Diagnóstico de las dificultades de la enseñanza-aprendizaje en un curso de Álgebra Lineal

Carlos Felipe **Rodríguez** H
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
cf.rodriguez1134@uniandes.edu.co

Resumen

El propósito del presente estudio fue realizar un diagnóstico sobre el curso de Álgebra Lineal ofrecido por la Universidad de los Andes y, según éste, determinar cuáles eran las principales dificultades que se presentaban en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal. A partir de las dificultades encontradas y al hacer una revisión de los trabajos actuales sobre didáctica del Álgebra Lineal, se propuso una clasificación de las dificultades y del tipo de error asociado a cada dificultad, así como un listado de las competencias necesarias para aprender Álgebra Lineal. Posteriormente, se diseñó un taller para ser desarrollado usando el software CABRI II PLUS. Los resultados muestran que el uso de CABRI II PLUS, contribuye a disminuir los errores de los estudiantes y, al parecer, promueve las competencias necesarias para aprender Álgebra Lineal.

Palabras Clave: Diagnóstico, Álgebra Lineal, enseñanza-aprendizaje, Cabri II Plus, dificultades, errores.

Introducción

Descripción del problema

El Álgebra Lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices y en un enfoque más formal, el de los espacios vectoriales, y de las transformaciones lineales.

Muchos de los modelos matemáticos tienen un carácter lineal, es decir, pueden plantearse mediante diferentes ecuaciones lineales en algún campo de números y con unas pocas variables o incógnitas. Según esta descripción, un curso de Álgebra Lineal le debe permitir al estudiante conocer las herramientas y la forma correcta de utilizarlas, para resolver problemas planteando modelos lineales.

Al hablar con algunos docentes del curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes, se percibió un cierto nivel de preocupación por el escaso interés de sus estudiantes hacia la clase y hacia la apropiación de contenidos que usarán posteriormente. Algunos estudiantes, sin embargo, manifestaron que esta problemática se origina por el mínimo entendimiento que tienen de los conceptos y en la forma en la que éstos son presentados durante las sesiones del curso.

Además, algunos estudiantes manifestaron que no entienden por qué y para qué ver algunos contenidos del curso. Esta información se obtuvo a partir de un diálogo informal con docentes y estudiantes de la Universidad de los Andes.

Lo anteriormente mencionado, representa una dificultad para los estudiantes del curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes, ya que están perdiendo la oportunidad de crear una conexión entre los contenidos y los elementos teóricos de un contexto matemático con su propia disciplina. Es conveniente, además, que los futuros estudiantes de estas disciplinas conozcan los elementos matemáticos que facilitarán su formación rigurosa como ingeniero, administrador o economista.

Pregunta de investigación

¿Qué dificultades existen en el proceso de enseñanza-aprendizaje del curso de Álgebra Lineal ofrecido en la Universidad de los Andes?

Metodología

Tipo de estudio

Este estudio fue de tipo mixto. La primera parte consistió en una recolección de datos de forma cualitativa, usando las entrevistas descritas en la sección de instrumentos de este documento. A partir de la recolección y el análisis de los datos, se identificaron las dificultades presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del curso de Álgebra Lineal.

La segunda parte del estudio fue de tipo cuantitativo y en la cual se diseñó una intervención usando el software Cabri II Plus II. Se buscó además minimizar algunas de las dificultades encontradas en la etapa anterior y determinar si este tipo de estrategia: 1.contribuía a disminuir el error en las concepciones de los estudiantes; y 2.promovía, o no, las competencias necesarias para aprender Álgebra Lineal. El estudio fue implementado de manera secuencial y tuvo una prioridad CUAL-CUAN.

Participantes

Profesores. Los profesores eran miembros del departamento de Matemáticas y de la facultad de Ciencias, pertenecientes a la Universidad de los Andes. Eran profesores que orientaban el curso de Álgebra Lineal y que habían tenido experiencia previa dictando este curso. Los docentes participantes, cuatro en la etapa cualitativa y uno en la etapa cuantitativa, contaban con formación inicial en Matemáticas y con Maestría en Matemáticas.

