LA COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE UNA DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA

The semiotic complexity of a proof by mathematical induction

Milanesio, B.[a] y Markiewicz, M. E.[b]

[a] Universidad de Granada, [b] Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo poner en evidencia la complejidad semiótica de una demostración de una proposición matemática realizada utilizando el principio de inducción matemática. Para ello, utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico, que nos permiten analizar las funciones semióticas que se deben poner a funcionar para comprender una demostración por inducción que se propone en un libro de texto de nivel universitario. Esto hace posible también poner en evidencia conflictos semióticos potenciales que pueden constituirse en explicaciones a posibles dificultades del estudiantado en la comprensión y la realización de este tipo de demostración.

Palabras clave: *funciones semióticas, demostración. principio de inducción, conflictos semióticos.*

Abstract

This paper aims to highlight the semiotic complexity of a proof of a mathematical proposition made using the principle of mathematical induction. To do this, we use tools from the Ontosemiotic Approach, which allow us to analyze the semiotic functions that must be put into operation to understand a demonstration by induction that is proposed in a university level textbook. This also makes it possible to highlight potential semiotic conflicts that can become explanations for possible difficulties of students in understanding and carrying out this type of demonstration.

Keywords: *semiotic functions, demonstration, principle of induction, semiotic conflicts.*

INTRODUCCIÓN

Desde el primer año del nivel universitario en diversas carreras de grado, particularmente, en el Profesorado en Matemática, se espera y se pretende que el estudiantado pueda comprender y realizar demostraciones matemáticas, en particular, demostraciones utilizando el principio de inducción matemática (PIM). Este tipo de demostración deductiva reviste una importancia fundamental dado que permite probar que una propiedad matemática es verdadera para todos los números naturales.

Sin embargo, como docentes de la asignatura Matemática Discreta, correspondiente al primer año de la Universidad Nacional de Rio Cuarto, Argentina, hemos podido constatar muchas dificultades que presentan los estudiantes para comprender y realizar este tipo de demostraciones. Tal como reconoce Gómez-Chacón (2009), la inducción matemática generalmente es un método de demostración desconocido por estos estudiantes universitarios, lo cual implica mayor preocupación ante su enseñanza y aprendizaje.

Las mencionadas dificultades también son reconocidas por otros investigadores en Didáctica de la Matemática (Crespo-Crespo, 2016; Nieves-Pupo et al., 2019; Ron y Dreyfus, 2004; Stylianides, 2007). Estos autores plantean que la comprensión significativa del método de demostración por inducción es un proceso complejo que involucra: la comprensión de la estructura de la demostración por inducción, la comprensión del paso base y del paso de inducción y la operatoria algebraica necesaria, siendo todos estos, aspectos que pueden ser fuente de dificultades para los estudiantes. A

Milanesio, B. y Markiewicz, M. E. (2023). La complejidad semiótica de una demostración por inducción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 363–370). SEIEM.

su vez, reconocen que muchos estudiantes realizan estas demostraciones de forma mecánica sin comprender su significado, debido principalmente a las fundamentaciones lógicas que las mismas implican. Así, en producciones de muchos estudiantes, se manifiesta la suficiencia de la demostración del paso inductivo para la demostración general de la proposición involucrada, obviando de esta manera la demostración del paso base debido a su “simplicidad”. Esto da cuenta de que el estudiantado no logra interpretar la estructura lógica que conlleva una demostración utilizando el PIM. En otros casos, los estudiantes intentan generalizar la aplicación de este método de demostración a cualquier conjunto numérico.

En este trabajo sostenemos que una posible explicación a las mencionadas dificultades reside en la complejidad semiótica que reviste este tipo de demostraciones (en sintonía con lo planteado por Recio (1999) en relación a cualquier demostración matemática). Así, el objetivo de este estudio es poner en evidencia dicha complejidad en una demostración utilizando PIM planteada en un libro de texto de nivel universitario, a través del análisis de las funciones semióticas que se necesitan poner a funcionar para poder comprenderla y realizarla. Esto nos permitirá, a su vez, develar conflictos semióticos potenciales que pueden explicar, desde otro lugar, las dificultades del estudiantado.

MARCO TEÓRICO

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS) nos aporta herramientas para analizar la demostración matemática escogida, por lo que se constituye en el marco teórico y metodológico de este trabajo.

En este enfoque (Godino et al., 2007) se introduce la noción de *práctica matemática*, entendida como toda actuación o expresión realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicarla, validarla o generalizarla, y de *significado* (personal e institucional) de un objeto matemático como un emergente de los sistemas de prácticas (que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) donde dicho objeto es determinante para su realización. Estos sistemas de prácticas están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de *objetos primarios*: situaciones-problemas, procedimientos, definiciones-conceptos, proposiciones, argumentos y lenguaje.

