OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE SOBRE ISOMETRÍAS EN UNA REPRESENTACIÓN NO DINÁMICA

Opportunities to learn isometries in non-dynamic environment

Martín-Nieto, Marta[a] y Ruiz-López, Natalia[b].

[a]CES Don Bosco, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre la riqueza de una discusión en gran grupo con el uso de GeoGebra. Los participantes son estudiantes de Grado de Magisterio de Educación Primaria que dialogan sobre un problema relacionado con isometrías en una representación no dinámica. Se considera que una sistemática será rica si se detectan oportunidades de aprendizaje. La metodología es "investigación de diseño". Los datos se recogen a partir de la transcripción de videograbaciones y de la interpretación de cada una de las intervenciones. Se detectan 26 oportunidades de aprendizaje diferentes que clasificamos según la orientación de sus acciones. Varias parejas representan polígonos auxiliares para aplicar el carácter dinámico. La tecnología, la dinámica de participación y la orquestación influyen en la aparición de oportunidades de aprendizaje.

Palabras clave: oportunidad de aprendizaje, discusión en gran grupo, formación del profesorado, isometrías, representación no dinámica.

Abstract

This study analyses the richness of a whole group discussion using GeoGebra. The participants are students at the Primary School Teacher Training Degree who discuss a problem related to isometries in a non-dynamic representation. The discussion is rich if learning opportunities are detected. The methodology is "design research". Data are analysed from video recordings and interpretation on each of the interventions. Twenty-six different learning opportunities are detected and classified according to the orientation of their actions. Several pairs represented auxiliary polygons to apply the dynamism of GeoGebra. Technology, collaborative environment, and orchestration are essential for the emergence of learning opportunities.

Keywords: *opportunities to learn, whole group discussion, primary teachers, isometries, non-dynamic environment.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de las matemáticas muestra una fuerte preocupación sobre el estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático (Martín-Nieto y Ruiz López, 2022; Planas y Boukafri, 2019). Además, hay muchos trabajos sobre la adquisición de competencias geométricas en el grado de magisterio (Collazos-Delgado et al., 2023).

Esta investigación se encuadra dentro de un proyecto de tesis doctoral más amplio. Es una contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de movimientos rígidos en el plano a partir de discusiones en gran grupo con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra que se utiliza como herramienta para resolver problemas. Para la tesis se diseñaron cuatro problemas, tres de ellos de corte puramente geométrico y el cuarto de corte didáctico. El objetivo de esta

Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2023). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una representación no dinámica. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 355–362). SEIEM.

comunicación es ejemplificar la riqueza de una discusión en gran grupo de un problema sobre isometrías en un aula del Grado de Maestro en Educación Primaria.

MARCO TEÓRICO

La mayoría de las investigaciones sobre el papel de la interacción social en el aprendizaje de las matemáticas (Cobo, 1998; Molina, 2016; Planas y Boukafri, 2019) coincide en que el trabajo colaborativo entre alumnos es crucial (tanto en parejas como en discusiones en gran grupo) para construir el conocimiento. Algunas han identificado las condiciones para producir una interacción efectiva. Un rasgo común es que los alumnos trabajen conjuntamente en la resolución de problemas con autonomía. Además, Morera (2013) destaca la importancia de una buena anticipación que muestre que la tarea tiene posibilidades de tratar numerosos estadios.

El Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM) con sede en la Universitat Autònoma de Barcelona, afirma que el análisis de las interacciones de clase puede utilizarse para detectar obstáculos e interrupciones, pero también continuidades en la participación y oportunidades de aprendizaje (Planas y Boukafri, 2019). Entendemos por oportunidad de aprendizaje todas las situaciones que se dan en los procesos de resolución en las que a los alumnos se les presenta la posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, procedimentales o de gestión de conocimiento. Es decir, construir nuevas conexiones o relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que están trabajando. Se trata de situaciones donde el contraste entre diferentes interpretaciones de la resolución de un problema o de las normas de clase es aprovechado como hilo conductor de la discusión.

Partimos de la base de que consideraremos la aplicación de una sistemática potencialmente rica si tenemos evidencia de que se han dado oportunidades de aprendizaje matemático. Estas quedan definidas por las acciones que han intervenido en su creación y la explicación en cada caso de cómo la interacción de los participantes que han llevado a cabo las acciones ha generado la oportunidad. Así, una oportunidad de aprendizaje matemático es la combinación entre los contenidos del aprendizaje potencial y las acciones que propician la emergencia de esos contenidos (Morera, 2013). Morera et al. (2013) clasifican las oportunidades de aprendizaje en tres tipos, según la orientación de sus acciones:

a) Orientada a contenidos matemáticos específicos. Por ejemplo, dirigida a conocer el concepto eje de simetría.
b) Orientada a diferentes estrategias. Por ejemplo, enfocada a aprender a conjeturar.
c) Orientada a actividades de autorregulación. Por ejemplo, aprender que es importante justificar las respuestas a preguntas de corte matemático.