Estudiantes. Los estudiantes participantes, hacían parte de las facultades de Ingeniería, Economía y Administración de la Universidad de los Andes. Sus edades oscilaban entre los 18 y 20 años, siendo la mayoría estudiantes de segundo semestre. Se puede afirmar que hacían parte de un estrato socioeconómico alto, es decir que tenían acceso a recursos como computadores, computadores personales y calculadoras graficadoras, entre otros.

Marco Teórico

Elementos que generan dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal

Algunas de las principales dificultades que se presentan en los cursos de Álgebra Lineal son: el uso del formalismo, el agobio ante las nuevas definiciones y la pérdida de conexión con lo que los alumnos ya saben de matemáticas (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000).

El Álgebra Lineal, además, es una rama de las Matemáticas con un elevado grado de abstracción ya que es uno de los pilares del lenguaje algebraico. Por lo tanto, provoca un elemento de especial dificultad para el estudiante: obstáculo del formalismo (Sierspinska et al., 1999).

De igual forma, existe una deficiencia de conocimientos matemáticos básicos y específicos que han debido adquirir previamente los estudiantes; por ejemplo, ciertas nociones de lógica elemental, ya que se asume que las mismas permiten al estudiante entender la formalidad de la teoría de espacio vectorial (Labraña, Plata, Peña, Crespo y Segura, 1995).

Asimismo, se manifiesta la poca utilización de problemas como base para la introducción de conceptos y de propiedades. Tal introducción de conceptos, con ayuda de las indicaciones e instrucciones pertinentes, permitirían su descubrimiento. (Berenguer,2003; Ortiz, Rico y Castro, 2008). Eso último, parece sustentarse en el manejo de mucha teoría y poca práctica, debido a la naturaleza del Álgebra Lineal. Se puede decir de esta teoría que es unificada y generalizada.

Por último, es muy frecuente que los conceptos del Álgebra Lineal se adquieran como formas sin contenido. Es decir, que se adquieran como un conjunto de relaciones simbólicas vacías de significado (Ortega, 2002).

Algunas propuestas didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal

Algunas investigaciones dedicadas al aprendizaje del Álgebra Lineal, presentan el problema de la variedad de lenguajes y representaciones semióticas. Dentro de los contenidos que se estudian, están el lenguaje abstracto, el lenguaje geométrico y el lenguaje algebraico. Por ejemplo, Sierpinska (1996) menciona la coexistencia de tres tipos de lenguaje: el lenguaje geométrico, el aritmético y el algebraico. De tal modo que, partiendo del desarrollo de estos lenguajes se puede hablar de pensamiento sintético-geométrico, aritmético-analítico y analítico-estructural.

Otras investigaciones, de especialistas cubanos, sugieren el tratamiento y determinación del sistema de habilidades matemáticas mediante acciones como: identificar, recodificar, calcular, graficar, interpretar, algoritmizar en el caso de estudiantes que indagan sobre las Matemáticas pero no se forman como especialistas de esa rama. Contrariamente, proponen incluir acciones como la de definir, demostrar y modelar en el caso de los que se forman como matemáticos. (Hernández, H. 1989; Delgado, R. 1999; Núñez, R. 1999 y Jiménez, H.2000).

Parte de las propuestas didácticas que se han hecho para la enseñanza del Álgebra Lineal, se sugiere la implementación de prácticas pedagógicas en las que el aprendizaje se da en forma de un ciclo que articule los lenguajes, como modos de pensamiento necesarios para que un estudiante entienda los conceptos.