Los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o dualidades (Godino et al., 2021): ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significado (contenido); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales - institucionales. Estas dualidades dan lugar a ciertos *procesos cognitivos/epistémicos duales*, tales como, procesos de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo), particularización-generalización (dualidad extensivo-intensivo), representación-significación (dualidad expresión-contenido), descomposición-reificación (dualidad unitario-sistémico) y personalización-institucionalización (dualidad personal-institucional).

Uno de los constructos fundamentales del EOS es el de *función semiótica*, entendida como “la correspondencia entre un objeto *antecedente* (expresión/significante) y otro *consecuente* (contenido/significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia” (Godino et al., 2021, p.15). Además, en el EOS se asume que toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de expresión (significante), contenido (significado) o interpretante (regla que relaciona expresión y contenido). Se asume también que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas etc.), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, inclusive las situaciones-problemas, pueden ser también antecedentes y/o consecuentes de las funciones semióticas. Los funtivos pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales. Se genera de este modo una variedad de tipos de significados que orienta y apoya la realización de análisis ontosemióticos de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista epistémico (institucional) como cognitivo (personal) (Godino et al., 2021).

El análisis pormenorizado de las funciones semióticas que se ponen en juego en una práctica matemática permite develar su complejidad semiótica, siendo esto un factor explicativo de *conflictos semióticos* potenciales (o efectivos), definidos por el EOS como "cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)" (Godino et al., 2007, p.133).

METODOLOGÍA

La metodología adoptada en este trabajo es inherente al EOS. En particular, realizamos un estudio documental e interpretativo de una demostración matemática realizada utilizando el PIM. La misma se propone en un libro de texto de Matemática Discreta (Johsonbaugh, 2005) que se suele utilizar en primer año del nivel universitario.

Tomando como base la caracterización del PIM que se plantea en el texto (ver Figura 1), se analiza la demostración por inducción planteada para una proposición matemática (ver Figura 2). Llevamos a cabo este estudio a partir de la identificación y el análisis de las funciones semióticas implicadas en las diversas prácticas matemáticas elementales en la cuales se puede descomponer dicha demostración. Además, identificamos conflictos semióticos potenciales que nos aportarían algunas explicaciones a las dificultades que presentan los estudiantes ante la comprensión y la realización de este tipo de demostraciones.

Figura 1. Caracterización del PIM

Suponga que se tiene una función proposicional $S(n)$ cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Suponga que

$S(1)$ *es verdadera;* **(1.7.7)**

para toda $n \geq 1$, si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n+1)$ es verdadera. **(1.7.8)**

Entonces $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

La condición (1.7.7) en ocasiones recibe el nombre de **paso base** y la condición (1.7.8) el de **paso inductivo**. En adelante, por "inducción" entenderemos "inducción matemática".

Fuente: Johsonbaugh (2005, p. 55)

DESARROLLO

Prácticas matemáticas elementales y funciones semióticas implicadas

A continuación, mostramos el análisis realizado a la práctica demostrativa planteada en el texto (Figura 2). Para ello, la descompusimos en una secuencia de prácticas matemáticas elementales (PME) y, para cada una, identificamos algunas de las principales funciones semióticas (FS) que se establecen entre los objetos matemáticos implicados (Godino et al., 2016), determinando el antecedente, la regla de correspondencia y el consecuente.

Figura 2. Demostración matemática utilizando PIM.

Utilice inducción matemática para demostrar que

$$n! \geq 2^{n-1} \text{ para toda } n \geq 1. \qquad \textbf{(1.7.9)}$$

Paso base

[Condición (1.7.7)] Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

Paso inductivo

[Condición (1.7.8)] Suponemos que la desigualdad es cierta para n; es decir, suponemos que

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \textbf{(1.7.10)}$$

es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n + 1$; es decir, debemos probar que

$$(n+1)\,! \geq 2^{n} \qquad \textbf{(1.7.11)}$$

es cierta. Podemos relacionar (1.7.10) y (1.7.11) si observamos que

$$(n + 1)! = (n + 1)(n!).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)(n!) \\ &\geq (n+1)2^{n-1} && \text{por (1.7.10)} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} && \text{ya que } n+1 \geq 2 \\ &= 2^{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.7.11) es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Como se verificaron el *paso base* y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.9) es verdadera para todo entero positivo n. ◀

Fuente: Johsonbaugh (2005, pp. 55-56)

- PME1. Utilice inducción matemática para mostrar que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. (1.7.9).

