# SIGNIFICADOS PRAGMÁTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

## Pragmatic meanings of mathematical proof in higher education students

Milanesio, B.[a], Burgos, M.[b] y Markiewicz, M. E.[c]

[a,b] Universidad de Granada, [c] Universidad Nacional de Río Cuarto

**Resumen**

*El objetivo de esta investigación es analizar los significados personales mostrados sobre la demostración matemática de un grupo de 31 estudiantes que ingresan a los grados de física y matemáticas, cuando resuelven una tarea que exige la validación de proposiciones aritméticas fundamentales. A través de un estudio de tipo mixto cualitativo-cuantitativo, se investigan el grado de pertinencia de las soluciones, los tipos de estrategias seguidas y los niveles de razonamiento algebraico asociados, según el modelo desarrollado desde el Enfoque Ontosemiótico. Los resultados muestran las dificultades de los participantes para desarrollar pruebas completas. Predominan las explicaciones informales y los argumentos empíricos, de carácter aritmético e insuficientes para validar de manera general las proposiciones matemáticas involucradas.*

**Palabras clave**: *estudiantes universitarios, demostración matemática, niveles de razonamiento algebraico, enfoque ontosemiótico.*

**Abstract**

*The objective of this research is to analyze the personal meanings shown on the mathematical proof of a group of 31 students entering physics and mathematics grades, when they solve a task that requires the validation of fundamental arithmetic propositions. Through a mixed qualitative-quantitative study, the degree of relevance of the solutions, the types of strategies followed and the associated algebraic reasoning levels are investigated, according to the model developed by the ontosemiotic approach. The results reveal the difficulties of the participants to develop complete proofs. The predominant strategies were informal explanations and empirical arguments, arithmetical in nature and insufficient to validate in a general way the mathematical propositions.*

**Keywords**: *undergraduate students, mathematical proof, algebraic reasoning levels, Ontosemiotic Approach*

## INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática constituyen una problemática desafiante en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Stylianides y Stylianides, 2017). Cómo enseñar la demostración y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto para los profesores de matemáticas, debido a las constantes dificultades que presentan los estudiantes en los procesos de comprensión y desarrollo de las demostraciones (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz et al., 2021; Weber et al., 2020). Dado que la demostración matemática constituye un proceso inherente a la propia disciplina, presente de diferentes formas en las clases de matemáticas de los distintos niveles educativos, diversos autores han analizado la conexión con formas menos abstractas de aproximarse a la demostración tales como explicación, argumentación, verificación, prueba (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Balacheff, 2000; Stylianides et al., 2017).

Como sugieren Stylianides et al. (2017), incluso estudiantes de nivel universitario carecen de las competencias necesarias para elaborar pruebas con éxito, bien porque no dan sentido a enunciados

Milanesio, B., Burgos, M. y Markiewicz, M. E. (2023). Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 371–378). SEIEM.

con una estructura lógica compleja, no llegan a elegir un marco de demostración legítimo para comenzar su demostración o no reconocen argumentos inválidos. Para estos autores, la dificultad que encuentran los estudiantes parte de la distancia estructural entre el argumento informal y la prueba. Autores como Pedemonte y Reid (2011), entre otros, se apoyan en el modelo de Toulmin (1993) para analizar y documentar las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración, observando la distancia estructural entre el argumento informal y la prueba. Sin embargo, son escasas las investigaciones que analizan la complejidad de este tránsito en base a las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la demostración matemática, y en especial aquellos de naturaleza algebraica.

En este sentido, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2019) se han realizado algunas investigaciones sobre la demostración matemática con la intención de clarificar los significados que se le otorgan a la misma, cómo se interrelacionan y cómo deberían tenerse en cuenta en los procesos instruccionales (Godino y Recio, 2001; Markiewicz et al., 2021). Así, en Markiewicz et al. (2021) se analizan los objetos y procesos que influyen y condicionan las prácticas argumentativas de estudiantes del último año de secundaria, determinando los niveles de razonamiento algebraico (Godino et al., 2015) de dichas prácticas y los conflictos semióticos que obstaculizan el avance hacia el tipo de validación deductiva pretendida en los primeros años de la universidad. Esta investigación permitió constatar cierta distancia entre el tipo de validación logrado por estudiantes al final de secundaria y el pretendido en el nivel superior.

