XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas

Lourdes de la Rosa **Onuchic**
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho
Brasil
lonuchic@vivax.com.br
Norma Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
norma.allevato@cruzeirodosul.edu.br

Resumo

O ensino e a aprendizagem da Álgebra foi e continua sendo tema de diversos trabalhos de pesquisa e de orientação pedagógica, visando a esclarecer e ajudar os professores em suas dificuldades com o trabalho deste conteúdo em aula de Matemática. O presente minicurso tem como objetivos estudar e analisar as possibilidades e potencialidades da resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem da Álgebra, bem como refletir sobre as diferentes concepções da Álgebra no trabalho em sala de aula. É destinado a professores em formação e em exercício do Ensino Fundamental e do Ensino Médio; alunos de Licenciatura em Matemática; e pesquisadores da área de Educação Matemática. As atividades serão desenvolvidas seguindo os princípios da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Palavras chave: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Álgebra, Ensino e Aprendizagem.

Matemática na educação matemática

Como uma matéria prática, a Matemática é uma ciência de padrão e ordem, revelando padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Como uma ciência de objetos abstratos, a Matemática conta mais com a lógica do que com a observação como seu padrão de verdade, embora ainda empregue observação, simulação e mesmo experimentação como meios para descobrir a verdade. O papel especial da Matemática na Educação é uma consequência de sua aplicabilidade universal.

A Educação Matemática, por sua vez, tendo início como campo de estudos sistemáticos com Felix Klein, no início do século XX, tornou-se, ao final dele, um vasto e intricado empreendimento. Felix Klein foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX e, junto com Gauss, Riemann e Poincaré, forneceu os elementos fundamentais que impulsionariam a Matemática do século XIX e início do século XX. Escreveu, então, seu livro *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Avançado*[1] (Klein, 1945)[2].

Klein acreditava que a unidade de todo o conhecimento e o ideal de uma educação completa não poderia ser negligenciada por causa dos estudos especializados e que as universidades deveriam se preocupar com o ensino preparatório nas escolas, dando particular ênfase à formação dos professores. Ele foi, portanto, um matemático brilhante que também teve sinceras e sérias preocupações com as questões relacionadas ao ensino.

Nessa época, o ensino de Matemática era caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, deviam entender o que faziam.

Começou-se, então, a falar em resolver problemas. George Polya (1944) surge como uma referência enfatizando a importância da descoberta e a de levar o aluno a pensar por meio da resolução de problemas. Em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*[3], afirma: “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”. Em 1949, escreveu que resolver problemas é realização específica da inteligência e que se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência ela está obviamente incompleta.

Allevato e Onuchic (2009) relatam que, nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática, no Brasil e em outros países do mundo, foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores, apresentava uma Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. O ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas.

Concomitante a isso, no início da década de 1970, tiveram início investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares. A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. No fim dos anos 1970, a resolução de problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro. Em 1976, no *3º Congresso Internacional de Educação Matemática*[4], em Karlsruhe, Alemanha, a Resolução de Problemas se constituiu num dos temas de trabalho para o congresso.

---

[1] Tradução de *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.*
[2] A obra original foi escrita em alemão, no ano de 1908.
[3] O título original, em inglês, é *How to Solve it.*
[4] Tradução de *3rd International Congress on Mathematical Education.*

Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material ajudou os professores a fazer da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

Nessa importante década de 1980, também as dificuldades encontradas por professores para "ensinar" e as dos alunos para "aprender" passaram a ser consideradas como objetos de estudo e de reconceitualização por educadores e pesquisadores na Educação Matemática. Entretanto, havia linhas de pesquisa diferentes defendidas por eles.

Percebendo a falta de concordância entre as diferentes concepções sobre a resolução de problemas no contexto da matemática escolar, Schroeder e Lester (1989) apresentaram três caminhos para abordar resolução de problemas: teorizar **sobre** resolução de problemas; ensinar Matemática **para** resolver problemas; e ensinar Matemática **através** da resolução de problemas. O professor que ensina **sobre** resolução de problemas procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar **para** resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Nessa visão, a proposta essencial para aprender Matemática é a de ser capaz de usá-la. Mas, ao final da década de 1980, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos, e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Ela passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática.

A Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, se torna o lema das pesquisas e estudos em Resolução de Problemas para os anos 1990. Essa nova visão de ensino-aprendizagem de Matemática se apóia especialmente nos estudos desenvolvidos pelo NCTM, que culminaram com a publicação dos *Standards 2000,* oficialmente chamados *Principles and Standards in School Mathematics* (NCTM, 2000).

Nesse documento são assumidos os seguintes Princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Como Padrões de Conteúdo, que respondem à questão "O quê (ensinar)?", apresentam Número e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade. Para os Padrões de Procedimento, que respondem à questão "Como (ensinar)?", são apontados Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação.

Esse movimento de reforma na Educação Matemática, vigente até hoje, aponta para a Resolução de Problemas como primeiro padrão de procedimento para o trabalho com os padrões de conteúdo, sendo que o ensino de Matemática através da resolução de problemas é nele fortemente recomendado.

O ensino de matemática na sala de aula

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas

Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a construção de novo conhecimento faz-se através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Uma proposta atual consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da "matemática nova" que se quer trabalhar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de idéias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para participarem da discussão dessas diferentes resoluções, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.

O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

> Nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. (Allevato & Onuchic, 2009, p.140-141)

O padrão de conteúdo número e operações trabalhado através do padrão de procedimento resolução de problemas

A Aritmética é definida como o ramo da Matemática que trabalha sobre números, relacionando-os, definindo operações sobre eles, estabelecendo propriedades sobre elas e fazendo aplicações. O estudo da Aritmética, ensino e aprendizagem, constitui-se como básico no Ensino Fundamental I, alunos de 1º ano ao 5º ano.[5]

Considerando as quatro operações fundamentais da Aritmética, há consenso sobre a necessidade de refletir sobre a reconceitualização de números e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. A natureza do número, em suas diferentes operações, muda enquanto nos movemos de adicionar e subtrair para multiplicar e dividir números inteiros e, mais ainda, quando passamos das operações com inteiros para as operações com números racionais.

Em um trabalho abordando esses aspectos, Onuchic e Botta (1998) apresentam uma variedade de situações e problemas, envolvendo as quatro operações, em que é destacado que

> A adição pode estar relacionada às ideias de "mudar adicionando", de "combinar fisicamente" e de "combinar conceitualmente". Os problemas de subtração podem se apresentar com três espíritos distintos: o "mudar subtraindo", o "igualar" e o "comparar". Os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de "grupos iguais", de "comparação multiplicativa", de "produto cartesiano" e de "área". Finalmente, os problemas de divisão modelam tipos diferentes de divisão: a "divisão

[5] Atualmente o Ensino Básico, no Brasil, está estruturado de modo que o Ensino Fundamental I abrange do 1º ao 5º anos; o Ensino Fundamental II, do 6º ao 9º anos; e o Ensino Médio inclui as 1ª, 2ª e 3ª séries.

> partitiva", a "divisão quotitiva" e a "divisão cartesiana". Toda essa complexidade de ideias dificulta a compreensão, na criança, dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, pois a ela são colocadas situações-problema com "espíritos operatórios diferentes", mas que são resolvidos por um mesmo algoritmo (p.19-20)

Dada essa complexidade, é preciso que o trabalho com Aritmética considere essas diferentes ideias a fim de que se constitua numa base sólida para o estudo da Álgebra. E, vale ressaltar, que também e especialmente a Álgebra deve ser abordada respeitando-se suas diferentes concepções.

O padrão de conteúdo álgebra trabalhado através do padrão de procedimento resolução de problemas

É essencial que os alunos do Ensino Fundamental II explorem conceitos algébricos de um modo informal para construir uma fundamentação para o estudo formal subsequente da Álgebra. A perspectiva para fazer isso é considerar um trabalho de Pré-álgebra, que é a transição da Aritmética para a Álgebra. Infelizmente, a maioria dos cursos de Álgebra começam, logo de início, com o uso de letras como objetos matemáticos e depois prosseguem com as operações que podem ser feitas com esses objetos. Ligações entre o uso de números, em Aritmética, e o uso de letras, na Álgebra, são raramente abordados quando se passa a estudar Álgebra regularmente. Em geral, não se dá aos estudantes a oportunidade de construir conexões explícitas entre esses dois domínios. Assim, deve-se considerar como pré-algébrica aquela área da aprendizagem matemática na qual os estudantes constroem sua álgebra a partir de sua aritmética, isto é, a construir significado para os símbolos e as operações da Álgebra em termos do seu conhecimento de Aritmética.

