XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de tecnologías digitales: Un estudio teórico-experimental en el nivel básico

Cristianne **Butto** Zarzar
Universidad Pedagógica Nacional. Ajusco
México
cristianne_butto@hotmail.com

Resumen

Se reportan resultados de un proyecto de investigación sobre la introducción temprana al pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje, con estudiantes de 5o y 6o grado de primaria, con edades de 10-11 años, con dos rutas de acceso al álgebra: razonamiento proporcional y los procesos de generalización. El marco teórico-metodológico se fundamenta en la teoría de los modelos locales (MTL) desarrollado por Filloy, Rojano y Puig (2008). El trabajo experimental consta de cuatro etapas 1. Evaluaciones iniciales de dos rutas conceptuales: razonamiento proporcional y procesos de generalización. 2. Actividades didácticas sobre las dos rutas y con tecnologías digitales: micromundo Logo y Expresser y Software específico. 3. Evaluaciones finales 4. Diseño de una página web para el seguimiento del proyecto. Los resultados revelan que, los alumnos logran comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, en términos pre-algebraicos.

Palabras Clave: Pensamiento algebraico temprano, entornos tecnológicos de aprendizaje, aprendizaje matemático.

Introducción

Desde hace más de 20 años, esfuerzos de diversos investigadores en diversas áreas de la educación, y específicamente en educación matemática han centrado su interés en investigar el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para facilitar el aprendizaje de contenidos escolares. Sin embargo, la incorporación de las herramientas tecnológicas en el sistema escolar es relativamente reciente. Resultados de investigaciones como la de Dunham y Dick, 1994; Boers-can Osterum, 1990; (citado en Rojano, 2003) muestran que los estudiantes experimentan un aprendizaje significativo mediante el uso adecuado de las TIC. Por otro lado, otro estudio que ha investigado el potencial de las TIC para el aprendizaje de las matemáticas; es por ejemplo, Rojano y otros (2003) que desarrollaron un proyecto de investigación denominado *Enseñanza de la física y las matemáticas con Tecnología* (EFIT-EMAT), con el apoyo de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en colaboración con el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), concluyeron que el proceso de asimilación del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas y la física con tecnologías es importante para el aprendizaje tanto para estudiantes como también de los profesores. En este sentido, Feldstein, 2005; Orozco, 2006 y Ramos, 2005; (citado en Moret y Labrador 2006), creen que existe un consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática sobre la incorporación de las TIC en el aula de matemáticas. Sostienen que dicha incorporación debe presentar una visión renovada del conocimiento matemático, revisando concepciones, procedimientos y lenguaje, derivados de la potencialidad de la electrónica digital. En este sentido, los entornos tecnológicos de aprendizaje tienen la posibilidad de crear un acceso renovado de los contenidos matemáticos tratados en la escuela, como el que se abordará en este trabajo.

Transición de la aritmética al álgebra y la incorporación en entornos tecnológicos de aprendizaje

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares. Investigaciones sobre esta temática han proliferado en los últimos años bajo el nombre genérico de *¿Early algebra studies?*. En estas se reporta que una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrentan al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, es decir, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Esto se debe en parte a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas. Usualmente, se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemático, como por ejemplo el geométrico. El acercamiento tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, dándole énfasis a aspectos manipulativos; se empieza en el abordaje a enseñar expresiones algebraicas, ecuaciones y toda la manipulación alrededor de las expresiones y ecuaciones, y al final se resuelven problemas aplicando este contenido.

La crítica a este acercamiento señala que en él se introduce al estudiante a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido; se ignora que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos. A este respecto, los estudios de Filloy (1991), (1993) y Filloy y Rojano (1991) sobre la transición de la aritmética al álgebra evidencian dificultades de traducción del lenguaje natural al álgebra y vice-versa.