Continuando con esta línea de investigación, el objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un primer ciclo de investigación con estudiantes que acaban de ingresar en titulaciones universitarias de matemáticas y física, en una universidad de Argentina, cuando resuelven tareas que requieren justificar propiedades aritméticas fundamentales. Se pretende identificar los significados personales sobre la demostración de estudiantes que se encuentran en la transición entre el nivel secundario y superior, a partir del análisis de sus prácticas y el nivel de razonamiento algebraico emergente.

## MARCO TEÓRICO

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones-problemas, e interpreta el significado pragmático de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones (Godino et al., 2019) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Los objetos matemáticos que intervienen y emergen de las prácticas se clasifican según su naturaleza y función en: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

### El modelo de razonamiento algebraico en el EOS

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico (RAE) desarrollado en el EOS (Godino et al., 2015) permite modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en el estudio de la validación, en tanto describe la actividad matemática bajo la perspectiva del álgebra.

Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática (institucional o personal), por lo que permiten hacer un análisis microscópico de las prácticas matemáticas y, por tanto, de los significados (institucionales o personales) (Godino y Burgos, 2017). Estos criterios son los siguientes: a) generalización (de la que emergen objetos intensivos en relación dialéctica con los correspondientes extensivos), b) unitarización (reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias), c) formalización y ostensión (nombramiento mediante diferentes sistemas de representación, en particular, expresiones simbólico-literales), d) transformación (intervención de objetos intensivos en procesos de cálculo analítico y nuevas generalizaciones). Los niveles de RAE son los siguientes:

- Nivel 0 (N0). Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- Nivel 1 (N1). Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- Nivel 2 (N2). Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información y contextual; en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel 3 (N3). Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
- Nivel 4 (N4). Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- Nivel 5 (N5). Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables.
- Nivel 6 (N6). Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

### Demostración y términos asociados

Como hemos mencionado, diversos autores reconocen la existencia de diferentes formas en las que se presenta la demostración, dependiendo del contexto en la que se la considere (escuela, universidad, comunidad de matemáticos) y del grado de formalidad con el que se utilice. Para Balacheff (2000) los procesos de *validación* persiguen asegurar "la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)" (p.13). En la *explicación*, el sujeto pretende hacer inteligible al público la verdad de una proposición, que él ya ha adquirido. No se trata necesariamente de un razonamiento deductivo y el lenguaje principal es el natural (Balacheff, 2000). Para este autor, la *prueba* es una explicación que ha sido reconocida y aceptada socialmente por una comunidad. Entiende que "el paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad" (Balacheff, 2000, p.12), aunque, puede ser aceptada por una comunidad, pero rechazada por otra.

La *demostración* es considerada el tipo de prueba dominante en matemáticas. Utiliza proposiciones aceptadas por la comunidad de clase que son verdaderas (axiomas) y están disponibles sin más justificación; emplea formas de argumentación válidas y conocidas o al alcance conceptual de la comunidad, se comunica con formas de expresión que son apropiadas y conocidas o pueden serlo por la comunidad de la clase (Stylianides et al., 2022). Dado que lo que se considera una demostración matemática y cuándo es válida depende del contexto sociocultural, Alfaro-Carvajal et al. (2019) consideran necesario reconocer la existencia de diversos significados de la demostración que contemplen argumentos empíricos, es decir, basados en el uso de ejemplos que ofrecen una evidencia incompleta sobre la veracidad de una proposición matemática. Consideran demostraciones informales aquellas en las que "se hace una redacción en prosa más simple en la que se omiten las justificaciones sobre las reglas de inferencia usadas y los presupuestos matemáticos que fundamentan cada paso de la demostración" (p.66).

## METODOLOGÍA

De forma general la investigación tiene un carácter descriptivo y exploratorio, con algunos elementos interpretativos y explicativos (Bisquerra y Alzina, 2004). Empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar las respuestas de los participantes. La experiencia formativa se llevó a cabo con 31 estudiantes de primer curso universitario de profesorado y licenciatura en matemáticas y licenciatura en física en una universidad de Argentina, que comparten la asignatura de Matemática Discreta. El nivel de desempeño en matemáticas de los estudiantes que participaron en la experiencia es estándar, según los resultados obtenidos en los cursos de nivel secundario.