Martín-Nieto (2021) añade un tipo más que considera necesaria cuando los protagonistas son futuros profesores.

d) Orientadas a contenidos didácticos específicos. Por ejemplo, conocer fases en una discusión en gran grupo.

El estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático implica el de la construcción de normas de aula de matemáticas. La noción de norma sociomatemática (Yackel y Cobb, 1996) surge al observar que las teorías psicológicas del desarrollo humano no bastan para explicar el aprendizaje matemático en entornos de interacciones en clase. Se focalizan en aspectos normativos de las discusiones sobre temas matemáticos y son las que marcan qué se considera matemáticamente sofisticado, matemáticamente eficiente o matemáticamente elegante. Disponemos de resultados de experimentos donde se relaciona la construcción de normas sociomatemáticas como normas de clase y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático (Molina, 2016). Por otro lado, hay ejemplos que relacionan la generación de oportunidades de aprendizaje con la forma en la que el profesor ha preparado la discusión en gran grupo. Ferrer et al. (2014) exponen un caso en el que se generan más oportunidades de aprendizaje cuando la profesora prepara esquemas para la resolución y la gestión de la actividad. Además, define claramente los objetivos matemáticos de la tarea, plateándolos en el aula como introducción.

Se considera aprendizaje matemático cuando hay evidencias explícitas del aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje matemático. Según este criterio, lo importante es encontrar estudiantes que evidencien cambios en sus producciones (Morera, 2013). Puede ocurrir que las iteraciones sean productivas para algunos de los participantes (Kieran, 2001). Además, se puede dar el caso de que se produzca aprendizaje sin que se hayan detectado oportunidades explícitas. En estos casos, Cobo (1998) considera que el aprendizaje es debido a la reestructuración cognitiva producida como consecuencia de reflexiones no explícitas sobre los procesos de resolución o debidas a reflexiones individuales posteriores sobre los procesos de resolución.

METODOLOGÍA

La metodología, de naturaleza cualitativa, se encuentra dentro del paradigma "investigación de diseño" ('design research') con métodos interpretativos aplicados al análisis de datos de clase. Se planifican secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia que conlleva la detección de posibles mejoras en el diseño. La sistemática se fue re-adaptando durante tres cursos consecutivos, siendo aplicada a dos grupos por curso. El proceso de reflexión iterativa es el que permite re-adaptar el diseño inicial (Cobb et al., 2016).

Para este estudio nos fijaremos en los datos obtenidos en la última implementación de la secuencia (curso 2019-2020). El experimento tiene lugar en clase presencial durante noviembre de 2019. Los participantes son los 21 estudiantes de 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria (modalidad bilingüe) del Centro de Estudios Superiores Don Bosco (Centro Adscrito a la Universidad Complutense de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora que dirige el taller es a su vez la investigadora principal. Además, tiene relación con los participantes del estudio, ya que es la profesora de la asignatura.

La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas, los tres primeros sobre contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano y el último de corte didáctico. Aquí expondremos el análisis de la riqueza de la discusión en gran grupo del problema 3. El enunciado es el siguiente:

En la figura siguiente se muestra un fragmento de un recubrimiento del plano, elaborado por M.C. Escher.

Se han marcado tres peces con las letras F, G, H.

a) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con G?*

b) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con H?*

c) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir H con G?*

En cada uno de los apartados:

i. *Explicad, en un cuadro de texto, cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*

