INVENCIÓN DE SITUACIONES ADITIVAS CON NÚMEROS ENTEROS

Invention of additive situations with integer numbers

Quevedo Gutiérrez, E.[a], Zapatera Llinares, A.[b] y Lijó Sánchez, R.[c]

[a]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, [b]Universidad Cardenal Herrera CEU y [c] Universidad de La Laguna

Resumen

En esta investigación se estudian las producciones de los alumnos al inventar situaciones aditivas con números enteros. Para ello se analizan las producciones de 266 estudiantes de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Secundaria al transferir la situación aditiva 2 - 3= -1 desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual. Los resultados revelan que el 60% de los alumnos participantes ha sido capaz de describir una situación que se ajuste a la operación, que el alumnado tiende a describir más situaciones aditivas de variación que de comparación o composición de estados y con más modelos concretos de desplazamiento que de neutralización. La mayoría de las situaciones descritas son cortas, con una estructura sintáctica sencilla y un contexto cercano, aunque, aproximadamente, una de cada cinco situaciones resulta incoherente.

Palabras clave: *invención de problemas, números enteros, situación aditiva, transferencias entre dimensiones, modelos concretos.*

Abstract

This research studies the production of the pupils when inventing additive situations with integers. To do this, the productions of 266 students in the 6th year of Primary Education and 1st year of Secondary Education are analyzed by transferring the additive situation 2 - 3 = -1 from the abstract dimension to the contextual dimension. The results reveal that 60% of the participating students have been able to describe a situation that fits the operation, that the students tend to describe more additive situations of variation than of comparison or composition of states, and with more concrete models of displacement than neutralization. Most of the situations described are short, with a simple syntactic structure and a close context, although approximately one in five situations is incoherent.

Keywords: *invention of problems, integers, additive situation, transfers between dimensions, concrete models.*

INTRODUCCIÓN

La invención de problemas, a pesar de ser un componente importante de la resolución de problemas (Kilpatrick, 1987), es una práctica poco habitual en las clases de matemáticas (Castro, 2011; Ruiz-Socolado y Lupiañez, 2022), y no ha recibido una atención explícita en los currículos (Kilpatrick, 1987). Por esta razón, la investigación en este campo ha sido escasa e insuficiente (Ayllón y Gómez, 2014; Ayllón et al., 2016). Sin embargo, en los últimos años se ha iniciado una línea de investigación centrada en la invención de problemas (Castro, 2011; Espinoza et al., 2016; Torregrosa et al., 2021), que aún está lejos de desarrollar su hipotético potencial educativo. De esta forma, investigaciones realizadas en contextos educativos señalan que la invención de problemas mejora determinados procesos de aprendizaje matemático (Ayllón y Gómez, 2014; Ayllón et al., 2016) e insisten en la necesidad de incorporar esta tarea en la enseñanza de las matemáticas (Castro, 2011), en los currículos educativos (Cai et al., 2015) y en programas de formación inicial y continua de profesores (Malaspina, 2016).

Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A. y Lijó Sánchez, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con números enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.

Rudnitsky et al. (1995) compararon tres métodos en la resolución de problemas aditivos con números positivos: 1) método redactar, en el que los alumnos redactan historias y problemas, 2) método resolver, en el que los alumnos resuelven sistemáticamente problemas, y 3) método tradicional, en el que los alumnos resuelven problemas para aplicar las reglas operatorias aprendidas. Observaron que los alumnos que siguieron el método redactar obtuvieron mejores resultados que los que siguieron los otros métodos en una prueba realizada varios meses después de la experiencia.

Investigaciones posteriores extendieron la investigación a la resolución de problemas aditivos con números negativos (Bruno, 2000, 2009) y comprobaron que los métodos redactar y resolver obtuvieron mejores resultados que el método tradicional. Y, aunque no obtuvieron resultados tan positivos como Rudnitsky et al. (1995) en el método redactar, confirmaron que "los problemas que escriben los alumnos son una rica fuente de conocimiento sobre su comprensión de los mismos" (Bruno, 2000, p. 250) y que el método redactar es una alternativa de enseñanza (Bruno, 2009) que necesita ser investigada con profundidad.