Todo lo señalado en relación con las dificultades de acceso al pensamiento algebraico ha llevado a la conclusión de que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno iniciarse a ese pensamiento en edades tempranas (7-11 años) aprovechando diferentes fuentes de significado presentes en los contenidos curriculares de la escuela primaria. En estudios sobre una iniciación temprana al álgebra como: *El sentido de las operaciones* (Slavit,1999)*; El tratamiento de las operaciones y las funciones* (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000, 2001); *Generalización y formalización progresivas* (Kaput y Blanton, 2000); *El álgebra como una herramienta de representación y resolución de problemas* (da Rocha Falcão,1993); *La dialéctica entre la teoría y la práctica: un proyecto de iniciación temprana al álgebra* y *Álgebra en la escuela elemental*, Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest (2003); *La reificación* (Sfard y Linchesvski, (1994); *El sentido de las operaciones* (Slavit,1999); y *El tratamiento de las operaciones y las funciones*, Carraher, Schliemann, y Brizuela (2000), han identificado temas curriculares de la escuela elemental que pueden ser explotados para introducir a los alumnos de ese nivel escolar a algunas ideas algebraicas importantes.

En los estudios mencionados se pueden identificar dos enfoques sobre la iniciación al pensamiento algebraico: uno es el pre-álgebra y otro desde el álgebra temprana. El primero corresponde a intervenciones de tipo transicional que buscan aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra y trata cuidadosamente de redefinir o aumentar el sentido de los símbolos que se utilizan en las expresiones algebraicas. El segundo, por su parte, reconoce lo anterior pero propone intervenciones previas a la transición; en este grupo destacan, entre otros, los trabajos de Carraher, Shliemann y Brizuela (2003), los cuales explican el origen de las dificultades en términos de la instrucción escolar. Estos autores afirman que en la primaria generalmente se ha enseñado la aritmética sin establecer vínculos con otros temas matemáticos del currículo, y aseguran que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y puede ser vista como parte del álgebra, en lugar de ser vista como un dominio claramente distinto. Concluyen que los alumnos pequeños a veces llegan a generalizaciones algebraicas sin usar el lenguaje simbólico del álgebra.

Los estudios sobre la aritmética como una entrada al álgebra son prometedores; sin embargo, hay diversas posturas acerca de cómo llevar a la práctica dicha entrada. Kaput, Carraher y Blanton (2008), basan su postura sobre la premisa de que la aritmética en la escuela primaria se han abordado de tal manera que restan importancia a la generalización como factor inherente al pensamiento algebraico. Otros autores piensan que los alumnos de la escuela elemental pueden estar preparados para pensar sobre estructuras y relaciones, aunque no puedan usar símbolos convencionalmente aceptados.

En general, los enfoques de álgebra temprana concuerdan en que no es necesario agregar más contenidos al programa escolar sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, enfatizando las ideas de generalización, estructura y relaciones. En relación con el razonamiento simbólico, los investigadores en álgebra temprana tienen una visión amplia. Consideran que dicho razonamiento incluye, pero no se restringe, al razonamiento con una notación algebraica y se pueden incorporar además el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos.

En este proyecto de investigación se trabaja en la franja del pensamiento pre-algebraico, con estudiantes de la escuela primaria, donde aún no se introduce a los alumnos a la sintaxis algebraica. Se introducen las ideas algebraicas en dos versiones: pre-simbólica (percepción de la idea de la variación proporcional) y simbólica (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en los lenguajes Logo, eXpresser y Software específico (que desarrollaremos en Visual Basic, Visual C++ y Java), por medio de la resolución de problemas propuestos en una secuencia de enseñanza. Para alcanzar ese objetivo proponemos dos rutas para acceder al álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. La elección de la primera (razonamiento proporcional) se fundamenta, en primera instancia, en la familiaridad que los niños tienen con ese contenido matemático en la escuela primaria y específicamente en ese grado escolar (5º y 6º año de primaria) aún cuando están en transición del pensamiento aditivo al multiplicativo, y examina el hecho de que ese contenido matemático se conecta conceptual e históricamente (Radford,1996) a la idea de variación proporcional, variable como relación funcional y número general, que lo conecta a la segunda ruta de acceso (los procesos de generalización), que involucran a los niños a percibir patrones, a ser capaces de expresar y escribir el patrón mediante actividades que involucran el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras, entre otras actividades.