Figura 1. Instrumento de recogida de datos

**Problema 1.** En cada caso, justifica tu respuesta.
a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 3?
b) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?
c) ¿Cuándo será cierto que, si se suman $k$ números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de $k$?

Fuente: ítems a y b tomados de Sessa (2005, p. 113), ítem c adaptado de Sessa (2005, p. 113)

En este trabajo y por motivos de espacio, mostramos el análisis de los resultados obtenidos en una de las tareas propuestas, incluida en la Figura 1. Además de esta tarea se propusieron otras dos y los estudiantes dispusieron de dos horas y cuarenta minutos para su realización. La encargada de la recogida de datos fue la tercera autora y profesora de los estudiantes en Matemática Discreta.

El problema propuesto involucra la validación de diversas propiedades matemáticas, en un contexto aritmético-algebraico cercano a los conocimientos esperados de los estudiantes del nivel secundario y que se retoman en el ingreso al nivel universitario. Se ponen en juego diversos objetos matemáticos (números naturales consecutivos, múltiplo de un natural, números impares, propiedades de la suma y multiplicación en $\mathbb{N}$) y procesos como la exploración de ejemplos, el reconocimiento de regularidades, la búsqueda de contraejemplos, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de algún tipo (más o menos formal) de argumentación para validar dichas conjeturas. En el ítem c, aunque no se espera una demostración formal de la doble generalización involucrada distinguida en Sessa (2005) (comienzo de la suma por cualquier número natural y cualquier cantidad de sumandos implicados) se espera que los estudiantes obtengan alguna regla general con base en los resultados de los ítems previos.

Las autoras, teniendo en cuenta la solución experta a la tarea, acordaron previamente los siguientes grados de pertinencia en la valoración de las respuestas:

- *Correcta* (C). Una respuesta se considera correcta si se establece y garantiza la validez general de la proposición matemática. Tal es el caso de las demostraciones informales como se puede ver en la producción del estudiante E31 (ver Figura 5) donde pone de manifiesto en lenguaje simbólico la suma de cinco naturales consecutivos utilizando implícitamente algunas propiedades disponibles (asociativa y conmutativa de la suma en N, agrupación de términos semejantes, etc.): $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4) = 5a+10 = 5(a+2)$, expresando la relación de la primera expresión con ser múltiplo de 5.
- *Parcialmente correcta* (PC). Una respuesta se considera parcialmente correcta si se basa en propiedades matemáticas correctas pero que no permiten valorar la validez de la proposición, atendiendo así a particularización-generalización incompletas o al uso de contraejemplos para afirmar una proposición emergente (sin validar la misma). Por ejemplo, la solución de E5 al apartado c, donde emplea contraejemplos (particularizando $k$ a 2 y luego a 4) que refutan la sentencia de que, para la suma de cualquier $k$ números naturales consecutivos el resultado es múltiplo de $k$ (ver Figura 4).
- *Incorrecta* (I). En otro caso, por ejemplo, si resuelve de manera confusa, se basa únicamente en casos particulares para fundamentar la validez de las proposiciones (Figura 2) o emplea proposiciones matemáticas no verdaderas (Figura 3).

A continuación, la primera y segunda autora analizaron independientemente parte de los informes de los estudiantes, para identificar y compartir los tipos de estrategias encontradas. Después confrontaron sus resultados y los discutieron con la tercera autora para definir las categorías:

- *Argumento empírico*. Se basa en el uso de casos particulares que ofrecen una evidencia incompleta (ver Figura 2) sobre la verdad de la proposición matemática involucrada (Alfaro-Carvajal et al., 2019).
- *Explicación informal*. El estudiante se basa en sus propias reglas de decisión de la verdad para establecer y garantizar la validez de la proposición (ver Figura 3).
- *Particularización-Generalización incompleta*. Se produce una particularización de la proposición matemática que se pretende demostrar y se obtiene una regla general que, si bien es cierta, no permite probar la proposición matemática inicial. La estrategia de particularización-generalización incompleta se observa fundamentalmente en el último apartado. Por ejemplo, E29 indica "esa expresión, a base de pruebas podría decir que sólo es cierto con números impares, como los ejemplos del punto a y b".
- *Uso de contraejemplos*. El estudiante refuta una conjetura matemática (no la prueba en sí) a través de un razonamiento deductivo, lo cual le proporciona un medio de control de la validez de la conjetura (ver Figura 4).
- *Demostración informal.* En la prueba, el estudiante no justifica explícitamente las reglas de inferencia usadas y los presupuestos matemáticos que sustentan cada paso de la demostración (ver Figura 5).

## RESULTADOS

En la Tabla 1 se resumen los grados de pertinencia de las resoluciones de los estudiantes a la tarea de evaluación (Figura 1) según las estrategias empleadas.

Tabla 1. Grado de pertinencia de las producciones según las estrategias

| Tipo de argumentación | Grado de pertinencia | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ítem a | | | Ítem b | | | Ítem c | | |
| | I | PC | C | I | PC | C | I | PC | C |
| Explicación informal | 13 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 |
| Uso de contraejemplo | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| Argumento empírico | 11 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Particularización-Generalización incompleta | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 | 0 |
| Demostración informal | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 1 |

Fuente: Elaboración propia de la investigación

La tabla 1 muestra que los estudiantes tuvieron dificultades para resolver la tarea correctamente: un 83,9% de estudiantes respondieron de forma incorrecta a los apartados a y b y un 53,3% lo hizo en el apartado c (además, un estudiante no resolvió este apartado). Sin embargo, un 43,3% resolvió de forma parcialmente correcta esta última parte. La mayoría de los estudiantes proponen para los apartados a y b argumentos empíricos, categorizados como incorrectos pues, consideran suficiente el uso de casos particulares para validar de manera general una proposición matemática. También se observa mayoritariamente el uso de explicaciones informales categorizadas como incorrectas, puesto que, en su mayoría, son confusas o parten de proposiciones matemáticas falsas. En el apartado c, además de las respuestas incorrectas evidenciadas mayormente en las explicaciones informales, se presentan respuestas parcialmente correctas en las particularización-generalización incompletas, donde los estudiantes plantean una conjetura a partir de lo argumentado en los ítems a y b. Otras estrategias poco frecuentes para los tres ítems fueron el uso de contraejemplos y de demostraciones informales.

En la Tabla 2 aparecen relacionados los diferentes tipos de estrategias utilizadas para cada ítem según los niveles de RAE implicados. La tabla 2 muestra que la actividad matemática de la mayoría de las producciones se sitúa entre un nivel 0 (actividad aritmética) y 2 (presencia de indeterminadas en un lenguaje simbólico-literal para referir a intensivos de grado 2) de RAE. También muestra la escasa actividad algebraica, de nivel 4 de RAE, implicada en las pocas demostraciones informales (que involucran el uso de parámetros como generalizadores).

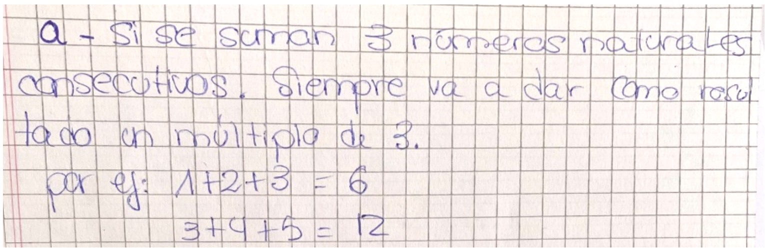
Tabla 2. Estrategias y frecuencias de las producciones

| Tipos de estrategias | Frecuencia | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ítem a | | | | Ítem b | | | | Ítem c | | | |
| | N0 | N1 | N2 | N4 | N0 | N1 | N2 | N4 | N0 | N1 | N2 | N4 |
| Explicación informal | 7 | 6 | 0 | 0 | 7 | 6 | 0 | 0 | 12 | 1 | 0 | 0 |
| Uso de contraejemplo | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| Argumento empírico | 10 | 0 | 1 | 0 | 11 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| Particularización-Generalización incompleta | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 |
| Demostración informal | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Fuente: Elaboración propia de la investigación

A continuación, se ejemplifican algunas de las estrategias más representativas, así como los errores más frecuentes manifestados en las producciones. Como se observa en la Figura 2, E22 utiliza la argumentación empírica para justificar la validez del ítem a. La actividad matemática es aritmética, se basa en las operaciones con números naturales como fundamentación (Godino et al., 2015).