La invención de problemas, en esta investigación, se centra en las situaciones aditivas con números negativos, que son un aspecto fundamental en la incorporación de los números, donde el alumno debe romper con la concepción del número como representación de la realidad que ha ido construyendo durante la Educación Primaria (Herrera y Zapatera, 2019) y que le ocasiona muchas dificultades en su aprendizaje (Cid, 2016; Iriarte *et al*., 1991; Zapatera, 2021).

MARCO TEÓRICO

La invención de problemas es un proceso matemático complejo que requiere una contribución personal, original y creativa, y en el que los estudiantes formulan enunciados a partir de situaciones concretas o de problemas dados (Ayllón et al., 2016;Espinoza et al. 2016); además, es una forma eficaz de aprender matemáticas que, incluso puede ser más importante que la propia resolución de problemas (Cai et al., 2015).

Investigaciones en el campo de la resolución de problemas consideran que existe una alta correlación entre las habilidades para comprender, resolver e inventar problemas (Ayllón y Gómez, 2014) y que los alumnos instruidos en la invención de problemas obtienen mejores resultados que los que han recibido una instrucción tradicional (Ayllón y Gómez, 2014; Bruno, 2000; 2009;; Rudnitsky et al., 1995), por lo que la invención de problemas es una herramienta eficaz para la resolución de problemas (Ayllón et al., 2016).

La invención de problemas, además de mejorar la resolución de problemas, contribuye a la construcción del conocimiento matemático (Ayllón y Gómez, 2014), responsabiliza al estudiante en su propio aprendizaje, aumentando su motivación, mejorando su actitud hacia las matemáticas y fomentando la creatividad (Castro, 2011). También contribuye a superar errores (Ayllón et al., 2016) y permite conocer y evaluar las habilidades y la comprensión de los conceptos matemáticos (Cai et al., 2015).

Stoyanova (1998) identifica tres situaciones a partir de las que se pueden formular problemas: situación libre, situación semiestructurada y situación estructurada. En la situación libre, los estudiantes no tienen restricciones para inventar problemas; en la situación semiestructurada, los estudiantes inventan problemas a partir de una experiencia o contexto; y, en la situación estructurada, los estudiantes reformulan problemas dados, cambiando las condiciones o las variables.

Aunque en la mayoría de los sistemas educativos los números enteros se formalizan en la Educación Secundaria, tradicionalmente se introducen a final de la Educación Primaria (11-12 años) con las primeras ideas de negatividad centradas en la ordenación y comparación, en la representación de números en la recta y en la resolución de situaciones aditivas. Esta introducción se realiza, habitualmente, por medio de modelos concretos (Cid, 2016), tanto de neutralización como de desplazamiento.

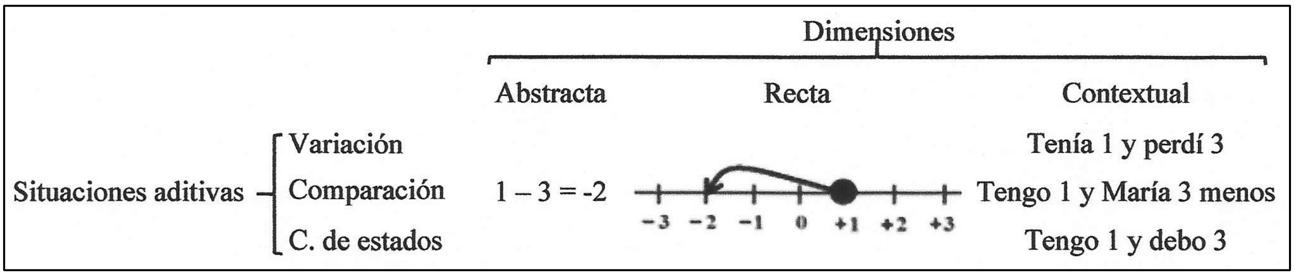
Numerosos investigadores, aunque proponen la utilización de los modelos concretos para introducir los números enteros y su estructura aditiva, consideran que pueden ser un obstáculo para su formalización y para la comprensión de su estructura multiplicativa (Cid, 2016). Pero, si la enseñanza de los números enteros exclusivamente desde los modelos concretos puede acotar su formalización y comprensión, reducirla al plano formal podría conducir a un “formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones” (Iriarte et al., 1991, p. 1).

