O Estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau um enfoque na resolução pelo método de Bezout no Tratado de Álgebra Elementar de José Adelino Serrasqueiro

Enoque da Silva **Reis**
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Brasil
espoquer1@hotmail.com

Resumo

O objetivo desse artigo é divulgar um recorte de uma pesquisa em nível de mestrado, cuja finalidade foi o estudo de sistemas de equações algébricas do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. As fontes utilizadas foram: um livro didático adotado no Colégio Pedro II e um livro contemporâneo, assim como, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as resenhas do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD - 2008) e programas de estudos do Colégio Pedro II. Para estudar esse objeto, a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard foi adotada como referencial teórico, e utilizamos uma abordagem metodológica baseada na Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Além desses referenciais, usamos experiências absorvidas a partir de leituras e análises de pesquisas que de alguma forma caminham paralelamente a nosso objeto de estudo.

Palavras Chave: Praxeologia. Livro Didático. Sistemas de Equações do Primeiro Grau.

Considerações Iniciais

O trabalho no qual está inserido esse recorte, tem como objeto de pesquisa: **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras.** Diante desse objeto de estudo traçamos um objetivo principal que expressamos da seguinte forma: Analisar como era proposto o ensino de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados na primeira república do Brasil (1890-1930), e como é proposto hoje nos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental.

Na necessidade de traçar um caminho a ser percorrido para alcançarmos o objetivo principal descrito anteriormente, delineamos os seguintes objetivos específicos; 1 conhecer o estatuto atribuído ao estudo de sistemas de equações nas leis e programas do período (1890 – 1930); 2 analisar nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e no Guia do Livro

Didático elementos referentes a sistemas de equações; 3 Investigar as estratégias de ensino de sistemas de equações em livros didáticos de matemática utilizados no ensino secundário brasileiro no período de 1890 – 1930 e 4 Caracterizar aspectos matemáticos e didáticos propostos para o ensino de sistemas de equações em livros didáticos contemporâneos.

Referencial Teórico

Entendemos que de acordo com Chevallard (1999) toda prática institucional pode ser analisada num sistema de tarefas que se constituem dentro de uma determinada Praxeologia que permite modelar o conhecimento. Temos assim um esquema da seguinte forma [T_1, τ_1, θ, Ξ], na qual T_1 é o tipo de tarefa, τ_1 é a técnica aplicada para solucionar este tipo de tarefa, θ é a tecnologia que justifica a técnica aplica, e por último temos Ξ que é a teoria na qual se baseia a tecnologia. Portanto, este esquema fornece instrumentos para analisar o saber/fazer do professor utilizando paralelamente a noção de momentos de estudo ou momentos didáticos, que em determinados tipos de situações estão presentes, mesmo que ocorram de uma maneira variada na intenção de determinar uma certa organização matemática na sala de aula. No entanto, temos seis momentos distintos no qual são propostos de forma arbitraria, pois, estão ligados a realidade formal e não a cronológica. Entendemos que a análise dos itens acima proporciona a caracterização da praxeologia de uma determinada instituição. Em nosso caso estamos falando da instituição “Livro Didático”, e dessa forma utilizamos a quádrupla e os momentos de estudos para analisar a praxeologia do autor do livro referente a proposta de ensino dos sistemas de equações, e em particular nesse artigo referente a parte de resolução de sistemas de equações do primeiro grau pelo método de Bezout.

Método e Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

Conforme nosso entendimento a cerca de reflexões realizadas por meio de leitura dos escritos de Laurence Bardin, a análise de conteúdo é a reunião de técnicas de análise das formas comunicacionais, e consequentemente tem como objeto de estudo a linguagem. Seu objetivo é obter a partir de um conjunto de elementos (técnicas) a descrição do conteúdo de uma determinada mensagem e assim permitindo a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção dessas mensagens.

Análise de conteúdo

Conforme Laurence Bardin, a organização da análise é realizada através de três fases cronológicas, as quais passaremos a descrever.

A primeira fase é a da pré-análise - é considerada como o momento na qual o autor organiza as ideias a cerca de sua pesquisa, realiza a escolha das comunicações que serão analisadas, é também nesse momento que se formula a hipótese e os objetivos, assim como se elaboram os indicadores que fundamentam as interpretações posteriores.