Por ejemplo, un modelo de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal planteado por Sierspinska (1999), propone seguir las fases siguientes: a) La adquisición de conceptos por medio de modelos geométricos de espacios y subespacios vectoriales; b) La redefinición de esos modelos vistos en R^2 y R^3 al espacio R^n; c) La generalización a espacios vectoriales más abstractos. (Sierpinska et al., 1999)

Otras propuestas didácticas para introducir nociones básicas de Álgebra Lineal, sugieren el uso de la Geometría a través de las siguientes etapas: a) Introducción del concepto por manipulación física de objetos usando conceptos previos sencillos; b) Construcción del concepto con representaciones gráficas de las situaciones manipuladas; y c) Simbolización del concepto con una manipulación simbólica de las técnicas y relaciones (Mateus, 2008).

Acorde con la segunda propuesta, antes mencionada. Pérez (1996) afirma que el aprendizaje de la Matemática puede ser incentivado con ideas geométricas, en particular considera interesante incluir la Geometría en la enseñanza del Álgebra Lineal planteando el ejemplo de cómo introducir la Regla de Cramer mediante la geometría vectorial.

Así pues, el uso de la Geometría para introducir los conceptos de Álgebra Lineal es una posible estrategia que pasaría a formar parte del enfoque metodológico de algunos contenidos del curso (Pérez, 1996). Sin embargo, Harel plantea que si se introduce la Geometría antes de los conceptos algebraicos, generalmente los estudiantes tienen dificultades para moverse del ámbito geométrico al algebraico. (Harel, 2000).

Se han realizado numerosas experiencias didácticas encaminadas a mejorar la enseñanza del cálculo mediante el uso de un computador con sistemas de cálculo algebraico. Sin embargo, en este contexto, existen menos estudios y trabajos relacionados con el Álgebra Lineal (Ortega, 2002). La idea de la propuesta didáctica de este estudio, es motivar a los estudiantes a desarrollar el modo de pensamiento analítico mediante la enseñanza de algunos conceptos, usando objetos geométricos y usando Cabri II Plus, como una herramienta de exploración y visualización.

Cabri II Plus

Cabri II Plus puede considerarse como un software didáctico, que ayuda a proponer experiencias de aprendizaje diferentes a las tradicionales. Este programa fue desarrollado por Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde en el instituto de informática y matemáticas aplicadas de Grenoble (IMAG), de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, en Francia. Se contó, además, con el apoyo del Centro Nacional de la Investigación Científica (CNRS) de Francia (Macías & Portillo, 2006).

Algunas características del software Cabri II Plus, que se consideran pertinentes de resaltar son: la construcción en forma precisa y rápida de todos los componentes básicos de la geometría euclidiana; el control del aspecto gráfico de los elementos geométricos usando simplemente el mouse. Además de la creación de macros para facilitar las construcciones de objetos geométricos muy complejos y repetitivos; así como la manipulación de figuras geométricas y la observación de todas las partes de esta misma como medidas. Además se ejecutan cálculos de medidas desde medidas simples hasta expresiones complejas que evalúan, por ejemplo, áreas, pendientes, etc.. Repite construcciones didácticamente, es decir, hace un historial de cómo se llegó a determinada construcción, y cuáles fueron todos los pasos que se siguieron; e imprime las construcciones realizadas (Macías & Portillo, 2006).

Recolección de datos

Fase 1

Instrumento de observación de clase. El propósito de este instrumento fue recolectar la mayor evidencia posible sobre lo que está pasando en la sesión de clase (orientaciones del docente, respuesta de los estudiantes, aclaración de dudas, entre otros). La observación fue de tipo no participativo, ya que el observador no interactuó con los estudiantes.

Encuesta para el docente. El propósito de este instrumento fue determinar información básica sobre los docentes que orientan el curso de Álgebra Lineal y sobre las percepciones que tienen sobre sus estudiantes. Esta entrevista estructurada tenía13 preguntas.

Encuesta para el estudiante. El propósito de este instrumento fue determinar información básica sobre los estudiantes participantes del curso de Álgebra Lineal y sobre sus percepciones. Fue una entrevista estructurada de 15 preguntas.

