XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

A álgebra e suas diferentes manifestações

Magno Luiz Ferreira
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
Magno.ferreira@ifrj.edu.br

Resumo

Esta oficina trata de apresentar manifestações distintas da álgebra. Com base nas teorias de concepções de álgebra (Usiskin, 1988/1995), concepções de educação algébrica (Fiorentini, Fernandes & Cristóvão, 2005) e de tendências de caracterizações da atividade algébrica (Lins & Gimenez, 1997), temos a intenção de abrir um espaço de discussão sobre álgebra e seu ensino. Desejamos proporcionar ao participante o inicio de um processo de conhecimento de suas próprias crenças e concepções sobre álgebra e ensino de álgebra. Além disso, através de discussão conjunta sobre exercícios que lidam com diferentes abordagens e soluções, nós pretendemos apresentar ao participante formas de identificar quais situações escolares podem se caracterizar por certas crenças ou concepções de álgebra e/ou educação algébrica.

Palavras-chave: álgebra, crenças e concepções, ensino de álgebra.

Introdução

O ensino de álgebra tem sido muito discutido nos últimos tempos. Existe uma série de tentativas de torná-lo mais significativo para os estudantes, de modo que estes possam se sentir mais estimulados durante o processo educativo. Um bom exemplo dessas tentativas é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionas [PCN] (Brasil, 1998). Além disso, podemos destacar algumas questões relevantes como: No que diz respeito à álgebra, qual a influencia que os livros didáticos têm sobre os professores de matemática? (Santos, 2007). Quais os erros mais comuns na aplicação de métodos de resolução de equações? (Freitas, 2002). Quais as crenças e concepções sobre álgebra e ensino de álgebra alguns professores apresentam? (Ferreira, 2009).

É fato que estas perguntas nos proporcionam um norte para novas investigações. Além disso, estas questões reforçam a ideia de que nós, professores de matemática, precisamos estar conscientes de nosso modo de pensar tanto sobre a disciplina em si quanto sobre seu ensino para poder compreender as complexidades do processo educativo. Quem sabe assim poderemos mudar algo ou melhorar os processos de ensino de matemática.

Esta oficina é mais um esforço na busca por respostas para a última pergunta que apresentamos anteriormente (Ferreira, 2009). Desta forma, propomos o mesmo com o objetivo de procurar ajudar os professores a conhecer melhor suas próprias crenças e concepções sobre álgebra e ensino de álgebra, de modo que os mesmos tomem conhecimento das diferentes manifestações deste campo da matemática.

Acredita-se que a tomada de consciência destas manifestações, tanto quanto das próprias crenças seja de grande valor para os professores, os quais poderão perceber o modo como diferentes abordagens sobre o ensino de álgebra geram novas inquietações nos alunos. Para isso, compartilharemos com os professores algumas teorias que consideramos importantes: 1) as concepções sobre álgebra descritas por Usiskin (1988/1995); 2) as caracterizações da atividade algébrica, descritas por Lins e Gimenez (1997); e 3) as concepções sobre educação algébrica, descritas por Fiorentini et al. (2005). Além destas, também apresentaremos algunas visões sobre matemática descritas por Ernest (1989): matemática como um instrumento; matemática como corpo estático e unificado do conhecimento; matemática como campo da criação humana em grande e constante expansão. A escolha por compartilhar estas visões sobre matemática se deve ao fato a álgebra ser um campo da mesma. Com estas teorias pretendemos contribuir para uma tomada de consciência sobre as diferentes manifestações da álgebra e de como suas próprias crenças se relacionam com estas manifestações.

Referencial teórico

Nesta parte apresentamos os aportes teóricos que nos ajudarão durante a realização das atividades da oficina, as quais apresentaremos na próxima seção. É importante destacar que estamos interessados nas características que diferenciam cada manifestação de álgebra para que seja possível distinguir os conteúdos analisados.