De acordo com Bardin a cerca da exploração do material é mencionado que: “Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração em função de regras previamente reformuladas.” (BARDIN, 2006 p.95)

Por fim, o tratamento dos resultados obtidos e interpretação, já que sabemos que os dados em bruto não tem significado nenhum, cabe assim ao pesquisador tratá-los de maneira a serem significativos ou válidos. Em outras palavras, cabe utilizar uma metodologia acoplada a uma teoria para levantar pontos significativos nos materiais analisados.

Procedimentos de nossa pesquisa

Em seguida passamos a descrever o caminho percorrido para a realização dessa pesquisa, ressaltamos que nosso objeto está em torno do estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados no ensino brasileiro. A partir de agora, descrevemos os procedimentos da pesquisa nessas fontes de influência de ensino de sistemas de equações.

A pesquisa nos Livros Didáticos

Para o estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos, inicialmente delimitamos como fonte da pesquisa dois livros, um adotado no colégio Pedro II no período da primeira república e um contemporâneo. Nosso foco com a escolha dessas fontes é de fazer um estudo dos sistemas de equações.

Para escolher estes livros, em primeiro lugar o livro contemporâneo, o passo inicial foi fazer uma leitura flutuante das resenhas do Guia do PNLD. Em seguida a escolha permeou os elogios a cerca do ensino de álgebra, equações e sistemas de equações. Nossa estrutura de análise, inicialmente adotou alguns dos critérios estabelecidos no próprio Guia de Livros Didáticos – 2008. Esses critérios dizem respeito, principalmente à metodologia e aos conteúdos. Assim, optamos pelos livros considerados como “bem avaliados” pelas resenhas, nos seguintes critérios: 1) seleção e distribuição de conteúdos; 2) abordagem dos conteúdos dos cinco blocos: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; e tratamento da informação; 3) Metodologia de ensino-aprendizagem; 4) Contextualização; 5) Formação da cidadania; 6) Linguagem.

No que tange a escolha do livro antigo, tomamos como fonte a importância e a credibilidade conquistada pelo colégio Pedro II, assim escolhemos o exemplar adotado que foi utilizado por mais tempo por essa instituição no período da primeira república.

Elementos de Análise

A análise das técnicas usadas para resolver os sistemas de equações foi conduzida por nós com a intenção de sempre procurar compreender as diferentes maneiras de realizar o estudo dessa parte da álgebra escolar. Nesse sentido, vamos procurar apresentar a técnica de uma forma bem detalhada.

Tipo de tarefa T_1 - Resolver Sistemas de Equações do Primeiro Grau que contenha o número de equações igual ao número de incógnitas.

Nesse tipo de tarefa, foram reunidas as tarefas cujos enunciados levam o estudante a encontrar a solução de um sistema de equações algébricas lineares do primeiro grau que contenha duas ou três equações e consequentemente duas ou três incógnitas.

Organização Matemática

Para propor o ensino da resolução desse tipo de tarefa T_1 o autor organiza de forma sequencial seis tarefas desse mesmo tipo. O próprio autor logo após enunciar cada uma delas explicita a sua resolução. Em seguida define soluções positivas da seguinte forma:

> As soluções positivas satisfazem sempre as equações, mas nem sempre satisfazem ao problema, em virtude de certas condições que não se podem exprimir por meio de equações. Assim, as soluções positivas não satisfazem ao problema, quando, admitindo esta, somente soluções inteiras, as equações dão para as incógnitas valores fracionários; ou então, quando a natureza do problema marca certos limites para o valor das incógnitas, e os valores obtidos excedam esses limites. (SERRASQUEIRO p. 163)

Segue então dois exemplos de soluções positivas, em seguida define as soluções negativas e conclui-se o seguinte:

> Uma solução negativa denota que a grandeza, representada pela incógnita, se deve tomar em sentido contrário d'aquele em que se tomou; porém se essa grandeza não for susceptível de se tomar em dois sentidos opostos, a solução negativa denota que o problema é impossível. N'esse caso, se quisermos verificar o enunciado do problema, devemos mudar x em –x na equação; e depois devemos transformar o enunciado do problema de modo que corresponda a nova equação. (SERRASQUEIRO p. 167)

Para finalizar sua organização matemática, ele faz menção a respeito da solução infinita que é considerado pelo autor como a indicação em geral da impossibilidade das equações e dos problemas que lhe deram origem.