Fase 2

Pre-prueba. El propósito de esta prueba fue determinar cuáles eran los errores que tenían los estudiantes antes de desarrollar el taller propuesto en la intervención. La pre-prueba tuvo cuatro preguntas relacionadas con el concepto de vector, sus características y propiedades.

Pos-prueba. El propósito de esta prueba fue determinar si los errores que tenían los estudiantes después de desarrollar el taller, disminuyeron o no. La pos-prueba tuvo cuatro preguntas, similares a las de la pre-prueba.

Taller. El propósito del taller, de seis preguntas, fue proporcionar enunciados en donde el estudiante pudiera manipular objetos como vectores, buscando promover pensamiento y razonamiento matemático y la construcción conceptual al usar Cabri II Plus.

Resultados

Fase 1: Diagnóstico del curso de Álgebra Lineal

Durante la primera fase, se observaron algunas de las sesiones de clase de cuatro profesores que accedieron a participar voluntariamente en el estudio. Estas observaciones fueron de carácter no participativo, es decir el investigador no se involucró en el desarrollo de las sesiones de clase. Esta fase tuvo una duración de tres meses.

Observaciones de clase

A partir de las observaciones de clase, se determinaron las siguientes categorías relacionadas con las dificultades presentes en el curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes; se presenta, por cada categoría, un dialogo extraído de las sesiones observadas, en donde E representa al estudiante y P al profesor.

Preparación de la clase por parte de los estudiantes

P: ¿Ejercicios que no hayan podido hacer?
E: Ninguno
P: Si no hacen los ejercicios, es porque ustedes no leen el libro.
P: Como no hacen los ejercicios de la tarea, les va mal en el quiz.
P: ¿Qué sección del libro tenemos para hoy?
E: No responden

Conceptos matemáticos previos

P: ¿Quién recuerda la fórmula del coseno de teta entre dos vectores a y b?
E: a.b/ a.b
P: ¿Saben elevar tres términos al cuadrado?
E. No
P: ¿Quién de ustedes vio lógica en el colegio?

E: (sólo dos estudiantes levantan la mano)
P: ¿Cuánto da 5^{20}+ 4 .5^{20}?
E: 9.5^{20}
P: No
E: 5^{20}.5
P: ¿Cuánto da?
E: 25^{20}
P: No, da 5^{21}

Lenguaje matemático de los conceptos presentados

P: ¿Que significa que una transformación lineal sea sobre?
E: Conjunto de llegada es igual al rango
P: ¿Cuándo es 1 a 1 y sobre cómo se llama?
E: Biyectiva
P: Eso es en cálculo, en álgebra es un isomorfismo
Si T: V → W, T es un isomorfismo y decimos que V es isomorfo a W y se nota V = W
P: Pruebe que la integral definida es una TL
E: ¿la integral?
P: Si., a dónde llega la integral?
E: A n+1
E: A un área
P: No, llega a R. ¿Cuándo calcula una integral definida que les da?
E: No responden

Uso de formalismo en demostraciones en clase

P: Vamos a probar el teorema, usando un contraejemplo. Vamos a probar el teorema usando una contradicción.
P: ¿Tienen dudas sobre la demostración?
E: No responden

Aclaración de las dudas de los estudiantes en clase

Los estudiantes hacen los siguientes comentarios, sin recibir una respuesta que aclare su pregunta, por parte del profesor:

E: En sí, que significa valor propio?
E: No entiendo como pasar la matriz al vector propio
E: ¿Para qué sirve el AL? ¿Qué aplicaciones tiene?

Encuestas a los estudiantes

Según el resultado de las encuestas realizadas a 75 estudiantes inscritos en el curso de Álgebra Lineal, se presentan los siguientes hallazgos. Al 42% de los encuestados no les gusta el curso de Álgebra Lineal. Las principales razones de esto, al parecer, son el nivel de abstracción de los conceptos y la poca utilidad que los estudiantes le ven a los contenidos presentados en clase. Solo el 3% de los encuestados afirma leer siempre el material asignado antes de cada clase de Álgebra Lineal, es decir que el 97% de los estudiantes encuestados leen algunas veces, muy pocas veces o nunca leen el material. Las principales razones para no leer, según los encuestados, es la falta de tiempo (40%) y el hecho de considerar que las explicaciones del profesor en clase son suficientes (25%).