Da mesma forma como definimos Aritmética, como se poderia definir Álgebra?

A Álgebra dos Ensinos Fundamental e Médio têm a ver com a compreensão do significado das letras e das operações com elas, se considerarmos que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. Mas, como o conceito de variável é multiface, a redução da Álgebra ao estudo das variáveis não responde à pergunta: O que é a Álgebra da Matemática Escolar.

As diferentes concepções da Álgebra relacionam-se com os diferentes usos das variáveis. Assim, em resumo, ela pode ser concebida, para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, como: aritmética generalizada (generalizando modelos); meio de resolver problemas (incógnitas ou constantes para resolver e simplificar o problema); estudo de relações (argumentos e parâmetros para relacionar ou fazer gráficos); e como estrutura (sinais arbitrários no papel para manipular e justificar) (Usiskin, 1988/1995).

Proposta do mini-curso

Objetivos

Estudar e analisar as possibilidades e potencialidades da resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Estudar e refletir sobre as diferentes concepções da Álgebra no trabalho em sala de aula de Matemática.

Público-alvo

Professores em formação e em exercício do Ensino Fundamental e do Ensino Médio; alunos de Licenciatura em Matemática; pesquisadores da área de Educação Matemática.

Duração

3 horas

Atividades

Por que é tão difícil aprender Álgebra? O que acontece com esse assunto que a maioria dos alunos acha tão desafiador? Essas questões se apresentam aos professores de Matemática logo que eles chegam na sala de aula. À medida em que os professores ganham experiência em sua prática, novas questões emergem. Quais são e como relacionar os aspectos que, muitas vezes, são abordados de forma fragmentada, incompleta e imperfeita em um curso de Álgebra? O que faz com que essas particulares partes desse trabalho tão difíceis? O que poderia ajudar os estudantes a superar essas dificuldades?

Neste minicurso pretende-se trabalhar alguns desses pontos de dificuldade, através da resolução de problemas. O trabalho é apoiado no artigo de Saul (2008), *Álgebra: a Matemática e a Pedagogia*.

O que é difícil na álgebra?

O artigo de Saul (2008) preocupa-se com o modo de analisar algumas das dificuldades próprias da Álgebra a partir desse conteúdo. O trabalho descrito pelo autor é um resultado de discussão colaborativa entre professores, pesquisadores em Educação Matemática e matemáticos. Um dos temas é a força trazida para os problemas de Educação quando três pontos de vista – dos professores, dos pesquisadores e dos matemáticos – são combinados.

Com relação ao conteúdo matemático pode-se distinguir três modos de olhar para o fenômeno da Álgebra: como uma generalização da Aritmética, como o estudo de operações binárias e como o estudo do campo das expressões racionais e campos relacionados. A análise é de conteúdo, mas a utilidade deste modo em descrever o conteúdo surge no trabalho de sala de aula. Examinar o conteúdo deste modo pode explicar algumas dificuldades que os alunos têm com a Álgebra e ajudam-nos a resolvê-los.

Tabela 1

O que não é Álgebra

Andrei é um estudante mediano começando o 7º Ano. Ele pode resolver equações lineares simples como 2x – 3 = 17. Ele faz isso substituindo a variável por diferentes valores até achar aquele que funciona. Ele sabe que 4 é muito pequeno porque 2.4 – 3 é somente 5, e ele quer 17. Ele sabe que 30 é muito grande porque 2.30 – 3 = 57, e ele quer somente 17. Dando a x valores maiores ou menores, Andrei rapidamente chega a uma solução. Ele pode reconhecer quando chegou na solução. Mas Andrei não pode resolver a equação 2,3x – 3,02 = 17,83 do mesmo modo. Ele não pode nem mesmo resolver 3x – 3 = 17 do mesmo modo. Entretanto, dado um número, ele pode dizer se ele é ou não é uma solução para alguma dessas equações.