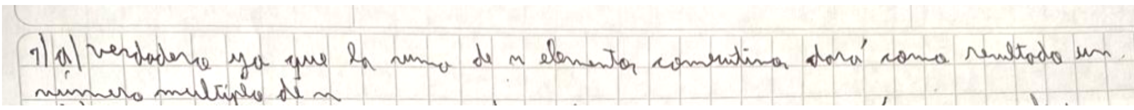
Figura 2. Respuesta de E22 al ítem a. Argumento empírico. Nivel 0 de RAE. Incorrecta.




Fuente: Elaboración propia de la investigación

También, se observaron respuestas incorrectas en los tres apartados al recurrir a explicaciones informales, las cuales parten, en su mayoría, de propiedades matemáticas falsas, como es el caso de E23 en la Figura 3: "la suma de *m* elementos consecutivos dará como resultado un número múltiplo de *m*". En este caso, la actividad corresponde a un nivel 1 de RAE, pues se expresa una regla general en lenguaje natural.

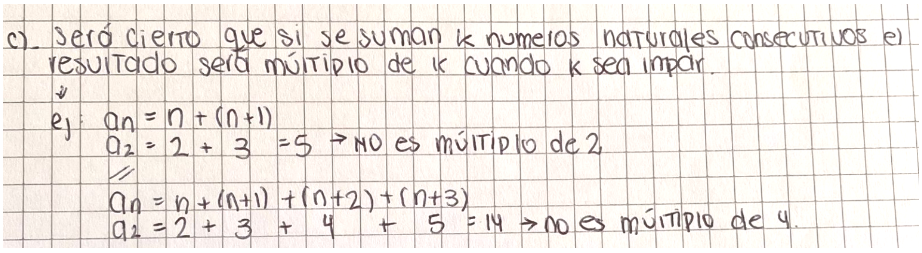
Figura 3. Respuesta de E23 al ítem a. Explicación informal. Nivel 1 de RAE. Incorrecta.




Fuente: Elaboración propia de la investigación

La mayoría de las respuestas parcialmente correctas se observaron en el último ítem mediante el uso de la estrategia de particularización-generalización incompleta, donde los estudiantes recurren a las proposiciones derivadas de a y b "si se suman tres naturales consecutivos el resultado es un múltiplo de 3" y "si se suman cinco naturales consecutivos el resultado es un múltiplo de 5" para deducir que "c sólo es cierta para números impares" (E24, E26). También es frecuente el uso de contraejemplos para este ítem, como se observa en la Figura 4. La estudiante E5 para justificar que la proposición "la suma de cualquier *k* números naturales consecutivos el resultado es múltiplo de *k*" es válida cuando *k* es impar, se basa en que no lo es cuando se suman dos cantidades pares (2 y 4) de números naturales consecutivos. En este caso, el nivel de RAE asignado a la actividad es 2, pues intervienen indeterminadas expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a intensivos de grado 2 ligados a la información contextual (Godino et al., 2015).

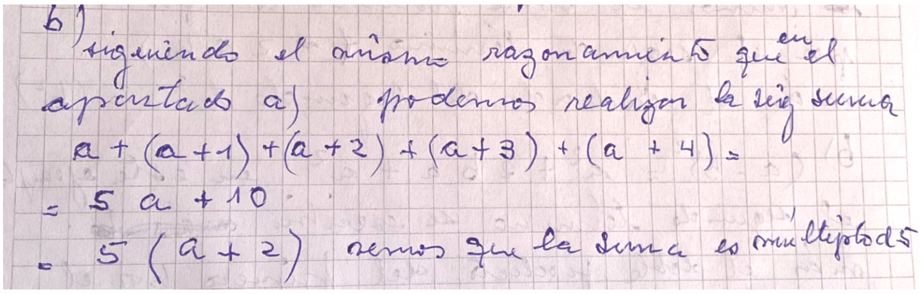
Figura 4. Respuesta de E5 al ítem c. Uso de contraejemplo. Nivel 2 de RAE. Parcialmente correcta.