As quatro concepções de álgebra segundo Usiskin (1988/1995)

A) Álgebra como aritmética generalizada - Como o nome já diz, esta concepção representa o entendimento da álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos (Usiskin, 1988/1995). Em outras palavras, os objetos algébricos são compreendidos como sendo resultado da ampliação das ideias da aritmética. Exemplo: Mostrar, através de uma sucessão de casos particulares, que o número mínimo de movimentos para resolver o problema da Torre de Hanói é sempre da forma $2^n - 1$, com n sendo o número de disco envolvidos no quebra-cabeça.

B) Álgebra como estudo de métodos para resolver certos tipos de problemas - Talvez esta seja a manifestação de álgebra mais comum durante as aulas de matemática. Segundo Usiskin (1988/1995), esta concepção trata de compreender quais os procedimentos se deve usar para resolver certos problemas relacionados à álgebra, sejam eles contextualizados ou não. Exemplo: A soma de alguns números, em progressão aritmética de razão 4, é 300. Sabendo que o menor desses números é 3 e o maior é 47, responda quantos são os números envolvidos na soma? Para resolver esse problema só precisaríamos lembrar da fórmula para soma: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Com isso aplicamos os procedimentos necessários: $300 = \frac{(3 + 47)n}{2} \rightarrow 300 = 25n \rightarrow n = 12$.

C) Álgebra como relação entre grandezas - O estudo das funções é, provavelmente, o maior representante desta concepção, a qual explora o estudo de como as grandezas se relacionam (Usiskin, 1988/1995). Exemplo: Um carro de fórmula 1 faz um treino em um circuito cujo percurso, após todas as voltas, soma 500 km. Sabendo que o piloto sempre mantém a velocidade do carro constante, determine a expressão que fornece o tempo de percurso em função da velocidade? Para resolver este tipo de problema é preciso perceber quais são as quantidades relacionadas *(neste caso, velocidade e tempo)*, em seguida descobrir como essa relação acontece *(neste caso, precisamos lembrar que a unidade de velocidade é km/h e entender que a cada hora o carro avança a mesma distância)* e com isso é possível chegar à forma genérica T = 500/V, com T e V sendo tempo e velocidade.

D) Álgebra como estudo de estruturas - De acordo com Usiskin (1988/1995), esta concepção trata de entender quais as percepções matemáticas, tais como equivalências entre expressões, simplificações e outras atitudes matemáticas podem ser úteis ou não para resolver os problemas em álgebra. Exemplo: Para fatorar a expressão $x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, precisamos perceber que $\frac{b}{2a}x = 2\frac{b}{4a}x$.Com isso podemos notar que a expressão trata-se de um quadrado do binômio $x + \frac{b}{2a}$.

As quatro caracterizações da atividade algébrica segundo Lins e Gimenez (1997)

a) Tendência letrista (caracterização pela evolução histórica de algumas notações) - Segundo Lins e Gimenez (1997), o Brasil é um país muito influenciado por este tipo de caracterização da atividade algébrica. A ideia principal dessa tendência é descrever a álgebra através do processo histórico de desenvolvimento das notações algébricas. Além disso, os autores ressaltam que essa tendência apresenta uma falha de se limitar a discutir assuntos praticamente exclusivos do ambiente escolar. Além disso, essa caracterização não dá conta de todo o processo de desenvolvimento da álgebra. Exemplos: Se a + b = 10, então 10 – a – b = 0. No entanto, observe que por traz desta atividade está ideia de que o 8 representa uma soma de dois números, também representados por “e” e “f”.

b) Tendência conteudista (caracterização pela presença de certos conteúdos) - Talvez esta seja a caracterização mais simplista dentre as quatro que estamos apresentando aqui. Lins e Gimenez (1997) comentam que esta tendência se limita a descrever a álgebra a partir de uma lista de objetos matemáticos que são de alguma forma julgados como álgebra. Acreditamos que, além de simplista, esta forma de caracterizar a atividade algébrica não é precisa, pois os objetos matemáticos que seriam objetos de estudo da álgebra podem mudar de pessoa para pessoa, de acordo com suas visões e concepções acerca dos conteúdos abordados. Exemplos: equações, polinômios, funções... Aqui está o motivo pelo qual acreditamos que esta tendência seja um tanto simplista. Estamos fazendo uma lista de conteúdos que acreditamos que seja álgebra, apenas baseados na intuição.