Una estrategia que permite unificar los planos concreto y formal es la utilización de las tres dimensiones establecidas por Bruno (1997, 2000, 2009) y Bruno y Martinón (1994): abstracta, recta y contextual. La representación de números y operaciones se realiza en la dimensión abstracta, mediante símbolos; en la dimensión recta, mediante puntos y vectores en la recta numérica; y, en la dimensión contextual, mediante situaciones de la vida cotidiana. Una comprensión efectiva de los números implica también el conocimiento de las transferencias entre todas ellas; sin embargo, tradicionalmente, se ha prestado más atención a la transferencia desde la dimensión contextual a la abstracta que de la abstracta a la contextual (Bruno, 1997); es decir, se ha priorizado la resolución de problemas sobre la invención de problemas (Cai et al., 2015).

En esta investigación, las situaciones matemáticas, entendidas como cualquier contexto a partir del cual de desarrolla el conocimiento matemático, se diferencian estructuralmente en (1) situaciones problema, si constan de datos y una pregunta, y (2) situaciones no problema, si contienen datos, pero no la pregunta. Y las situaciones aditivas, relacionadas con problemas aditivos de una etapa, se clasifican semánticamente en (1) situaciones de variación, si expresan el cambio de un estado con el tiempo, (2) situaciones de comparación, si comparan dos estados y (3) situaciones de composición de estados, si expresan dos estados en un mismo momento (Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

En la Figura 1 se presentan ejemplos de situaciones aditivas expresadas en las tres dimensiones

Figura 1. Ejemplos de situaciones aditivas



El objetivo de esta investigación es estudiar las producciones de alumnos de 6º de Primaria y 1º de ESO al inventar situaciones matemáticas con números enteros, cuando transfieren una situación aditiva desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual.

METODOLOGÍA

En esta investigación han participado 266 alumnos de un mismo centro, 127 de 6º de Primaria y 139 de 1º de ESO, a los que sus profesores habían impartido el tema de los números enteros siguiendo las indicaciones curriculares, según su criterio y de forma independiente a la investigación.

Para la recogida de datos, los alumnos debían escribir el enunciado de un problema que se resolviera mediante la operación 2 - 3= -1.

El análisis de las producciones de los alumnos se ha realizado en cuatro fases: análisis matemático, análisis sintáctico y análisis de coherencia. En el análisis matemático se determina la corrección de las producciones y se clasifican en función del tipo de situación (situación problema y situación no problema), del tipo de modelo (desplazamiento y neutralización) y del tipo de situación aditiva (variación, comparación y composición de estados). En el análisis sintáctico se clasifican las producciones en función de su fórmula proposicional y se localizan los nexos utilizados. En el análisis de coherencia se clasifican las situaciones incoherentes en cuatro grupos: (1) situaciones imposibles o sin sentido, (2) situaciones con preguntas mal formuladas, (3) situaciones con expresiones redundantes y (4) situaciones con datos inconexos.

RESULTADOS

Análisis matemático

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en función del tipo de situación, del modelo utilizado y del tipo de situación aditiva. Entre paréntesis se muestra el número de producciones de los alumnos que se ajustan a la operación propuesta.

Tabla 1. Resultados de la invención de situaciones desde la operación 2 – 3 = -1

		Producciones					
		Nº			%		
		6ºP	1ºESO	Total	6ºP	1ºESO	Total
Situación	Situación problema	80 (61)	82 (60)	162 (121)	63 (48)	59 (43)	61 (45)
	Situación no problema	15 (5)	44 (34)	59 (39)	12 (4)	32 (25)	22 (15)
	No situación	6 (0)	2 (0)	8 (0)	5 (0)	1 (0)	3 (0)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
Modelos concretos	Desplazamiento	57 (44)	70 (58)	127 (102)	45 (35)	50 (42)	48 (38)
	Neutralización	38 (22)	55 (36)	93 (58)	30 (17)	40 (26)	35 (22)
	Sin modelo	6 (0)	3 (0)	9 (0)	5 (0)	2 (0)	3 (0)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
Situaciones aditivas	Variación	64 (45)	83 (61)	147 (106)	50 (35)	60 (44)	55 (40)
	Comparación	9 (8)	17 (12)	26 (20)	7 (6)	12 (9)	10 (8)
	C. de estados	19 (13)	24 (19)	43 (32)	15 (10)	17 (14)	16 (12)
	No aditiva	9 (0)	4 (2)	13 (2)	7 (0)	3 (1)	5 (1)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
	Total	127 (66)	139 (94)	266 (160)	100 (52)	100 (68)	100 (60)

El 60% de los alumnos ha descrito una situación matemática ajustada a la operación planteada.