ii. *Construid los elementos esenciales del movimiento (centro, vector o eje).*

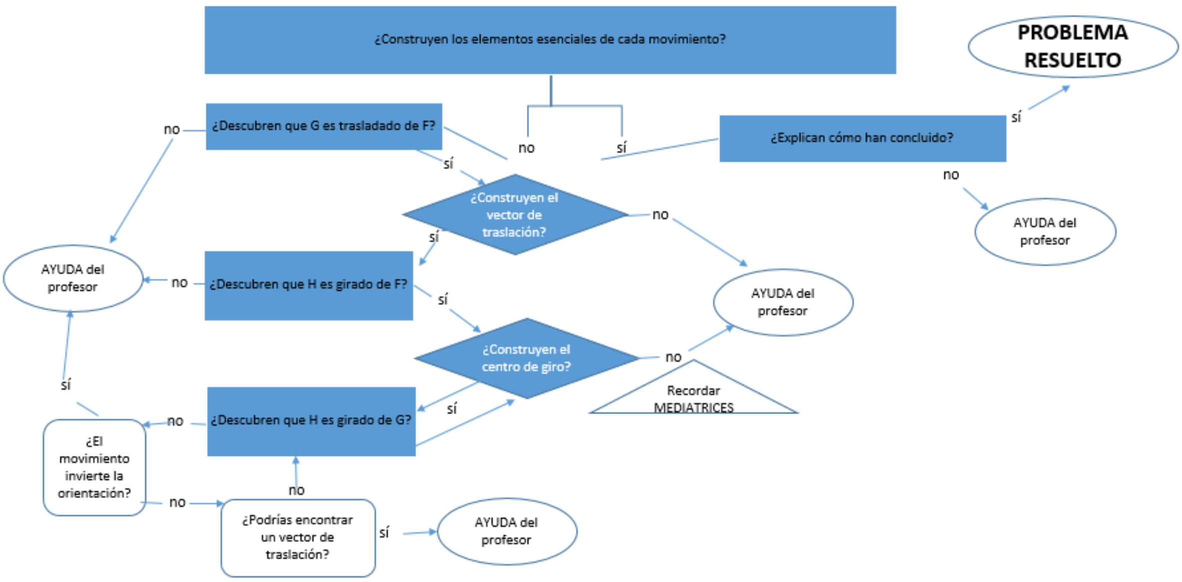
Figura 1. Fragmento de recubrimiento del plano

(Escher, 1955)

El objetivo es la identificación visual de las isometrías en una representación no dinámica y la construcción de los elementos esenciales. Para la resolución del problema inmediatamente anterior en la secuencia, los alumnos pueden arrastrar por la pantalla los elementos libres en la construcción geométrica y observar los invariantes que se producen. En este caso deben buscar nuevas estrategias.

Para llevar a cabo la fase de anticipación de una forma sistemática, para cada problema se crea un instrumento que llamaremos *árbol del problema*. Consiste en una estructura esquemática, en forma de árbol en el que las ramas muestran las diferentes estrategias que el alumno podrá seguir para la resolución del problema (Morera, 2013). Es un sistema dinámico que se actualiza tras cada intervención. El objetivo de este instrumento no es únicamente contenedor de las diferentes estrategias de resolución en un espacio reducido, si no también sirve para dar indicaciones al alumno. En todo momento, la docente sigue su estructura haciendo conscientes a los alumnos de su uso. Debido al tamaño del grupo la tarea de orquestación puede resultar complicada, pero es capaz de situar rápidamente en qué posición del árbol se encuentran, así no pierde mucho tiempo en interpretar los pasos que han dado en la resolución y puede, en cambio, elegir minuciosamente el tipo de mensajes que dar.

Figura 2. Árbol del problema



La aplicación de esta actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera, los estudiantes trabajan en parejas, que formaron por afinidades personales, y la profesora monitoriza. En la segunda, tiene lugar la discusión en gran grupo anclada en una solución que la profesora selecciona previamente. La pareja que ha elaborado la solución utiliza la pizarra digital interactiva para presentar su trabajo y responder a cuestiones planteadas por el resto de participantes y por la profesora. Según los tipos de orquestación de Drijvers et al. (2010) esta pareja realiza el *trabajo del sherpa*.