c) Tendência de ação (caracterização como resultado da ação do pensamento formal) - Segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento formal consiste em refletir sobre as operações, ou seja, pensar nas conseqüências que estas operações podem trazer para o problema em questão. De acordo com os autores o lado mecânico da atividade algébrica não estaria sendo contemplado por essa caracterização. Isso nos mostra que esta caracterização também não contempla tudo aquilo que os autores tentam apresentar como atividade algébrica. Lins e Gimenez (1997) apresentam uma limitação desta caracterização no seguinte trecho:

> Parece-nos que essa abordagem também deixa coisas demais de fora. Por exemplo, se uma

> criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o *status* de atividade algébrica? (p. 100)

É importante destacar que essa caracterização se diferencia das outras duas na maneira de tratar o assunto. As tendências letrista e conteudista se caracterizam por "julgar" que objetos são foco de estudo de álgebra. Por outro lado, a tendência de ação se caracteriza mais por "julgar" quais situações são de fato álgebra. Exemplo: Ao resolver a equação $x^2 - 9 = 0$ seguir um raciocínio do tipo: O único número cuja diferença para 9 seja zero é o próprio 9. Portanto x^2 precisa ser 9. Daí nos perguntamos qual o número que elevado ao quadrado gera o 9? 3 ou -3. Este tipo de procedimento é viável, mas isso não quer dizer a aplicação do método do "passo para o outro lado e troco o sinal" não seja álgebra.

d) Tendência conceitual (caracterização através de campos conceituais) - Esta tendência faz uma caracterização através da ideia de campo conceitual, modelo criado pelo psicólogo francês G. Vergnaud que envolve por si só, conceito, notações, esquemas mentais que resolvem e dão sentido aos conceitos relacionados com estes mesmos esquemas. Lins e Gimenez (1997) afirmam ser possível pensar em um campo conceitual da álgebra, como podemos ver a seguir:

> Pode-se falar de um "campo conceitual da álgebra elementar", mas, sendo uma unidade muito ampla para a investigação experimental, Vergnaud e seus seguidores preferem tratar, por exemplo, de um "campo conceitual das equações do 1º grau (lineares)". Alguém trabalhando nesse ou em outros campos conceituais da álgebra estaria engajado em atividade algébrica (p. 103)

As três Concepções de educação algébrica segundo Fiorentini et al. (2005)

A) Concepção lingüístico-pragmática - Foi predominante do século XIX até a primeira metade XX. Esta concepção tem como característica uma abordagem mais instrumental da álgebra. Segundo Fiorentini et al. (2005), o objetivo da educação algébrica nesta época era o domínio, mesmo que de forma mecânica, das técnicas necessárias para as transformações algébricas. Isso era feito através de exercícios que visavam o treinamento do manejo preciso das expressões algébricas. Exemplo: Determine o valor numérico da expressão $(x^2 + 5x - 6)(x - 3)$ nos casos em que $x = 0$, $x = 1$, $x = 1{,}23$, $x = 2$, $x = 1{,}5$...

B) Concepção fundamentalista-estrutural - Predominante nas décadas de 1970 e 1980. Esta concepção tem como característica, como o nome já diz, uma abordagem mais estrutural da álgebra. Segundo Fiorentini et al. (2005) o objetivo nesta época era fornecer fundamentos lógicos para toda a matemática. Sendo assim, os alunos precisavam ser capazes não apenas de resolver problemas ou de reproduzir exercícios, mas também precisavam compreender as propriedades estruturais dos procedimentos que usavam em cada passagem das transformações algébricas. Exemplo: ensino de propriedades das operações no conjunto dos números naturais, ou nos números inteiros ou nos números reais.