Questionamentos e reflexões:

Será solicitado aos participantes do minicurso que procurem entender o que aconteceu com Andrei. Será que, como professores, puderam viver situações semelhantes? Como, analisando o ocorrido, poderiam justificar porque, apesar de Andrei ter resolvido a primeira situação, não resolveu a segunda do mesmo modo? Será que, como professores, tiveram oportunidade de viver com alunos de séries mais avançadas problemas semelhantes? O que esse episódio significa em termos de ensino e aprendizagem da Álgebra?

Tabela 2

Um primeiro marco: a Álgebra como Aritmética Generalizada

Bob é um aluno bem sucedido, do 8º ano, na Álgebra do ensino fundamental. Ele não tem dificuldade em fatorar a diferença de dois quadrados e pode fazer os exercícios seguintes rotineiramente:

$$4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$$
$$9 - b^4 = (3 + b^2)(3 - b^2)$$
$$n^4 - 16 = (n^2 + 4)(n^2 - 4) = (n^2 + 4)(n + 2)(n - 2)$$

Com algumas dicas, ele pode mesmo fatorar $(g - h)$ como

$$(\sqrt{g} + \sqrt{h})(\sqrt{g} - \sqrt{h})$$

Mas, se pedíssemos a ele para fatorar 4899 ele não perceberia que este número é $70^2 - 1$ e não poderia usar isso para fatorar o número pedido, mesmo quando seu professor lhe mostrasse que 4899 = 4900 – 1. Em vez disso, Bob via que o número dado era um múltiplo de 3, mas não de 5. Ele então testaria 7, 11, etc, para identificar os fatores primos de 4899.

Questionamentos e reflexões:

Inicialmente as questões resolvidas por Bob serão propostas aos participantes do minicurso. Pretende-se discutir suas resoluções e perguntar: porque é importante fatorar? O que se ganha com isso? Que aspecto prático importante decorre desse processo? Então, o episódio vivido por Bob será apresentado aos participantes e será solicitada uma análise investigativa sob a perspectiva do ensino e da aprendizagem da Álgebra em sala de aula.

Tabela 3

Um segundo marco: a Álgebra como o estudo de relações binárias entre conjuntos

Cathy, no 8º ano, resolve equações por caminhos que o Andrei não sabia percorrer. Ela vê as seguintes equações como do mesmo tipo:

$2x + 3 = 10$ $\quad 3x - 1 = 10$ $\quad 4{,}2x + 4{,}5 = 6{,}7$

$\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ $\quad 12 = 2x - 3$

Cathy pode subtrair 3 de ambos os lados de uma equação e pode dividir os dois lados por $\frac{3}{4}$, mas ela não pode usar essas técnicas para resolver uma equação como $3x - 2 = 5x + 18$. Ela também não pode "testar números" para esta equação, porque não há número alvo para procurar.

Questionamentos e reflexões:

Inicialmente as questões resolvidas por Cathy serão propostas aos participantes do minicurso. Pretende-se discutir suas resoluções e solicitar aos participantes que identifiquem em que a última equação apresentada no episódio é diferente das demais? Como os estudantes costumam reagir (procedimentos, dificuldades) frente a essas equações? Você, como professor, sabe identificar, no aluno, essas dificuldades e ajudá-los a superá-las? O que esses aspectos significam no contexto do ensino e da aprendizagem da Álgebra? Qual é o significado de "sinal de igualdade" e qual é o papel desse sinal nas equações algébricas?

Tabela 4

Um terceiro marco: a álgebra pela própria álgebra

Dina é uma estudante mediana, do 1º ano, na Álgebra do ensino médio, uma aluna cuja educação é o "pão com manteiga" do professor de Álgebra. Ela dominava a fatoração de trinômios e está estudando o "caso especial" da diferença de dois quadrados. Ela conhece bem a identidade $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e tem resolvido a multiplicação e a correspondente fatoração inúmeras vezes, mas ela está "lutando" com fatoração de expressões como $4a^2 - 9b^2$, $25c^2 - 1$ e $4 - d^2$, embora ela reconheça 1 como um quadrado perfeito. Ela tem ainda mais dificuldade com $\frac{e^2}{4} - 9f^2$ porque ela não estava acostumada a tratar frações como quadrados perfeitos.