El 61% de los alumnos ha descrito situaciones problema, mientras que el 22% ha descrito situaciones no problema. Del 60% de las producciones que se ajustan a la operación, el 45% son situaciones problema y el 15% son situaciones no problema.

Los alumnos han utilizado más los modelos de desplazamiento que los de neutralización: el 48% frente al 35%. Los modelos de desplazamiento más utilizados son los de temperatura y, en menor cantidad, los de subir-bajar plantas de un edificio; los modelos de neutralización más utilizados son los de tener-deber y los de ganar-perder. Del 60% de las producciones que se ajustan a la operación, el 38% describen modelos de desplazamiento y el 22% modelos de neutralización

La mayoría de las situaciones aditivas son de variación, el 55%, mientras que las comparación y composición de estados son, respectivamente, el 10% y el 16%. También la mayoría de las situaciones que se ajustan a la operación describen situaciones de variación, el 40%, frente al 8% y al 12% que describen, respectivamente, situaciones de comparación y composición de estados.

Los alumnos de 1º de ESO han descrito más situaciones ajustadas a la operación que los de 6º de Primaria: el 68% frente al 52%. Por otra parte, los alumnos de 6º de Primaria han dejado más respuestas en blanco que los de 1º de ESO: el 20% frente al 8%. Los porcentajes de alumnos que describen situaciones problema son similares en ambos cursos; sin embargo, los alumnos de 1º describen más situaciones no problema que los de 6º.

Las relaciones entre situaciones con modelos de desplazamiento y neutralización y entre las distintas situaciones aditivas son similares en ambos cursos, aunque los alumnos de 1º han descrito más situaciones.

En la Figura 2 se muestran ejemplos de producciones de alumnos. Las abreviaturas A y noA se refieren, respectivamente, a situaciones que se ajustan a la operación y situaciones que no se ajustan. Los alumnos están definidos por el curso y el número asignado; por ejemplo, A1.107 corresponde al alumno 107 de 1º de ESO.

Figura 2. Ejemplos de producciones de los alumnos

			Producción	Alumno
Tipo de producción	Problema	A	En Tejada hacían 2°C y por la noche bajó 3°C. ¿Cuántos grados hacía por la noche?	A1.107
		noA	tenia 3€ y me gasté 2€ para comprarme un paquete de chuches ¿cuanto me quedó ahora?	A6.101
	No problema	A	Isabel tiene 2 caramelos pero debe 3	A6.15
		noA	Estoy en la planta 2 y quiero aparcar en la -3	A1.26
	No situación	noA	¿Por qué me quitas caramelos?	A1.38
Tipo de modelo	Desplazamiento	A	En un edificio mi madre bajó 3 pisos. Si estaba en el piso 2, ¿en que piso se ha quedó	A6.78
		noA	La temperatura del agua por la mañana está a 2 y por la noche a -3. ¿Cuál sería la temperatura por la noche?	A1.46
	Neutralización	A	Tengo 2 € y debo 3 €	A6.26
		noA	Federico tiene 2 caramelos pero le debe 5 a su hermana	A1.11
	No situación	noA	Busca la operación 2-3=-1	A6.32
Tipo de situación aditiva	Variación	A	Matilda ~~[illegible]~~ vio que el congelador estaba a 2 grados, cuando volvió, había bajado 3 grados	A1.25
		noA	A Pepe le quitaron 3 estuches	A6.112
	Comparación	A	Hoy hace 2 grados ~~pero~~ mañana va a hacer 3 grados menos ¿A cuántos grados estaremos mañana?	A6.40
		noA	Juan esta en una montaña a 1000m por encima del nivel del mar y Nerea 1001m debajo de Juan	A1.75
	C. de estados	A	Nico tiene dos manzanas y le debe tres a juan ¿cuantas le quedarán?	A1.01
		noA	Tengo 2 € y debo 3€ ¿Cuánto debo ahora?	A6.11
	No aditiva	A	En Dolomites habían 2 grados y la temperatura baja cada minuto 1 grado, en 3 minutos ¿a cuánto ha bajado la temperatura?	A1.90
		noA	Representa esta operación en la recta numérica	A6.73