FS1. A la expresión "inducción matemática" (antecedente de FS1) se la asocia con un método de demostración según el cual, dada una función proposicional S(n), cuyo dominio de discurso es el conjunto de los enteros positivos, se requiere demostrar dos condiciones para poder concluir que S(n) es verdadera para cualquier entero positivo: que S(1) es verdadera y que para todo $n \geq 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera (consecuente de FS1).

FS2. La expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$" (antecedente de FS2) se relaciona con una función proposicional S con dominio en el conjunto de los enteros positivos (consecuente de FS2).

FS3. Al ostensivo n (antecedente de FS3) se lo asocia con un entero positivo arbitrario (consecuente de FS3).

FS4. Al ostensivo $n!$ (antecedente de FS4) se lo vincula con un número natural que se define como $0! = 1$ y $n! = n.(n-1).(n-2) \ldots 2..$ si $n \geq 1$ (Johsonbaugh, 2005, p. 55) (consecuente de FS4).

FS5. Se relaciona el ostensivo 2^{n-1} (antecedente de FS5) con una potencia de base 2 y exponente $n - 1$, con $n \geq 1$ (consecuente de FS5).

FS6. A la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ (antecedente de FS6) se le otorga el contenido de una desigualdad entre dos números naturales (consecuente de FS6).

- PME2. Paso base [1.7.7]. Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$.

En PME2, además de asociarse FS4, FS5 y FS6 de PME1, se asocia la siguiente función semiótica:

FS7. A la expresión "paso base" (antecedente de FS7) se le otorga el contenido de que S(1) sea verdadera, esto es, que la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n = 1$ (consecuente de FS7).

- PME3. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

En PME3 además de vincularse FS4, FS5 y FS6 de PME1 se asocian las siguientes funciones:

FS8. Se evoca la definición de factorial para determinar que $1! = 1$ (consecuente de FS8).

FS9. Se evoca una propiedad de potencia (la potencia elevada a exponente 0 es igual a 1) para determinar que $2^{1-1} = 1$ (consecuente de FS9).

FS10. La cadena conformada por dos igualdades y una desigualdad $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$ (antecedente de FS10) se debe unificar para concluir que el primer término $1!$ es mayor o igual que el último 2^{1-1} (consecuente de FS10).

- PME4. Paso inductivo [1.7.8]. Suponemos que la desigualdad es cierta para n,
  es decir, suponemos que $n! \geq 2^{n-1}$ es cierta. Debemos probar que la desigualdad
  es cierta para $n + 1$, es decir, debemos probar que $(n + 1)! \geq 2^{n}$ es cierta.

Además de asociarse FS4, FS5 y FS6 de PME 1 se vinculan las siguientes funciones semióticas:

FS11. Al ostensivo n (antecedente de FS11) se lo relaciona con un entero positivo particular arbitrario (consecuente de FS11).

FS12. A la expresión “paso inductivo” (antecedente de FS12) se le otorga el contenido de que: para todo $n > 1$: si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera (consecuente de FS12). A su vez, se asocia esto último con la generalización de un condicional.

FS13. Se asocia la expresión “S(n) es verdadera” (antecedente de FS13) con la expresión “la desigualdad es cierta para n” (consecuente de FS13).

FS14. A la expresión “la desigualdad es cierta para n” (antecedente de FS14) se le otorga el contenido “$n! \geq 2^{n-1}$ es cierta” (consecuente de FS14).

FS15. La expresión “S(n+1) es verdadera” (antecedente de FS15) se relaciona con “la desigualdad es cierta para n+1” (consecuente de FS15):

FS16. A la expresión “la desigualdad es cierta para n+1” (antecedente de FS16) se le otorga el contenido “$(n + 1)! \geq 2^{n}$ es cierta” (consecuente de FS16).

FS17. La prueba del condicional involucrado (antecedente de FS17) se relaciona con el argumento consistente en suponer que su antecedente es verdadero (hipótesis) y probar su consecuente (tesis) (consecuente de FS17).

FS18. Se relaciona la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ (antecedente de FS18) con el antecedente del condicional involucrado (consecuente de FS18). Esto corresponde a la hipótesis inductiva.

FS19. Se vincula la expresión $(n + 1)! \geq 2^{n}$ (antecedente de FS19) con el consecuente del condicional involucrado (consecuente de FS19).

- PME5. Podemos relacionar $n! \geq 2^{n-1}$ y $(n + 1)! \geq 2^{n}$ si observamos que:
  $(n + 1)! = (n + 1).n!$.