Agora passamos a descrever os passos da técnica proposta pelo autor, assim como seus elementos tecnológicos.

Técnica τ_1 − Método de Bezout ou das Indeterminadas

Essa técnica é composta de cinco passos sequenciais, são eles: Primeiro passo, multiplicar ambas as equações, cada uma por um fator indeterminado. Passa-se então para o segundo passo, somar a primeira equação com a segunda. O terceiro passo consiste em escolher uma incógnita e igualar seu coeficiente a zero, isola um dos fatores indeterminados, atribui um valor a um deles e obtém o valor do outro. O quarto passo é isolar a incógnita que restar depois de igualar um dos coeficientes a zero e aplicar os valores dos termos indeterminados encontrados no passo três. De posse do valor numérico da incógnita obtida do quarto passo, segue-se então para o quinto e último passo que é: utiliza a primeira equação, substituir para encontrar o valor da segunda incógnita.

Associado a essa técnica, identificamos neste mesmo livro os seguintes elementos tecnológicos: Equações do primeiro grau. Princípio Multiplicativo de equivalência de equações. Sistemas equivalentes. Primeira propriedade das raízes de um sistema de equações. Segunda propriedade das raízes de um sistema de equações.

Aplicando a técnica acima descrita apresentamos a seguir um exercício ilustrativo, resolução de uma tarefa encontrada no livro pg. 146, aplicando a técnica τ_4 de forma a resolvê-la.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 & (I) \\ 9x - 7y = -17 & (II) \end{cases}$$

Primeiro passo: Multiplicar ambas a equações por fatores indeterminados. Nesse caso vamos utilizar *m* para a equação *(I)* e *m'* para equação *(II)*, assim temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \quad \otimes\ m \quad (I) \\ 9x - 7y = -17 \quad \otimes\, m' \quad (II) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3mx + 4my = 26m \quad (I) \\ 9m'x - 7m'y = -17m' \quad (II) \end{cases}$$

Segundo passo: Somar a primeira com a segunda equação.

$$3mx + 9m'x + 4my - 7m'y = 26m - 17m'$$

$$(3m + 9m')x + (4m - 7m')y = 26m - 17m'$$

Terceiro passo: Do passo dois, escolher uma incógnita e igualar seu coeficiente a zero, isolando um dos fatores indeterminados, atribuindo um valor a um deles obtendo o valor do outro.

Nesse caso escolhemos o coeficiente de y, assim temos que;

$$4m - 7m' = 0 \text{ donde } m = \frac{7m'}{4} \text{ atribuindo para } m' = 4 \text{ temos } m = 7$$

Quarto passo: Isolar a incógnita que restar depois de igualar um dos coeficientes a zero e aplicar os valores dos termos indeterminados encontrados no passo 3.

$$(3m + 9m')x = 26m - 17m'$$

$$x = \frac{26m - 17m'}{3m + 9m'} \text{ donde } x = \frac{26X7 - 17X4}{3X7 + 9X4} = 2$$

Quinto passo: De posse do valor numérico da incógnita obtida do passo 4, utilizando a primeira equação, substituir para encontrar o valor da segunda incógnita.

$$3x + 4y = 26, \text{como } x = 2 \text{ temos } 3X2 + 4y = 26 \text{ donde } y = 5$$

Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de τ_1

Com referência aos elementos tecnológicos descritos acima, acreditamos tratar-se de um conteúdo da disciplina de matemática, estudado no que hoje corresponde aos anos finais do ensino fundamental e, mais especificamente, é uma parte do domínio algébrico que é o estudo de sistemas de equações.

Ao analisar como foi conduzida essa organização matemática do livro do autor Serrasqueiro, achamos importante salientar que o autor inicia o tópico *Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas* com o processo de *eliminação por comparação*, em seguida apresenta o *método de eliminação por Substituição*, depois o de *eliminação por redução ao mesmo coeficiente* e o *método de Bezout* e por fim a *regra de Cramer*.