Elizabete pode resolver todos os problemas que são difíceis para Dina, mas quando lhe é dada a expressão $(e + f)^2 - 4$ para fatorar, ela se atrapalha. Elizabete não está segura de que fatorar essa expressão tenha significado. E ela está surpresa com

$$(\sqrt{g} + \sqrt{h})(\sqrt{g} - \sqrt{h}) = g - h$$

Então, de fato, ela não pensaria em fatorar $g - h$ dessa maneira.

Froim está se saindo bem em Álgebra Intermediária. Ele sabe, de fato, como fatorar $a^2 - b^2$, mas quando ele estuda as identidades trigonométricas, tem dificuldade com $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$. Em um dos livros de revisão, o professor de Froim encontrou exercícios semelhantes de fatoração algébrica e expressões trigonométricas. Froim trabalhou neles, aprendendo a explorar as semelhanças.

Gabe pertence ao "time" de matemática da escola. Ele sabe que $x+\frac{1}{x}$ é uma função que tem seu mínimo (sobre os reais positivos) quando x = 1. Ele sabe isso, não a partir do cálculo, mas a partir da desigualdade que envolve a média aritmética e a média geométrica

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$$

para números positivos A, B, valendo a igualdade quando A = B. Fazendo A = x, $B=\frac{1}{x}$, nós obtemos $x+\frac{1}{x} \geq 2$, com a igualdade ocorrendo quando $x=\frac{1}{x}=1$. Aqui estão algumas funções sobre as quais Gabe tem que pensar. Cada uma delas se refere a uma função de um número real positivo x e Gabe deve minimizar cada função:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}$$

$$\text{tg } x + \cot x$$

$$\log_a x + \log_x a$$

Sentado perto de Gabe no "time" de matemática está Harriet, que sabe que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, mas está "lutando" para fatorar $x^6 + y^6$.

Em termos matemáticos, num estudo mais atual, podemos dizer que a Aritmética é, basicamente, o estudo do campo dos números racionais. A Álgebra, entretanto, começa com um estudo do campo das expressões racionais.

Questionamentos e reflexões:

Como, nos episódios envolvendo Dina, Elizabete, Froim, Gabe e Harriet, isso se mostra? Essas reflexões sobre Aritmética e Álgebra, alguma vez foram estimuladas em sua vida escolar? Ter conhecimento dessas ideias pode levá-los a uma forma diferenciada de ensinar Álgebra?

Finalização

Avaliação do minicurso com todos os participantes.

Referências

Allevato, N. S. G. & Onuchic, L. R. (2009). Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. *Boletim GEPEM*, *55*, 133-154.

Klein, F. (1945). *Elementary mathematics from an advanced standpoint. arithmetic, algebra, analysis*.Tradução por Hedrick, E. R. & Noble, C. A. New York: Dover Publications.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. *Proceedings of the National council of teachers of mathematics*. Reston.

Onuchic, L. R., & Botta, L. (1998). Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. *Revista de Educação Matemática - SBEM*, *4*, 19-26.

Polya, G. (1944). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Saul, M. (2008). Algebra: The mathematics and the pedagogyin.In: Greenes, C. E. & Rubenstein, R. (Ed) Algebra and algebraic thinking in school mathematics. 70th yearbook. *Proceedings of the NCTM,* Reston,(pp. 63-80).

Schroeder, T.L., & Lester, J. F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving.In: Trafton, P. R. & Schulte, A. P.(Ed) New Directions for Elementary School Mathematics. *Proceedings of the NCTM*- Reston (pp. 31-42).

Usiskin, Z. (1988). *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis*.In: Coxford, A. F.; Shulte, A.P. (Orgs). Tradução: Hygino, H. D. (1995). As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, p. 9-22.