Para PME5 se asocian las funciones semióticas FS4, FS5 y FS6 de PME1 y la siguiente:

FS20. A la expresión $(n + 1)!$ (antecedente de FS20) se la relaciona con $(n + 1).n!$ (consecuente de FS20) para poder aplicar la hipótesis inductiva.

- PME6. $(n + 1)! = (n + 1).n! \geq (n + 1).2^{n-1}$ (por $n! \geq 2^{n-1}$)
  $\geq 2.2^{n-1}$ (ya que $n + 1 \geq 2$)
  $= 2^{n}$.

Se asocian las funciones FS4 y FS5 de PME1, la función FS20 de PME5 y las siguientes:

FS21. Se aplica la hipótesis inductiva para el ostensivo $n!$ para poder obtener $(n+1).n! \geq (n+1).2^{n-1}$ (consecuente de FS21).

FS22. Evocar una propiedad de la desigualdad (si se suma el mismo valor a ambos miembros de una desigualdad, la misma se mantiene) para obtener $(n+1).2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$ (consecuente de FS22).

FS23. Evocar la propiedad del producto de potencias de igual base para obtener $2.2^{n-1} = 2^n$ (consecuente de FS23).

FS24. La cadena de igualdades y desigualdades involucrada (antecedente de FS24) se unifica para concluir que $(n+1)! \geq 2^n$ (consecuente de FS24).

- PME7. Por lo tanto, $(n+1)! \geq 2^n$ es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Para PME7, además de FS11, FS12, FS17, FS18 y FS19 (de PME4) y FS20 (de PME5) se asocian:

FS25. A la expresión $(n+1)! \geq 2^n$ (antecedente de FS25) se la asocia con una desigualdad entre dos números naturales (consecuente de FS25).

FS26. Los pasos realizados en el paso inductivo (para un n particular arbitrario suponer que vale el antecedente - la desigualdad es cierta para n - y deducir utilizando definiciones y propiedades que vale el consecuente - la desigualdad es cierta para $n+1$ -) (antecedente de FS26), se reifican para concluir la validez del condicional para cualquier n (consecuente de FS26).

- PME8. Como se verificaron el paso base y el paso inductivo, el PIM dice que $n! \geq 2^{n-1}$ es verdadera para todo entero positivo n.

Se asocian todas las FS de PME1, la FS7 de PME2, la FS12 de PME4 y las siguientes:

FS27. El paso base y el paso inductivo (antecedente de FS27) se unifican para ser interpretados como la hipótesis del PIM (consecuente de FS27).
FS28. Se asocia la expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ es verdadera para todo entero positivo n" (antecedente de FS28) con la tesis del PIM (consecuente de FS28).

FS29. Se reconoce en la expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$" (antecedente de FS29) un nuevo todo unitario: la proposición emergente (consecuente de FS29).

Conflictos semióticos potenciales

El análisis de las funciones semióticas permite anticipar conflictos semióticos potenciales en la comprensión y el desarrollo de esta demostración por inducción, que pueden producirse al no relacionar adecuadamente los elementos de una función semiótica. Aquí, haremos referencia a algunos conflictos que consideramos más relevantes, indicando la función semiótica asociada que lo puede generar.

- Vinculados a FS1: posibles desajustes en el significado otorgado al PIM al que remite la demostración, más precisamente dificultades para vincular esta expresión con la idea de que, dada una función proposicional S(n), para demostrar que es verdadera para todo n entero positivo basta con probar dos condiciones: que S(1) es verdadera y que, para todo $n \geq 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera.
- Asociados a FS2: conflictos para otorgar contenido a la proposición matemática a demostrar ($n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) como una función proposicional S con dominio en el conjunto de los enteros positivos.
- Vinculados a FS3 y FS6: dificultades para reconocer en el ostensivo n un entero positivo arbitrario y en la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ una desigualdad entre dos números naturales.
- Vinculados a FS4 y FS5: posibles disparidades al significar las expresiones $n!$ y 2^{n-1}.