A fim de iniciar a descrição dos elementos teóricos e tecnológicos contidos na técnica descrita, recorremos a páginas anteriores deste mesmo livro onde encontramos o conteúdo de

Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas. Com a intenção de escrever, com as palavras do próprio autor, alguns desses elementos tecnológicos utilizados por ele, iniciamos assim pela definição de equação que se encontra na página 80 que diz o seguinte "*Equação é a igualdade que contém uma ou mais incógnitas, e que somente tem lugar para certos e determinados valores das incógnitas*". Na página seguinte define grau de uma equação da seguinte forma:

> Depois de desembaraçada uma equação dos denominadores desconhecidos e dos radicais que afetam as incógnitas, chama-se grau de uma equação algébrica a soma dos expoentes das incógnitas no termo em que essa soma for a maior."(SERRASQUEIRO, 1929, p.82)

Ressaltamos que o autor para explicar a técnica de resolução utiliza o auxílio de um exercício resolvido, que aqui usaremos como modelo. Após enunciar o exemplo, o autor busca desenvolver a resolução explicitamente mediante o uso da tarefa, e assim justifica cada passo com teorias já enunciadas anteriormente no livro. Dentre elas temos o primeiro princípio relativo à equações simultâneas que o autor descreve como: *"Chamam-se equações simultâneas as que são satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas"* (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120)

E também a primeira propriedade das raízes de um sistema de equações simultâneas, descrito pelo autor da seguinte forma:

> As raízes de um sistema de equações não se alteram, quando se resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas, e se substitui o valor obtido em todas as outras equações do sistema (SERRASQUEIRO, 1929, p.120).

Observam-se ainda na descrição da técnica e dos elementos tecnológicos, mais precisamente nas tecnologias que justificam as técnicas já descritas, os seguintes elementos: Princípio de equivalência aditiva e multiplicativa. Para maior clareza, recorremos ao livro do Professor Jacomo Stávale (1935) - *Elementos de Matemática*, o autor explica que o princípio de equivalência aditiva de uma equação do primeiro grau, consiste em que se somarmos ou subtrairmos dos dois membros de uma equação uma mesma quantidade, consequentemente a equação obtida é equivalente a anterior, nas palavras do autor Serrasqueiro esse princípio é descrito da seguinte forma: *"As raízes de uma equação não se alteram, quando aos dois membros se junta ou tira uma mesma quantidade"* (SERRASQUEIRO, 1929, p.83). Analogamente, o princípio de equivalência multiplicativa consiste em multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por uma mesma quantidade (diferente de zero), assim obteremos uma equação equivalente a anterior. O autor Serrasqueiro descreve esse princípio da seguinte forma: *"As raízes de uma equação não se alteram, quando os dois membros se multiplicam ou dividem pela mesma quantidade diferente de zero, contando que esta quantidade não contenha incógnita"* (SERRASQUEIRO, 1929, p.85).

Organização didática

No que diz respeito à organização didática associada a essa técnica, observamos que para desenvolvê-la, o autor se distancia um pouco de como vinha organizando as outras técnicas. Nesse caso, destacamos que dentre as cinco praxeologias analisadas referentes a esse tipo de tarefa, essa foi a que ele destinou um maior número de páginas, vai do final da 138 a 146. Dividimos então essas oito páginas em sete passos. No primeiro passo ele dá informações sobre esse novo método e diz que sua principal vantagem é eliminar de uma só vez todas as incógnitas menos uma, informação que acreditamos ser bastante oportuna, já que ele explicita a ideia para o aluno deste ser um método bastante eficaz na resolução de sistemas, uma vez que pode despertar no educando o seguinte questionamento: já que aprendi três técnicas de resolução para que aprender mais uma? Caso ocorra esse questionamento o autor já o respondeu até mesmo antes dele ser levantado.

No segundo, ele considera um sistema geral de duas equações e duas incógnitas e aplicando o método o resolve. Como pode ser visto na figura abaixo:

167. Consideremos em primeiro logar as duas equações geraes a duas incognitas:

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c' \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

multiplicando a primeira por um factor indeterminado m, isto é, por um factor, a que podemos dar qualquer valor, vem

$$max + mby = mc,$$

e, sommando esta equação com a segunda, resulta

$$(ma + a')x + (mb + b')y = mc + c' \ldots\ldots\ldots (2).$$

Sendo m um factor indeterminado, podemos dispor d'elle em ordem a tornar nullo o coefficiente de y, isto é, em ordem a tornar

$$mb + b' = 0:$$

e então a equação (2) converte-se em

$$(ma + a')x = mc + c',\ \text{d'onde}\ x = \frac{mc + c'}{ma + a'};$$

substituindo n'esta formula o valor de m, dado pela equação de condição, que é $m = -\frac{b'}{b}$, vem

$$x = \frac{-\frac{cb'}{b} + c'}{-\frac{ab'}{b} + a'} = \frac{-cb' + bc'}{-ab' + ba'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

e d'este modo temos x conhecido.