C) Concepção fundamentalista–analógica – Parece que esta é a concepção predominante nos dias de hoje. Sua principal característica é a busca por um meio termo entre as concepções: "*lingüístico-pragmática*" e "*fundamentalista-estrutural*". Faz isso através da tentativa de resgatar o valor instrumental da álgebra e da preservação do estudo das propriedades estruturais. Surgem aqui, um maior número de exercícios que aplicam a álgebra à realidade, ou a uma simulação do real como, por exemplo, abordar equações com se fosse uma balança, pensando no equilíbrio

(Fiorentini et al., 2005). Outro exemplo: demonstrar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ com o auxilio do estudo de áreas de quadrados em geometria.

As visões sobre matemática (Ernest, 1989)

i) Visão da matemática como um instrumento - Segundo Ernest (1989) a matemática torna-se acumulativa na medida em que existem objetivos externos que ela pode ajudar a conseguir. A criação do conhecimento matemático acontece de acordo com o desenvolvimento de outras ciências e técnicas. A matemática é pensada como um conjunto de fatos não relacionados. Visão também conhecida como utilitarista. Thompson (1984/1997) observa que, neste caso, o conteúdo matemático é fixo, já que é resultado das idéias do mundo físico, ou seja, resultado das necessidades que o mundo nos impõe. Exemplo: Se a reprodução de uma bactéria, em condições ideais, é dada pela equação: $n = x^2 + 2x + 2$, com n sendo o número de bactérias e x sendo a quantidade de dias. Quantos dias são necessários para que haja 122 bactérias? Neste caso, a única preocupação é com os métodos para resolvê-la. Os conhecimentos matemáticos funcionam como instrumentos para resolver problemas, ou seja, nós usamos os conhecimentos matemáticos.

ii) Visão da matemática como corpo estático e unificado de conhecimento - Ernest (1989) nos informa que segundo esta visão a matemática, somente se descobre, e não se cria. Também podemos nomear esta visão de matemática como visão platônica. De acordo com Thompson (1984/1997), este tipo de visão se caracteriza pelo entendimento dos objetos matemáticos como coisas prontas e acabadas, ou seja, a matemática tem um conteúdo imutável. Exemplo: A soma de dois números tem o resultado 22. A diferença é 2. Que números são esses? Neste caso, observamos uma situação puramente matemática, ou seja, sem conexões com outras áreas de conhecimento ou vínculos com necessidades dessas áreas. Espera-se uma forma de resolver a mesma usando apenas conceitos matemáticos operatórios e de raciocínio lógico.

iii) Visão da matemática como um campo de criação humana e em grande expansão - Nesta visão são gerados modelos e procedimentos que são aprimorados como conhecimentos. A matemática é algo aberto e seus resultados permanecem abertos à revisão. Esta visão é marcada por uma perspectiva de resolução de problemas (Ernest, 1989). Ainda cabe destacar que este tipo de visão admite um desenvolvimento contínuo da matemática de acordo com dois focos: as necessidades do mundo e as necessidades da própria matemática. Ex: A tabela abaixo mostra o crescimento de uma colônia de bactérias (B) de acordo com os dias (D).

D	B
1	5
2	10
3	17
4	26

Quantos dias serão necessários para que existam 122 bactérias nesta colônia? Por que será que isto ocorre? Que fatores podem ter interferido? Podemos pensar em outras situações semelhantes a esta? O que aconteceria se mudássemos os dados da tabela? Este tipo de visão demonstra maior preocupação com os contextos envolvidos no processo de resolução de problemas e de formulação de problemas.

Na próxima seção apresentaremos uma descrição de como serão as atividades desta oficina. Antes disso, destacamos dois fatos importantes a respeito das ideias postas até aqui. Primeiro: esperamos que as tendências de caracterização da atividade algébrica e as concepções de educação algébrica ajudem os participantes a ter melhor posicionamento com relação à identificação das manifestações de álgebra presentes nas atividades. Segundo: o fato de estarmos dizendo que existem várias concepções e caracterizações diferentes para a álgebra não implica, tanto direta como indiretamente, na existência de várias formas diferentes de ensinar álgebra para os alunos. É necessário que se perceba que todas essas manifestações de álgebra precisam ser de fato abordadas no ensino fundamental e médio (seja simultaneamente ou seqüencialmente). Além disso, professores precisam procurar pensar sobre como eles pensam e concebem álgebra e seu processo de ensino e possivelmente pensar sobre estes diversos modos de perceber a álgebra os auxilie em seu trabalho profissional.