Análisis sintáctico de las producciones de los alumnos

Para realizar el análisis sintáctico de las producciones se han elaborado y agrupado las fórmulas proposicionales de cada uno de los enunciados descritos por los alumnos.

Las fórmulas proposicionales obtenidas constan de uno o varios datos representados por proposiciones, Pi, y, con frecuencia, de una pregunta representada por Q. Las proposiciones están unidas entre sí mediante nexos de conjunción (∧) y con la pregunta mediante nexos de implicación (→) (Tabla 2).

Tabla 2. Análisis sintáctico de las producciones de los alumnos

Fórmulas proposicionales	Alumnos			Nexos					Total	
	Nº	%		y	pero	, .	si	Otros	Nº	%
P1 ∧ P2 ∧ P3 → Q	11 (3)	4 (1)		14	4	4			22	9
P1 ∧ P2 → Q	149 (118)	56 (44)		92	30	12	15	1	150	64
P1 → Q	2 (0)	1 (0)								
P1 ∧ P2 ∧ P3	7 (2)	3 (1)		6	3	2		1	12	5
P1 ∧ P2	49 (37)	18 (14)		35	12	3		2	52	22
P1	7 (0)	3 (0)								
Q	4 (0)	2 (0)								
En blanco	37 (0)	14 (0)								
Total	266 (160)	100 (60)	Nº	147	49	21	15	4	236	100
			%	62	21	9	6	2		

Las fórmulas proposicionales más utilizadas han sido P1 ∧ P2 → Q, con un 56%, y P1 ∧ P2, con un 18%, que corresponden respectivamente a una situación problema y a una situación no problema. Estas fórmulas también son las que han descrito casi todas las situaciones ajustadas a la operación, un 44% y un 14%, respectivamente.

Los nexos más utilizados han sido el nexo conjuntivo "y" y el adversativo "pero", con un 62% y un 21%, respectivamente. Los nexos yuxtapuestos "," o "." y el condicional "si" han sido utilizados un 9% y un 6%, respectivamente. También han sido utilizados en una ocasión, cada uno de los nexos "desde", "cuando", "contando que" y "después"

De las 166 preguntas realizadas por los alumnos, 150 han sido formuladas de forma directa, 15 de forma condicional y 1 de forma indirecta; de las preguntas condicionales, 8 corresponden a la fórmula "P1 ∧ si P2 → Q" y 7 a "si P1 ∧ P2 → Q"; la pregunta indirecta se encuentra en la respuesta "*Antes debía 2€ pero como he tardado mucho y he pedido 3€. Ahora debo…*" (A6.90)

La media de las palabras de cada una de las producciones de los alumnos, sin contabilizar las respuestas en blanco, es 14,63 (15,16 en 6º y 14,21 en 1º); esta diferencia se debe a la mayor cantidad de situaciones no problemas (sin pregunta) descritas por los alumnos de 1º de ESO.

Coherencia de las producciones de los alumnos

Se han localizado 51 producciones con alguna incoherencia o falta de sentido, aunque algunas de ellas se ajustan a la operación; esta cantidad supone un 19% de todas las producciones y un 22% si no se contabilizan las respuestas en blanco.

En la Figura 3 se muestran ejemplos de cada uno de los cuatro grupos de situaciones incoherentes:

Figura 3. Ejemplos de situaciones incoherentes

Situaciones	Ejemplos	Alumno
Imposibles o sin sentido	tenía 2 años y me quitaron 3 años cuantos años tengo	A1.02
Con preguntas mal formuladas	Antes tenía 3 caramelos y ahora tengo ¿¿Qué ha pasado?	A6.96
Con expresiones redundantes	Tengo 2 € y debo 3€ ¿Cuánto debo ahora?	A6.11
Con datos inconexos	+ Laura le han regalado 2 cartas y a Elena debe una carta	A1.77

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación era estudiar las producciones de los alumnos al inventar situaciones matemáticas con números enteros. Para ello se han analizado las producciones de 266 alumnos de Educación Primaria y 1º de ESO al transferir la situación aditiva 2 - 3= -1 desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual.