El 77% de los encuestados afirma que leería más, si la bibliografía del curso estuviera en español. El 65% de los encuestados afirma que realiza ejercicios relacionados con la clase de Álgebra Lineal. Sin embargo, el número de los ejercicios realizados no supera a los diez y son realizados, en su mayoría, antes de cada evaluación parcial del curso.

El 72% de los encuestados afirma haber encontrado más útiles los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales, que su curso de Álgebra Lineal.

Encuestas a los docentes

La encuesta fue aplicada a cuatro docentes que orientaron el curso de Álgebra Lineal. Manifestaron preocupación ya que los estudiantes no preparan clase y no hacen la lectura previa asignada para cada sesión. Los docentes afirmaron que se encuentran familiarizados con el uso de software como Derive, Maple y Cabri II Plus, para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, expresan que no acostumbran a usar este tipo de software para proponer experiencias de aprendizaje a sus estudiantes.

Análisis resultados fase 1

A partir del análisis de los datos recolectados en esta fase, se pudo determinar que las principales dificultades presentes en el curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes eran:

- Falta de lectura previa y preparación de la clase por parte de los estudiantes (1).
- Falta de fortaleza conceptual en los conceptos matemáticos previos (2).
- Uso de material bibliográfico en inglés (3).
- Desconocimiento de las aplicaciones de los contenidos vistos en clase en otras áreas de conocimiento (4).
- Un número bajo de ejercicios desarrollados por parte de los estudiantes (5).
- Uso de un alto nivel de formalismo por parte del profesor en las sesiones de clase (6).
- Uso de un lenguaje matemático abstracto (7).

Teniendo en cuenta las dificultades 2,5, 6 y 7, y revisando el trabajo realizado por Dorier y Sierpinska (1999) y Radatz (1979), se propuso la siguiente clasificación para las dificultades y el tipo de error asociado, en el proceso de aprendizaje del Álgebra Lineal:

Dificultades Conceptuales	Dificultades Cognitivas
1.Error del lenguaje 2.Error en conceptos previos	3.Error por asociaciones incorrectas 4.Error para obtener información espacial
5. Error por aplicación de estrategias irrelevantes	

De igual forma, y tomando como referencia el trabajo desarrollado en el proyecto danés sobre las competencias para aprender matemáticas Danish KOM project: Competencies and the learning of Mathematics (Niss, 2002), a continuación se presenta una posible clasificación de las competencias que un estudiante de Álgebra Lineal debería tener:

Relacionadas con hacer y responder preguntas en matemáticas	**Relacionadas con el manejo del lenguaje matemático**
Pensamiento matemático (1)	Representación de objetos matemáticos (5)
Solución de problemas en matemáticas (2)	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos (6)
Modelamiento matemático (3)	Comunicar ideas en matemáticas (7)
Razonamiento matemático (4)	Uso de herramientas (incluida IT) (8)

Fase 2: Diseño de la intervención usando Cabri II Plus II Plus

Buscando una posible solución a las dificultades conceptuales y cognitivas, identificadas en la fase 1, se diseñó un taller para ser desarrollado con el software Cabri II Plus II Plus, partiendo de las ventajas que tiene su uso y que fueron descritas en el marco teórico de este documento. Antes y después del taller, se realizó una prueba con el fin de determinar los errores presentes en las respuestas de los estudiantes, según la clasificación propuesta. Aprovechando que cada pregunta del taller estaba relacionada con alguna de las competencias mencionadas, las respuestas del taller fueron valoradas para determinar el porcentaje de respuestas correctas y el nivel alcanzado en cada competencia.