- Asociados a FS7: dificultades para significar la expresión "paso base" como que S(1) sea verdadera, es decir, que la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n = 1$.
- Vinculados a FS12, FS18 y FS19: dificultades para otorgar significado a la expresión "paso inductivo" como: para todo $n > 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera. A su vez, conflictos para significar al paso inductivo como la generalización de un condicional, y para relacionar la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ con el antecedente, y la expresión $(n+1)! \geq 2^n$ con el consecuente.
- Asociados a FS17: conflictos para relacionar la prueba del paso inductivo, con un argumento consistente en considerar un n particular arbitrario, suponer que su antecedente es verdadero (hipótesis) y probar su consecuente (tesis). También, conflictos vinculados con la necesidad de generalizar el condicional para todo número natural, a partir de haberlo probado para un natural n particular arbitrario.
- Vinculados a FS20: dificultades para significar la expresión $(n+1)!$ como $(n+1).n!$.
- Asociados a FS21 y FS22: posibles desajustes en el paso inductivo, por ejemplo, en el pasaje de la expresión $(n+1).n! \geq (n+1).2^{n-1}$ a la expresión $(n+1).2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$ en relación a la posibilidad de significar la última expresión como consecuencia de la aplicación de ciertas propiedades en la primera que permiten deducir la segunda.
- Vinculados a FS10 y FS24: dificultades, en el paso base, para unificar la cadena conformada por dos igualdades y una desigualdad, para concluir que el primer término 1! es mayor o igual que el último 2^{1-1}. También, en el paso inductivo para unificar la cadena de igualdades y desigualdades para concluir que $(n+1)! \geq 2^n$.
- Asociados a FS20: dificultades para expresar $(n+1)!$ en función de $n!$ para hacer uso de la hipótesis inductiva.
- Asociados a FS26: dificultades, en el paso inductivo, para unificar los pasos realizados.
- Vinculados a FS27 y FS28: conflictos asociados a la posibilidad de unificar el paso base y el paso inductivo en la demostración utilizando el PIM, a partir de interpretarlos como hipótesis del PIM, que, al haber sido probados, permite asegurar la tesis del mismo (la función proposicional en cuestión vale para todo entero positivo n).
- Asociados a FS29: dificultades para reconocer la proposición emergente $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ como un todo unitario que ha sido demostrado para todos los números naturales.

CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo pone en evidencia la potencialidad de la noción de función semiótica para analizar de manera microscópica la secuencia de prácticas matemáticas elementales implicadas en una demostración básica por inducción matemática, poniendo en relación un objeto antecedente con otro consecuente según una regla de correspondencia (Godino et al., 2016), dando cuenta de la complejidad semiótica de este tipo de prácticas demostrativas. Claramente algunas de ellas son particulares de la demostración de la proposición seleccionada, pues están íntimamente ligadas a los procesos que exigen la aprehensión de los conceptos, proposiciones y relaciones matemáticas que definen a la propiedad objeto de estudio (por ejemplo, FS4, FS6, FS20), mientras que otras son transversales y aplican a cualquier demostración por inducción, pues son inherentes al proceso de argumentación y evidencian la complejidad lógica de este método (FS1, FS12, FS27, FS28).

Tal como se menciona en Godino et al. (2007), las funciones semióticas revisten un papel esencial en el proceso relacional de las entidades que se lleva a cabo en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje) y, en este sentido, el EOS entiende la comprensión en términos de las funciones semióticas que se pueden establecer. Esto pone de manifiesto la necesidad de reconocer, como docentes, las distintas funciones semióticas que se ponen a funcionar en este tipo de demostraciones para lograr una comprensión significativa en los momentos de implementación de estas prácticas. En este sentido, Crespo-Crespo (2016) expresa que en el aula se debe promover un ambiente reflexivo y comprensivo de modo que estas prácticas demostrativas no se limiten a procesos algebraicos meramente técnicos, pero para esto – nosotros agregamos – es necesario ser conscientes de la complejidad ontosemiótica de las mismas.

El análisis realizado nos permitió, además, poner al descubierto conflictos semióticos que permiten explicar posibles dificultades del estudiantado en la comprensión y realización de este tipo de demostración (algunos específicos de la práctica analizada y otros comunes a la estructura lógica de toda demostración utilizando inducción matemática) en términos de los conocimientos matemáticos específicos requeridos en cada caso (Godino et al., 2016).

Finalmente, este trabajo pretende ser un aporte a los estudios sobre la complejidad que revisten las demostraciones matemáticas, y, en particular, las demostraciones por inducción, desde una perspectiva semiótica que pone de manifiesto relaciones y significados que muchas veces están ocultos en las prácticas planteadas en un libro de texto. La desnaturalización de las mismas y de los posibles conflictos es un primer paso para pensar en procesos de estudio sobre este tipo de demostraciones con mayor idoneidad cognitiva e instruccional.

Referencias

Crespo-Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29 (pp. 243-252).

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. *ZDM. The international journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes Matemáticas: Propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*, 5–32.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas (6.ª ed.).* Pearson Educación.

Nieves-Pupo, S., Caraballo-Carmona, C. M., y Fernández-Peña, C. L. (2019). Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa. *Mendive. Revista de Educación*, *17*(3), 393- 408.

Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 113-120).

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(*3), 289–321.