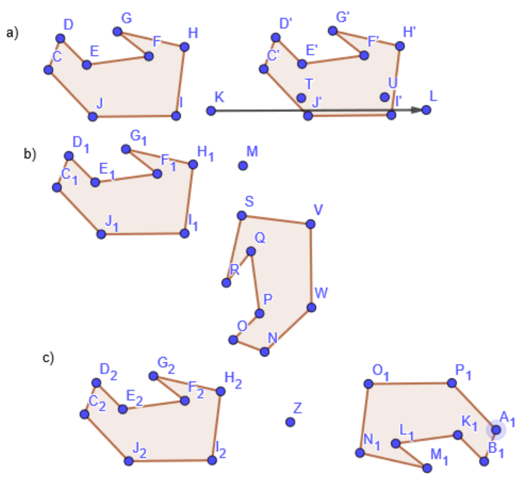
Según Smith et al. (2018) la monitorización del trabajo de los alumnos en parejas y la selección de una solución son fases de discusiones de gran grupo efectiva. Monitorizar es más que observar y escuchar a los alumnos mientras utilizan sus propias estrategias en el trabajo de resolución de un problema. Durante esta fase, la profesora hace preguntas para conseguir centrar la atención en ciertos aspectos del problema, para ayudar a clarificar ideas y para cerciorarse de que ambos integrantes de la pareja están implicados en la resolución. Después de haber monitorizado a los estudiantes y habiendo detectado las estrategias generadas, la profesora revisa los documentos presentados a través de la plataforma virtual. En base a la información que ha obtenido selecciona a estudiantes para que compartan su trabajo con el resto del grupo, y así tiene el control sobre la discusión. En el caso del problema 3 selecciona a una pareja que ha identificado la traslación y el giro de F a H. Además, ha encontrado el vector de traslación y el eje de simetría, pero no el centro de giro de H a G. Se trata de una situación que se ha repetido en muchas parejas. Para resolver esta última parte, se ofrece una pareja voluntaria para explicar su solución en la pizarra.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Tras la transcripción de las vídeograbaciones y el análisis de cada una de las intervenciones, se estructura el problema en trece episodios según la orquestación y estadios de la discusión (Morera et al, 2013). La serie tiene significado en su globalidad y consideramos que es necesaria una mirada a posteriori ya que en el análisis en profundidad de cada episodio el foco es demasiado concreto.

En el episodio 1, la profesora sitúa el problema, recuerda el enunciado, los objetivos y la anticipación, proyectando el árbol del problema. Después, invita a una pareja a salir a la pizarra. En el siguiente episodio comienza la presentación de la solución. Las alumnas han utilizado lo que llamamos “polígonos auxiliares” sobre los que pueden aplicar el dinamismo de GeoGebra. Aunque uno de los objetivos del problema era que las estudiantes buscaran nuevas estrategias diferentes a las del problema anterior para la identificación de movimientos rígidos, varias parejas recurrieron a la construcción de polígonos fuera de la imagen como apoyo visual.

Figura 2. Ejemplo de polígonos auxiliares construidos por una pareja



En el episodio 3 las parejas presentan una estrategia para encontrar el vector de traslación. Luego, la profesora pregunta por otros procedimientos. La discusión va más allá de los objetivos planteados y de lo que pide el enunciado, conectando con “ángulo de giro” en los episodios 4 y 6 cuando se tratan temas relacionados con el centro de giro.

En los episodios 5 y 10 se estudia un caso particular de giro: el centro se encuentra en la frontera de la figura a girar. En este caso, hay un punto que coincide con su homólogo. Por su parte, en el episodio 7 la pareja expone cómo ha encontrado el centro de giro cuando ningún punto de la figura coincide con su homólogo en la representación no dinámica. En el episodio 8, la profesora conecta lo sucedido en el episodio anterior con un resultado que desarrollará en los siguientes: la composición de un giro y una traslación es un giro. La profesora había observado durante la monitorización del trabajo en parejas que en varios casos habían tenido dificultades para ver el movimiento como un giro, viéndolo como composición de giro y traslación.

En el episodio 9 la profesora invita a otra pareja a participar, así el grupo conecta con otra solución al problema que se desarrollará durante los episodios 10 y 11. Estudian un caso particular y el genérico que ya se habían resuelto en los episodios 7 y 11.

La profesora tiene el protagonismo durante los episodios 12 y 13. Generaliza los resultados que han surgido durante la discusión y recapitula, recurriendo además a conclusiones a las que se había llegado en los problemas anteriores.

Consideramos el problema potencialmente “rico” desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje porque observamos 26 oportunidades de aprendizaje diferentes que clasificamos atendiendo a su naturaleza.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

1. Recordar la definición de isometría
2. Recordar las características de traslación, giro y simetría
3. Repasar los elementos que definen un vector
4. Repasar la noción de módulo
5. Repasar la noción dirección
6. Repasar la noción de sentido
7. Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro.
8. Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro.
9. Revisar la noción de sentido del giro
10. Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro
11. Recordar que la composición de simetría y traslación, de vector no perpendicular al eje de simetría genera una simetría deslizante. Aunque estos movimientos no sean conmutativos, traslación y simetría también generan simetría deslizante
12. Recordar que, si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría.
13. Recordar las características de un giro
14. Aprender que giro y traslación no son movimientos conmutativos pero su composición en un orden u otro genera un nuevo giro

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

15. Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.
16. Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.
17. Aprender a conjeturar
18. Aprender a argumentar matemáticamente.

19. Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio
20. Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre
21. Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos

Oportunidades de autorregulación

22. Aprender la importancia de participar en clase
23. Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos
24. Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado
25. Aprender la importancia de hacer conexiones con otras cuestiones.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

26. Recordar qué es el árbol del problema y para qué se utiliza

Señalamos que algunas oportunidades de aprendizaje se repiten en más de una ocasión: La oportunidad 7 se repite en tres ocasiones mientras que las siguientes se repiten dos veces: 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 19, 23 y 24

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Consideramos el problema potencialmente rico por el número de oportunidades de aprendizaje distintas que se detectan. Sin embargo, el concepto de riqueza del problema no es intrínseco al propio problema, sino que va acompañado de su gestión en el entorno de enseñanza-aprendizaje, tanto por parte de la profesora como del grupo clase. Tras considerar el problema como rico, cabe preguntarse qué factores han podido influir en esa riqueza.

Como Morera (2013) hemos observado que una buena anticipación del problema influye en la riqueza en cuanto a oportunidades de aprendizaje. Para el diseño e implementación de nuevas secuencias didácticas que involucren el uso de la tecnología y las discusiones en gran grupo, sugerimos algunas recomendaciones tras nuestra experiencia. La anticipación es fundamental y recomendamos diseñar un árbol del problema que sirve inicialmente para plasmar el esquema mental que tiene el docente en la cabeza. Consideramos que este instrumento debe servir como guion inicial tanto en la monitorización durante el trabajo en ordenador, como en el desarrollo de las discusiones. Predecir todas las actuaciones de los alumnos resulta imposible, por lo que no puede ser un guion cerrado y el profesor debe tener capacidad de adaptación a las intervenciones. Debe favorecer que los alumnos sean el centro de la actividad docente y capaces de construir su propio aprendizaje.

La tecnología y la dinámica de participación de los estudiantes también repercute en la aparición de oportunidades y la orquestación de la profesora es fundamental para el equilibrio de estos factores que influyen en la riqueza del problema. En futuros talleres que involucren tecnología y trabajo colaborativo, consideramos que, durante el trabajo en parejas previo a la discusión en gran grupo, el profesor debe permanecer atento a las diferentes actuaciones de los alumnos, teniendo presente la anticipación del problema y los contenidos que se quieren abordar. Después, se deben seleccionar situaciones que ayuden a encaminar la discusión hacia los objetivos que se han propuesto durante el diseño de la tarea. La discusión debe orquestarse bajo el andamiaje de la solución seleccionada para ser expuesta y de las intervenciones de los participantes.

Consideramos que hay aprendizaje matemático cuando hay evidencias explícitas de aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje. En la tesis doctoral en el que se encuadra el análisis del problema que se ha discutido aquí mostramos evidencias de aprovechamiento de alguna de estas oportunidades de aprendizaje.

Referencias

Cobb, P., Jackson, K., y Dumlap, C. (2016). Design Research: An Analisis and Critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3r ed., pp. 481-503). Routledge.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. Recuperado de https://www.tdx.cat/handle/10803/4716

Collazos-Delgado, A. A., González-Rincón, Y. M., y Monroy-Fonseca, M. N. (2023). Desarrollo del pensamiento geométrico a través de una secuencia didáctica apoyada con el uso de la herramienta GeoGebra. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *7*(1), 3433-3459.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool : instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Escher, M.C. (1955) *Symmetry Watercolor 96 Fish.*

Ferrer, M., Fortuny, J. M., & Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias,* 32(3), 385-405. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1231

Kieran, C. (2001) The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 187–228. https://doi.org/10.1023/A:1014040725558

Martín-Nieto, M. (2021). *Estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el us ode la tecnología en futuros maestros de Educación Primaria.* [Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid] Repositorio institucional de la Universidad Autónoma de Madrid https://repositorio.uam.es/handle/10486/697259?locale-attribute=es

Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2022). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una discusión en gran grupo con GeoGebra. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXV (pp. 383-390). SEIEM. Recuperado de https://www.seiem.es/docs/actas/25/Comunicaciones/383.pdf

Molina, O. (2016). Interacción en un aula de geometría: construcción colectiva y escritura autónoma de una demostración. En E. Soledad, G. Manual, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena, E.Montoya, A. Morales, M.Parraguez, E. Ramos, P. Vázquez y D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 117–121). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/15023/1/Molina2016Interaccion.pdf

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y d el aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2013/hdl_10803_116213/lmu1de1.pdf

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). *Design and Validation of a Tool for the Analysis of Whole Group Discussions in the Mathematics Classroom.* En Ç.M. Behiye Ubuz y A. Mariotti (Eds.). *Procedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1506– 1515). Recuperado de https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Planas, N. y Boukafri, K. (2019). *Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático.* Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02024105

Smith, M. S., y Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. CORWN

Yackel, E, y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877