Resultados pre-prueba y pos-prueba

La pre-prueba y la pos-prueba fueron presentadas por 29 estudiantes. La tabla 1 muestra los resultados de cada una de las pruebas, indicando el número de estudiantes que tuvieron respuestas correctas (1), incompletas (0.5) o incorrectas (0).

Tabla 1

Frecuencia de respuestas correctas, incompletas e incorrectas de la pre y la pos prueba

Pre-prueba	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
0	6	8	11	3
0,5	18	10	2	9
1	5	11	16	17

Pos-prueba	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
0	2	1	9	3
0,5	18	9	3	4
1	9	19	17	22

La tabla 2 muestra los resultados de las pruebas, especificando el error asociado a cada una de las preguntas, el puntaje obtenido en cada pregunta (sobre un puntaje de máximo de 29 por pregunta) y el porcentaje de respuestas correctas de cada pregunta.

Para calcular el error, se obtuvo el porcentaje de respuestas incorrectas de los estudiantes, al hacer la diferencia entre 29 y el número de respuestas correctas; posteriormente, se hizo el promedio entre las preguntas que estuvieran relacionadas con el mismo tipo de error.

Tabla 2

Resultados de la pre-prueba y de la pos- prueba

Pre-prueba	Pregunta	Tipo error	Puntaje	Porcentaje		
	1	1	14	48%	Puntaje total	59%
	2	1	16	55%	error 1	48%
	3	3,4	17	59%	error 3	34%
	4	3,4	21,5	74%	error 4	34%
Pos-prueba	Pregunta	Tipo error	Puntaje	Porcentaje		
	1	1	18	62%	Puntaje total	72%
	2	1	23,5	81%	error 1	28%
	3	3,4	18,5	64%	error 3	27%
	4	3,4	24	83%	error 4	27%

Respuestas del taller

La tabla 3 muestra el resultado de las respuestas al taller de 29 estudiantes presentando el porcentaje de respuestas correctas a cada una de las preguntas del taller. Cada una de las preguntas del taller, buscaba promover una competencia. A continuación, se presenta el porcentaje en el que se presentó cada competencia, al promediar el porcentaje de respuestas correctas de las preguntas asociadas a cada competencia:

Tabla 3

Porcentaje de respuestas correctas del taller y promedio de competencia por pregunta

Pregunta	Porcentaje respuestas correctas	Competencia	Pregunta	Porcentaje
1	67%	C1	1,2,3,4,5,6	77%
2	90%	C2	2,3,5	78%
3	82%	C4	2,3,4,5	79%
4	83%	C5	1	67%
5	63%			
6	76%			

Análisis resultados fase 2

El promedio de la calificación obtenida por los estudiantes, antes y después de la intervención, aumentó 13%, es decir que los estudiantes están contestando mejor después de resolver el taller. De igual forma, hay un aumento en el porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes en la pos-prueba.

Al parecer, la intervención permite disminuir notoriamente los errores asociados a una dificultad conceptual (errores 1 y 2) y disminuye, en un porcentaje menor, los errores relacionados a dificultades cognitivas (errores tipo 3 y 4).

Es posible suponer, que es más sencillo corregir errores relacionados con la naturaleza de los conceptos del Álgebra Lineal que los relacionados con el tipo de pensamiento requerido para aprender Álgebra Lineal. Lo anterior podría ser explicado, gracias a la posibilidad que tienen los estudiantes de visualizar y manipular vectores, por ejemplo, al usar Cabri II Plus.

La intervención planteada, al parecer, permite que los estudiantes respondan de forma correcta preguntas relacionadas con las competencias sugeridas para aprender Álgebra Lineal. Es interesante ver que los estudiantes responden las preguntas relacionadas con el pensamiento y razonamiento matemático en un porcentaje alto.

Validez del estudio

Las estrategias que permitieron darle validez al estudio fueron: revisión por expertos de los cuestionarios de las encuestas y del cuestionario del taller, se hicieron varios ajustes según estas revisiones. Se realizó una revisión del contenido de las pruebas y del taller, según el nivel de los estudiantes y los contenidos estudiados en el curso. La intervención, es decir el desarrollo del taller, fue controlada ya que los estudiantes desarrollaron el taller de forma individual y sin asesoría externa de ningún tipo.