El 60% de los alumnos, sin haber recibido instrucción específica, han sido capaces de describir situaciones matemáticas, en forma de problema o no, ajustadas a la operación; además, este porcentaje aumenta del 52% en los alumnos de 6º de Primaria al 68% en los de 1º de ESO, de lo que se podría inferir que es una capacidad que aumenta con la enseñanza y el conocimiento.

Los alumnos de 1º de ESO han descrito más situaciones no problema, es decir, sin pregunta, que los de 6º de Primaria; quizá lo han hecho por economizar recursos, al considerar que era suficiente solo con exponer los datos. Por el contrario, los alumnos de 6º han dejado más respuestas en blanco, al estar menos familiarizados con este tipo de tarea.

Los alumnos tienden a utilizar más los modelos de desplazamiento que los de neutralización, y más las situaciones de variación que las de comparación y composición; quizá, debido a que el modelo de desplazamiento y la situación de variación son más intuitivos y les resultan más comprensibles.

Se ha observado poca variedad de contextos, quedando reducidos, casi exclusivamente a temperaturas, plantas de un edificio, tener-deber y ganar-perder; podría ser efecto de una enseñanza demasiado repetitiva y poco imaginativa.

Sintácticamente, describen situaciones formadas por dos datos y una pregunta, aunque algunos, especialmente de 1º de ESO, han obviado la pregunta. Mayoritariamente han usado el nexo conjuntivo “y”, aunque también han usado el nexo adversativo “pero”. El número de palabras utilizado en cada situación es muy reducido, quizá, también, por economizar recursos.

Aproximadamente, en una de cada cinco situaciones descritas se ha localizado alguna incoherencia; se podría inferir una enseñanza alejada de la realidad o una falta de atención por parte de los alumnos al describir situaciones imposibles, irreales y, a veces, absurdas. Además, las expresiones redundantes indican una falta de comprensión de la dualidad del signo menos, unario y binario, que denota un lenguaje artificial.

La invención de problemas es una capacidad latente en los alumnos que puede mejorarse con la práctica. Aunque en este trabajo nos hemos limitado a estudiar las producciones de los alumnos a partir de una situación muy concreta, la operación 2 – 3 = -1, que involucra la utilización de números con signo, consideramos que la invención de problemas necesita más investigación para desarrollar todo su potencial didáctico y comprobar que es una herramienta eficaz para aprender matemáticas (Cai et al., 2015), resolver problemas (Ayllón et al., 2016), construir conocimiento (Ayllón y Gómez, 2014), aumentar la motivación y creatividad (Castro, 2011), comprender conceptos matemáticos (Cai et al., 2015) y, en nuestro caso, contribuir a la incorporación de los números enteros.

Referencias

Ayllón, M. F., Gallego, J. L., y Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51–67. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.575888.

Ayllón M. F., y Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *EA, Escuela Abierta*, *17*, 29-40. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.03

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, *29*, 5-18.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *Revista EMA*, *5*(3), 236-251.

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(2), 87-103.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *SUMA, 18*, 39-48.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, 3-34. Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 1-15.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Espinoza, J., Lupiáñez, J., y Segovia, I. (2016). Un estudio de los problemas inventados por estudiantes de secundaria en España. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 23*(23), 85-101.

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(4), 197-220.

Iriarte, M. D., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA*, *7,* 13-18.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? *Cognitive Science and Mathematics Education*, 123-147.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 15*, 321–331.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser, y T.A. Romberg (Eds.) *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 25-38.

Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, S. J., y Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, JRME, *26*(5), 467-486. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.5.0467

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L. (2022). Análisis de una tarea de invención de problemas realizada por alumnos con talento matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 519-527). SEIEM.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. *Research in Mathematics Education: a Contemporary Perspective*. 164-185.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 – 602). Valencia: SEIEM.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in additions and subtraction problems. *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 39-59.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. En A. Rojas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías diversas, 8*, 121-135. Editorial Lectorium.