para la puesta en común) dando cuenta del procedimiento seguido.*

Un albergue tiene dos clases de habitaciones: las especiales, de 4 camas cada una, y las turísticas, de 6 camas cada una. Dispone en total de 82 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada clase puede tener?
*(Tiempo estimado: 20 minutos).*

**2.-** Resolver el siguiente problema en grupo.

*Un albergue tiene dos clases de habitaciones: las especiales, de 4 camas cada una, y las turísticas, de 6 camas cada una. Entre todas las habitaciones especiales hay 82 camas más que entre todas las turísticas. ¿Cuántas habitaciones de cada clase puede tener?*

(Tiempo estimado: 20 minutos).

**3.-** Comparar los problemas que acaban de resolver.

- ¿Qué analogías y qué diferencias observan entre los dos problemas?
- ¿Qué operaciones hay que hacer con los elementos de cada par ordenado para verificar que ese par es una solución?

(Tiempo estimado: 10 minutos).

**4.-** El primer problema de esta guía fue presentado a alumnos de 4º grado de escuela primaria: En la página siguiente se muestra uno de los procedimientos espontáneos desplegados por los niños. Cabe aclarar que los niños no habían resuelto previamente problemas de esta naturaleza, se trató de una situación nueva y desafiante para ellos.

Se pide analizar la producción de este alumno a partir de los marcos teóricos trabajados en el taller. Se recuerdan los siguientes aspectos para orientar el análisis:
En cuanto a los órdenes de conocimiento: indicar conocimientos de orden 1 y de orden 2 que se observan en esta producción. Dentro de los conocimientos de orden 2, analizar cuáles son conceptuales, cuáles son semiolingüísticos y, cuáles, instrumentales.
En cuanto a la teoría de los campos conceptuales: indicar los conceptos y teoremas puestos en acto por este alumno y tener en cuenta que
"La enseñanza del álgebra no se puede organizar en forma adecuada si el docente no es capaz de captar, en un solo vistazo, la totalidad del conjunto de situaciones y del conjunto de conceptos y teoremas en acto de manera tal que los símbolos y la manipulación simbólica adquieran sentido para el estudiante."
(Vergnaud, 1996, p. 233).
En cuanto a la teoría de los registros de representación semiótica: indicar qué tipo de registro ha sido movilizado, qué función cumplen las representaciones, analizar cómo es tratada la información dentro de ese registro.

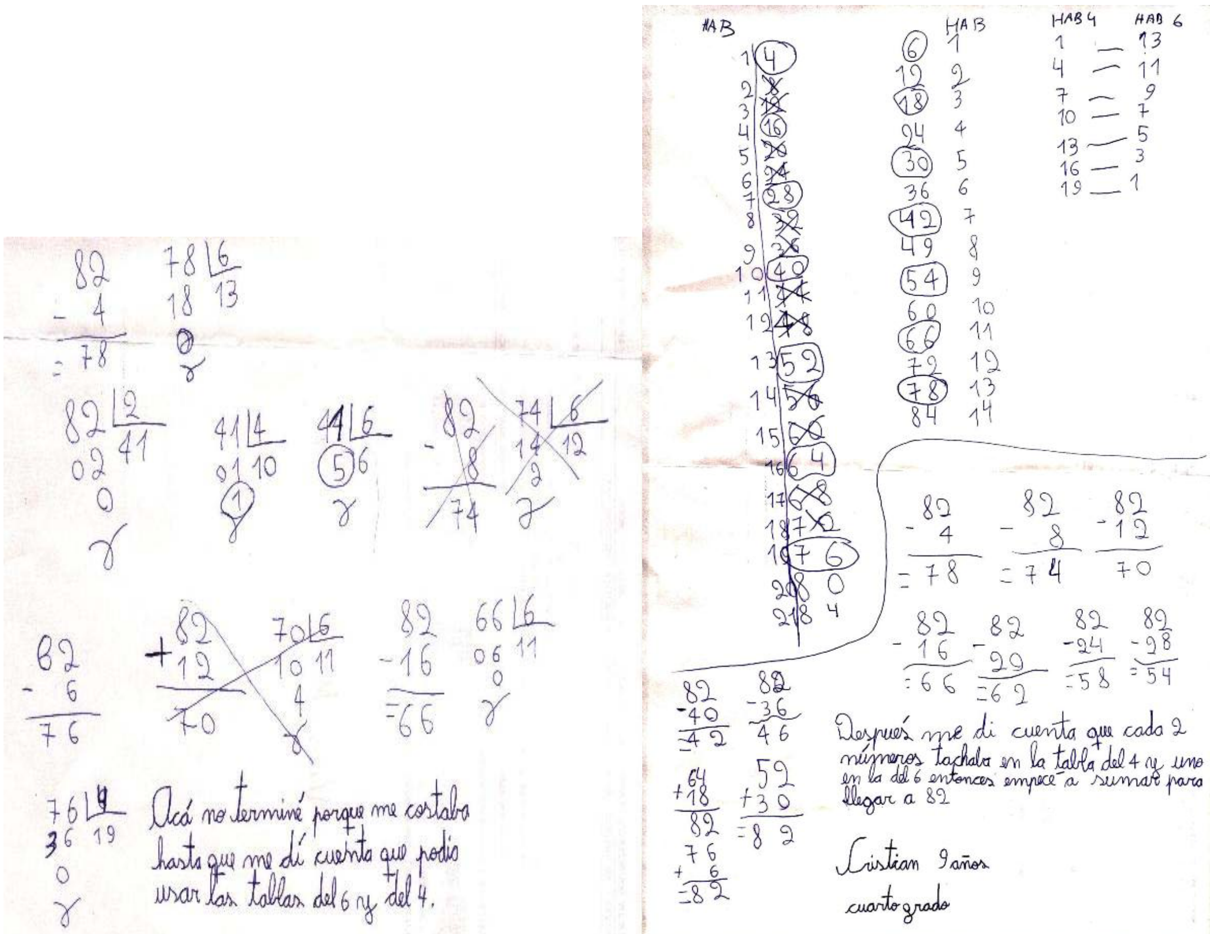


*Figura 4.* Producción del alumno Cristian de la Ciudad de Neuquén.

(Tiempo estimado: 20 minutos).

**5.-** Analizar, en conjunto entre todos los asistentes, producciones de alumnos de 1º grado, 3º grado, 7º grado de escuelas primarias y producciones de 3º año y 4º año de escuelas secundarias (estas producciones se presentarán en Power Point).

(Tiempo estimado: 20 minutos).

**6.-** Cierre del taller a partir de las experiencias, reflexiones y conclusiones surgidas en el encuentro, destacando cómo el tratamiento con dos o más variables y varias soluciones desde el comienzo de la escolaridad no sólo es posible, sino que muestra su fecundidad para el despliegue de procedimientos y representaciones espontáneas de los alumnos. De esta manera, el trabajo da elementos para concebir un tratamiento de la aritmética que favorezca la evolución del sentido de los conocimientos algebraicos, a diferencia del tratamiento tradicional caracterizado por la unicidad de variables y soluciones.

## Anexo 2

## Información general sobre el taller

| **Información general** | |
|---|---|
| Título del taller<br>Nombre del autor<br>Institución del autor<br>País del autor | Aprendizajes aritméticos que contemplan los futuros aprendizajes algebraicos |
| Número de horas más conveniente | 2 horas |
| Nivel educativo al que va dirigido el taller | Primaria, secundaria, terciaria |
| Número máximo de personas | 40 personas como máximo |
| Equipos audiovisuales requeridos | Proyector multimedia y pantalla para proyectar Presentación en Power Point. |