Para determinar y, dispomos em (2) do factor indeterminado m em ordem a tornar nullo o coefficiente de x, isto é, em ordem a tornar

$$ma + a' = 0,$$

o que converte a equação (2) em

$$(mb + b')y = mc + c',\ \text{d'onde}\ y = \frac{mc + c'}{mb + b'};$$

substituindo n'esta formula o valor de m dado pela equação de condição, que é $m = -\frac{a'}{a}$, vem

$$y = \frac{-\frac{ca'}{a} + c'}{-\frac{ba'}{a} + b'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Figura 01. Resolução pelo Método de Bezout, SERRASQUEIRO, 1929, p. 139

No terceiro passo considera um sistema geral de três equações e três incógnitas também o resolvendo, em nosso entendimento fica claro nesses itens a tentativa de generalizar esse método para quaisquer sistema de duas ou três equações, pois ele utiliza para ambos sistemas genéricos e em sua resolução obtêm, é claro, respostas genéricas. Esse é um dos pontos que diferenciam esta das organizações didáticas referentes às três primeiras praxeologias, já que nelas eram utilizados exemplos numéricos e não exemplos como esses, genéricos. Chamou-nos a atenção o porquê somente nesse método serem utilizados esses exemplos genéricos, acreditamos que a ideia dessa exposição foi realizada dessa forma pelo fato dessa técnica não ir eliminando passo a passo cada incógnita, e sim, eliminar de uma só vez todas menos uma, nesse caso, acreditamos na necessidade de explicar com mais detalhes esses procedimentos assim como explicitar a sua funcionabilidade para qualquer que seja o sistema proposto.

No quarto passo, após realizar a generalização de forma algébrica é realizada uma nova generalização dessa técnica de resolução. No entanto, agora é feita através de um texto, que não contém nenhum número e muito menos alguma incógnita. Isso pode ser visto na figura abaixo:

169. Consiste pois o methodo de Bezout no seguinte:

Multiplicam-se todas as equações menos uma por factores indeterminados, e sommam-se membro a membro, as equações resultantes e a que não foi multiplicada.

Na equação assim obtida egualam-se a zero os coefficientes de todas as incognitas menos uma, d'este modo temos uma equação, em que entra sómente uma incognita do systema proposto, a qual resolvemos; e no valor d'essa incognita substituem-se os valores dos factores indeterminados, dados pelas equações da condição.

Tendo assim determinado o valor de uma incognita, os valores das outras obtêm-se repetindo os mesmos calculos.

Figura 02. Sistematização do método de Bezout na língua materna. SERRASQUEIRO, 1929, p. 143. Grifo nosso.

Nesse ponto observamos certa semelhança com as outras três praxeologias. Após dar um exemplo o autor sistematiza em forma de texto, e nesse caso não foi diferente.

No quinto passo, ele realiza uma aplicação a um sistema particular de três equações resolvendo-as passo a passo. Acreditamos que nessa parte ele tenta mostrar para o aluno que o caso genérico aplica-se a qualquer caso particular, inclusive nesse caso resolvido por ele.

O sexto passo, se caracteriza por ser o ponto que o autor busca explicar o fato de termos sistemas nos quais, aparentemente, não se pode aplicar esse método, no entanto, explica como remediar essa inconveniência, mas enfatiza que o método pode ser aplicado a qualquer sistema. Já no sétimo passo são trazidas por ele algumas variantes do método de Bezout, dizendo que alguns autores adaptam alguns elementos a fim de facilitar a sua aplicação. Em nosso entendimento, ao finalizar esse método explicitando ao leitor a existência dessas variações o autor nos mostra que está bem atualizado quanto às publicações de livros didáticos, e ainda, traz o método proposto por Bezout e a adaptação feita por outros autores explicando ambas ao aluno, nesse ponto deixa a critério do educando qual ele deve aplicar em suas resoluções.

Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Mesmo dividindo a organização didática referente ao ensino dessa técnica, em nossa análise notavelmente observamos apenas a utilização dos mesmos registros de linguagem, utilizados nas técnicas descritas anteriormente. No entanto, ao nos referirmos aos momentos de estudo, ainda predomina a sistematização da técnica, só que ao nos referirmos a τ_1 essa sistematização ainda é mais forte, pois, dos sete passos da organização didática, apenas o primeiro explicita a ideia de que o método de Bezout elimina todas as incógnitas, menos uma. Ainda não é, um momento de institucionalização. Logo os outros seis então voltados à institucionalização da técnica, um que sistematiza a resolução de sistemas com duas equações genericamente, o outro também genericamente sistematiza sistemas com três equações, a sistematização em língua materna, a sistematização a partir de um exemplo particular, sistematização de uma adaptação da técnica e a sistematização de outro exemplo.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

ARICLÊ, Vechia; KARL, M. Lourenz. *Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira: 1850 – 1951*. Curitiba: Ed. do Autor, 1998.

BARDIN, Laurence. *Análise de Conteúdo*. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BOSCH, M. (1999).*Un punto de vista Antropológico: La evolución de los instrumentos de representación en la actividad Matemática***.** IV Simpósio SEIEMIV (Huelva 2000). Ponencia invitada al Seminário de Investigación I, “Representación y comprensión” (Versión preliminar, 30-6-2000). disponível em: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm**.** Acessado em 20/12/2006.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática- 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. Programa Nacional do Livro Didático, 2007. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/download/pnld/editalpnld2007.pdf. >. Acesso em: 08.05.2008.

BRECHENMACHER, Frédéric. Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930). Centro Alexandre Koyré. CultureMATH – Site expert ENS Ulm / DESCO - 20/12/2006. Disponível em: <http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/matrices _index.htm>. Acessado em: 01/2010.

CHEVALLARD, Y. El análiis de las práticas docentes en la teória antropológica de lo didático. Recherches en Didactique des Mathématiques. v.19, no 2, pp.221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

_____. (1999) L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, n. 2, p. 221-266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>. Acesso em 15/06/ 2008.

_____. La transposición didáctica del saber sábio al saber enseñado. Tradução de Claudia Gilman. 3.ed. Buenos Aires: Aique 1998.

_____. Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. V. 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

_____.; BOSCH, M. Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. Artigo publicado na RDM - Recherches en Didactique des Mathématiques, no 19/1, 1999, p. 77-124.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Porto Alegre: Teoria e Educação, n. 2, p. 177-229, 1990.

COIMBRA, Jarbas L. Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Federal do Pará.

GASCÓN, J. La necessidade de utilizar modelos em didática de las matemáticas. Educ. Mat. Pesqui: São Paulo, v.5, n.2, pp.11-37, 2003.

GATTI, Bernardete A. A construção da pesquisa em educação no Brasil. Editora Líber. Brasília: 2006.

GIANFALDONI, Mônica e MOROZ, Melania. Processo de Pesquisa Iniciação. Editora Líber. Brasília: 2006.

LISBANORE, Ana Cristina L. S.. As concepções alternativas de alunos da 8ª série do ensino fundamental sobre o fenômeno do efeito estufa, 2007. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Maringa.

MELLO, Marcelo Soares T. de. Inovações pedagógicas no currículo dos cursos de formação de profissionais da educação física: contribuições teórico-metodológicas da pratica pedagógica, 2003. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Pernambuco.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? Pró-Posições. São Paulo: Cortez, v. 3, n.1[7], p. 39-54, mar. 1992.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

NEVES, Késia C.R. Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das matrizes. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá.

OLIVEIRA, Eliane de; ENS, Romilda T.; ANDRADE, Daniela B. S. F. ; MUSSIS, Carlo R. de. Análise de conteúdo e pesquisa na área da educação. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, V.4, n.9, p.11-27, maio/agosto.2003.

SALDANHA, Vera Peceguini. Didática transpessoal: perspectivas inovadoras para uma educação integral, 2006. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas.

VALENTE, W.R. Uma história da Matemática Escolar no Brasil. São Paulo: Annablueme, 1999.

VALENZUELA, Silvia Terezina F.. O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistemas de equações lineares no ensino fundamental, 2007. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

VECHIA, Ariclê; LORENZ, Karl Michael. Programa de ensino da escola secundária brasileira: 1850-1951. Curitiba: Ed. do Autor, 1998.