Limitaciones del estudio

El presente estudio presenta las siguientes limitaciones: no se tuvo un grupo de comparación, para poder determinar si el tratamiento es más efectivo o no respecto a otras metodologías para enseñar Álgebra Lineal. En el presente estudio no fue posible determinar, con certeza estadística, qué causó que se redujera el error y se promovieran las competencias para aprender Álgebra Lineal. Aunque la población que contestó las pruebas y los talleres fue mayor, fue necesario eliminar algunos elementos de la muestra ya que no contestaban la pre-prueba y la pos-prueba, o contestaban el taller de forma incompleta.

Conclusiones e implicaciones a futuro del estudio

Hay dos tipos de dificultades presentes, en los estudiantes de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes: las conceptuales y las cognitivas. Las primeras están asociadas con la naturaleza de los objetos del Álgebra Lineal; las segundas, surgen por el tipo de pensamiento necesario para estudiar Álgebra Lineal. Es recomendable revisar el tipo de lectura que los estudiantes del curso están usando, ya que en la muestra analizada, se encontró que los estudiantes no leen, no preparan clase y realizan muy pocos ejercicios relacionados con los contenidos del Álgebra Lineal.

El alto nivel del formalismo y del lenguaje empleado por el profesor en la clase, representa una dificultad para que el estudiante aprenda Álgebra Lineal, ya que no está familiarizado con algunos elementos como las demostraciones o elementos de la lógica matemática.

El uso de Cabri II Plus II Plus contribuye a disminuir los errores conceptuales de los estudiantes de Álgebra Lineal, al permitirles construir objetos como vectores en un espacio como R^2. Al revisar las respuestas del taller, se pudo determinar que el uso de Cabri II Plus II Plus permite que los estudiantes reconozcan propiedades de los objetos estudiados en Álgebra Lineal, como la suma asociativa de los vectores, o la multiplicación por escalar de los vectores, al poder visualizar como cambian los objetos según estas propiedades. Este hallazgo representó el punto de partida, para determinar si era posible tener resultados similares con otras propiedades, por ejemplo con las asociadas a una transformación lineal en R^2.

El presente estudio hace parte de una tesis de Maestría en Educación de la Universidad de los Andes sobre las concepciones de los estudiantes de Álgebra Lineal. Se pretende determinar cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto de Transformación Lineal en R^2 y si el uso de una intervención como la analizada en este estudio, permite o no promover el aprendizaje de este concepto. Para lograr esto, se están analizando los resultados de dos talleres más, relacionados con el concepto de transformación lineal y se espera desarrollar una fase tres, en donde se procederá a verificar si el uso de Cabri II Plus II Plus contribuye al mejor aprendizaje del concepto de transformación lineal en R^2, al tener un grupo experimental y un grupo comparación y contrastar los resultados de dos pruebas.

Referencias y bibliografía

Berenguer, I (2003). Modelación Didáctica de la Representación y su formación en el Proceso de Resolución de Problemas. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa*, 16,530-536.

Delgado, R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de la Habana, Cuba.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Álgebra. En J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Álgebra*. 85-124.

Dorier, J. & Sierspinska, A. (1999). Research into the teaching and learning of linear Álgebra. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* 255—273.

Harel, G. (2000). Two Dual Asertions: The first on Learning and the second on Teaching (or viceversa). *The American Mathematical Monthly*,105,(6).

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana-Experiencia en el Álgebra Lineal.* Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de la Habana, Cuba.

Jiménez, H. (2000). *Propuesta para mejorar la referencia y aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de la Habana, Cuba.