Fuente: Elaboración propia de la investigación

Las únicas respuestas correctas en las producciones se manifestaron en las demostraciones informales. En la Figura 5 se ha incluido la respuesta del estudiante E31 al apartado b, quien recurre a esta estrategia. El nivel de RAE es 4 en tanto aparecen involucrados parámetros con los que se opera siguiendo reglas sintácticas (Godino et al., 2015).

Figura 5. Respuesta de E31 al ítem b. Demostración informal. Nivel 4 RAE. Correcta.




Fuente: Elaboración propia de la investigación

La elevada frecuencia de respuestas incorrectas vinculada al uso de explicaciones informales o argumentos empíricos (principalmente en los ítems a y b) puede venir motivada porque en el nivel educativo primario y secundario se acepta la comprobación sobre unos casos particulares como suficiente para argumentar la validez general de las proposiciones (Stylianides y Stylianides, 2017). Como observamos, las escasas respuestas que se consideraron correctas correspondieron en todos los casos a demostraciones informales, a las que correspondía un nivel mayor de formalización.

## CONCLUSIONES

El significado del concepto matemático fundamental de demostración ha sido objeto de diferentes aproximaciones y enfoques en la literatura e investigación en Educación Matemática (Stylianides et al., 2017). Demostrar es una parte indispensable de hacer matemáticas, por lo que es fundamental que los estudiantes produzcan, comprendan y aprecien las demostraciones participando en prácticas de demostración a lo largo de su educación matemática (Weber et al., 2020). Así, la demostración es importante no sólo para la disciplina matemática, sino también para el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes (Stylianides y Stylianides, 2017).

En la demostración, se debe producir un argumento matemático a favor o en contra de una proposición matemática. Este argumento debe ser matemáticamente sólido y formulado en un discurso que sea aceptado y conceptualmente accesible por los miembros de la comunidad donde se comparte. Sin embargo, la complejidad intrínseca a la actividad matemática implicada hace que sea necesario aceptar diversos grados de formalización en el mega-proceso de validación matemática.

En esta comunicación, se han analizado las producciones de un grupo de estudiantes que acababan de acceder a los grados en matemáticas y físicas, donde la demostración matemática tiene un papel relevante. El análisis de las prácticas desarrolladas por los estudiantes, en términos de los objetos matemáticos, especialmente, del tipo de argumentos desarrollados, el grado de generalidad de estos y la formalización en el lenguaje, muestra un escaso carácter algebraico en la actividad desarrollada y la prevalencia de demostraciones intuitivas o informales (Godino et al., 2015). Los significados personales de los estudiantes ingresantes al nivel superior respecto a la demostración matemática se vinculan a explicaciones informales o argumentaciones empíricas, a la argumentación no deductiva para validar las proposiciones matemáticas implicadas. Estas argumentaciones se encuentran alejadas de los significados institucionales pretendidos y del nivel de formalización esperada en cursos universitarios (Markiewicz et al., 2021). Se observa así la necesidad de promover una articulación efectiva entre estos tipos de argumentaciones y la demostración matemática formal, permitiendo a los estudiantes avanzar hacia un mayor nivel de RAE (Markiewicz et al., 2021). Esto supone además continuar investigando sobre los significados iniciales y los logrados sobre la demostración para tener una noción más clara de las pruebas que proponen los estudiantes y poder pensar en intervenciones que ayuden a superar las dificultades en la transición hacia matemáticas más avanzadas (Lew y Mejía-Ramos, 2019).

## Referencias


Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.

Bisquerra, R. y Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Godino, J. D. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 121-155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION, 17*(62).

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281-303.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del zorzal.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K. y Stylianides, G. J. (2022). Teaching and LearningAuthentic Mathematics: The Case of Proving. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119–127.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. E. (1993). *Les usages de l'argumentation.* Presses Universitaires de France.

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796