As atividades

Além das discussões sobre as manifestações de álgebra e de como estas se relacionam com os pensamentos dos participantes com relação à álgebra, apresentaremos exercícios com diferentes tipos de abordagens e soluções, como por ejemplo em Tinoco (2008):

> **Problema 1:** Seis pessoas da família Silva foram ao cinema e gastaram R$ 81,00 com ingressos. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante paga metade do preço de um ingresso, qual era o preço de ingresso nesse cinema?
> **Problema 2:** Seis pessoas da família Silva foram ao cinema. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante paga a metade do preço do ingresso, qual a expressão que fornece a quantia total gasta com os ingressos em função do preço de cada ingresso nesse cinema? (p. 7)

Observe que os dois problemas, apesar de tratarem da mesma situação, diferem nas perguntas apresentadas para o aluno. Este fato é suficiente para modificar o tipo de manifestação algébrica envolvida na resolução do problema. No problema 1, é possível notar a presença de duas concepções de álgebra no sentido de Usiskin (1988/1995): a) álgebra como aritmética generalizada, pois para montar a equação para resolver o problema precisamos pensar na ideia de triplo (representada por $3a$) e de triplo de uma metade (representada por $\frac{3a}{2}$); b) álgebra como estudo de métodos para resolver certos problemas, pois precisamos pensar em técnicas úteis para resolver a equação $3a + \frac{3a}{2} = 81$. Uma terceira concepção de álgebra pode ser encontrada no segundo problema. Devido à pergunta sobre como se relacionam o preço total dos ingressos e o preço unitário de cada ingresso percebemos que já exige uma abordagem que vai ao encontro da concepção de álgebra como relação entre grandezas (Usiskin, 1988/1995).

Com atividades como essas, acreditamos que os participantes do curso poderão evoluir na compreensão de que o ensino de álgebra demanda mais do que uma abordagem. Ou seja, começarão a ter consciência das mudanças que acontecem de um exercício para outro. Além disso, os professores também poderão descobrir quais atividades se caracterizam pela manifestação de uma, ou mais, concepções de álgebra e educação algébrica.

Referências Bibliográficas

Ernest, P. (1989) The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: P. Ernest (ed.). *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp 249-254). Londres: Falmer Press. Recuperado em 24 de setembro de 2006, de www.people.ex.ac.uk/PErnest/impact.htm

Ferreira, M. L. (2009) *Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005) Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *Congreso Iberoamericano De Educación Matemática*, 5 (pp. 1-22) Porto: CIBEM.

Freitas, M. A. (2002) *Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997) *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, SP: Papirus.

Ministério da Educação (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Brasília, DF.

Santos, L. G. (2007) *Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática*. Dissertação de Mestrado, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

Tinoco, L. A. A. (2008) *Álgebra: pensar, calcular, comunicar...* Rio de Janeiro, RJ: UFRJ.

Thompson, A. G. (1997, jul-dez) A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica (G. F. A. de Melo & T. O. Gonçalves, trads.) *ZETETIKÉ.* Campinas, FE/Unicamp, v. 5, n. 8, p. 11-44.

Usiskin, Z. (1995) Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis (H. H. Domingues, trad.). In: A. F. COXFORD & A. P. SHULTE (org.), *As idéias da álgebra.* (pp. 9-22). São Paulo: Atual. (Trabalho original publicado em 1988).

Anexo 1

Informação geral	
Título da oficina: A álgebra e suas diferentes manifestções	
Nome do autor: Magno Luiz Ferreira	
Instituição do autor: Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)	
Número de horas mais conveniente	Duas horas
Nível de escolarização para o qual será dirigido a oficina	Aqueles que estejam cursando ou tenham cursado Licenciatura em Matemática.
Número máximo de pessoas	20
Equipamentos de mídia necessários	1 data show