Labraña, A., Plata, A., Peña, C., Crespo, E. y Segura, R. (1995). Álgebra Lineal. Resolución de Sistema Lineales. Madrid: Síntesis

Macias, L., & Portillo, E.(2006). Transformaciones Lineales con Cabri II Plus. *III Congreso Iberoamericano de Cabri*. IBEROCABRI 2006

Mateus, J. (2008). *La enseñanza aprendizaje del Álgebra: Una concepción didáctica mediantes sistemas informáticos*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de la Habana, Cuba.

Niss, M. (2002). Mathematical Competencies and the learning mathematics: the Danish KOM Project. IMFUFA, Roskilde University, Denmark.

Nuñez, R. (1999). *La problematización del contenido en el proceso de formación del licenciado en Matemática en Cuba.* Tesis Doctoral en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de la Habana.

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo Algebraico.* Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España.

Ortiz, J., Rico, L. & Castro, E. (2008). La Enseñanza del Álgebra Lineal Utilizando Modelización y Calculadora Gráfica. Un Estudio con Profesores en Formación. *PNA*, 2,(4), 181-189

Pérez, J. (1996). Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas, *Actas del ICME-8, Sevilla*, Conferencia Ordinaria, 345-368.

Radatz, H., (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 3, pp. 163-172.

Sierspinska, A. (1996). Razonamiento analítico versus razonamiento sintético en Álgebra Linealo cómo un problema de comunicación se convierte en un problema de significado, en *Investigación y Didáctica de las Matemáticas,* Luis Puig y Juan Calderón (edts), M.E.C.,47-65.

Sierspinska, A, Dreyfus, T, Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear Álgebra: the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19,(1), 41-76.

Apéndice A: Preguntas del taller

1. En esta construcción encuentra un conjunto de vectores. Por favor, arrástrelos de un lado a otro, en diferentes direcciones. a)¿Cuándo es posible decir que dos vectores son iguales? b)¿Qué características comunes encuentra en cada uno de los vectores? c)¿Qué es necesario hacer para que los vectores 1 y 2 sean opuestos? d) Construya un vector, ¿Qué pasos siguió?

2. Se tienen dos vectores AB y BC, y su vector suma AC. Por favor, mueva los orígenes y los extremos de todos los vectores, es decir los puntos A, B y C. Observe el comportamiento de la suma de dos vectores. ¿Puede conseguir que el vector suma valga cero moviendo los puntos A o C? ¿Por qué?

3. Se tienen dos vectores, OA y OB, y su vector suma obtenido aplicando la regla del paralelogramo. Mueva los extremos A y B y observe el comportamiento de la suma de los vectores. Por ejemplo, observe qué sucede cuando los dos vectores forman un ángulo obtuso. ¿Puede conseguir, con la regla del paralelogramo, que la suma de los vectores valga cero? ¿Para qué ángulo se da esta situación?

4. En esta construcción, encuentra los vectores a, b y c. Encuentra, además, las siguientes sumas de vectores: (b+c) y (a+b). Observe con atención, los vectores (a+b)+c y a+(b+c). Por favor, desplace los vectores a, b y c. a)¿Cómo son los vectores (a+b)+c y a+(b+c)b). A partir de lo anterior, ¿Qué puede concluir sobre la suma de vectores?

5. Esta construcción permite visualizar algunas propiedades con el producto escalar de dos vectores. a) Calcule el producto escalar de dos vectores, determinando su norma y el ángulo que forman entre ellos. Para hacer su cálculo, use la calculadora de Cabri II Plus. b) Compruebe que el producto escalar puede ser negativo. c) Trate de obtener una situación en la que el producto escalar coincida con el producto de los módulos, es decir $u \cdot v = |u|\,|v|$ d) ¿Y una situación en la que $u \cdot v = -|u|\,|v|$?

6. En esta construcción, el vector a es fijo y es posible variar la longitud del vector b al desplazarlo sobre la recta de color verde. Modifique la longitud del vector b y responda lo siguiente: a) ¿Qué sucede con el producto escalar entre los vectores al variar la longitud de b? b) ¿Qué pasa si en un producto escalar multiplicamos uno de los dos vectores por un escalar r? c) ¿Qué puede concluir de lo anterior?