Antecedentes: micromundo Logo

Entornos tecnológicos de aprendizaje: micromundo Logo. En este proyecto de investigación se usarán entornos de aprendizaje tecnológicos: Logo y eXpresser. Considerando la experiencia reportada por Hoyles y Sutherland (1989), se considera el lenguaje Logo como idóneo para el razonamiento proporcional, y el eXpresser para los procesos de generalización. Además vamos a desarrollar un Software específico (Visual Basic, Visual CH Java). Varios estudios han investigado el potencial del Logo para el aprendizaje de las matemáticas, incluyendo el aprendizaje del álgebra (ejemplo; Hoyles y Sutherland, 1987, 1989; Ursini, 1993). Butto, (2005), investigó su potencial para facilitar la comprensión, específicamente, sobre el razonamiento proporcional y los procesos de generalización con estudiantes entre 10 a 12 años de edad. Shoenfeld (1985), citado en Hoyles y Sutherland (1989), destaca el papel de la meta-cognición: cuando los alumnos son llevados a pensar sobre sus propias acciones y pensamientos, asumen también el control de sus actividades, son capaces de tomar decisiones por sí mismos, cambian sus estrategias y la manera como organizan y resuelven los problemas e influencian así, también, el conocimiento. De acuerdo con Noss (1986), el pensamiento matemático es algo que siempre tiene sentido en nuestra cultura y Logo es un ambiente donde las heurísticas y las ideas matemáticas son recreadas. De acuerdo con Clements (1986), Pea y Kurland (1985) citados en Holyes y Sutherland (1989), programar en Logo aumenta el desempeño de la cognición específica; por ejemplo, la reflexibilidad y el pensamiento divergente, así como también, el desarrollo de habilidades meta-cognitivas y medidas de creatividad. En este sentido, el uso del Logo crea un puente entre las acciones de los estudiantes y su entendimiento de las relaciones generales matemáticas que requieren para escribir el programa.

eXpresser

Expresser es un software de uso libre de Intelligent support for mathematical generalization (IMGEN). Los líderes de este proyecto son Richard Noss y Alex Poulovassilis y los miembros del staff del proyecto Celia Hoyles, George Magoulas, Niall Winters y Ken Kahn. Este software es un auxiliar en la construcción de los procesos de generalización que se mencionan en este proyecto. Los autores (Noss, Healy y Hoyles, 1997) plantean que es importante introducir distintos enfoques que permitan a los estudiantes construir sus propios modelos matemáticos.

Este enfoque de modelación está inspirado en la noción de constructivismo de Paper, (Papert, 1997), quién parte de la idea de que el aprendizaje sucede de manera más efectiva cuando los alumnos construyen activamente cosas en el mundo real. En lo relacionado con los procesos de generalización, nos apoyaremos en la tecnología eXpresser: una plataforma de uso específico diseñada en Java. Este software proporciona a los estudiantes un modelo para la generalización, utilizado como precursor para introducir el álgebra (Geraniou y otros, 2009).

Objetivos

1. Estudiar la introducción temprana al pensamiento algebraico vía el uso de tecnologías digitales con estudiantes de 5 y 6º grado de primara en *entornos tecnológicos de aprendizaje*.
2. Poner a prueba secuencias de actividades con tecnologías digitales, sobre temas de razonamiento proporcional y procesos de generalización.
3. Poner a prueba modalidades de uso de tecnologías digitales en el aula.

Marco teórico-metodológico

Para el diseño de la investigación se recurre a elementos teóricos propuesto por Filloy y Rojano (1999) y Filloy, Rojano y Puig, (2008). El Modelo Teórico Local (MTL) incluye cuatro componentes interconectados entre sí: 1. Modelo de Enseñanza, 2. Modelo de los Procesos Cognitivos; 3. Modelo de Competencia Formal; 4. Modelos de Comunicación. Se caracteriza por la interconexión entre los cuatro componentes; es recursivo, pues se orienta al significado dado por el uso, desde el cual se mira el problema original con una nueva perspectiva.

Procesos de generalización

Internacionalmente, se reconocen cuatro acercamientos a la enseñanza del álgebra (Bednard, Kieran y Lee 1996): 1. La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas 2. La modelización de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, 3. El estudio de situaciones funcionales y 4. La solución de problemas. También, el trabajo con patrones está recomendado en los estándares curriculares y de evaluación por la *National Council Teacher of Mathematics* (NTCM, 1989), cuyo documento recomienda el uso de patrones desde muy temprana edad (lo equivalente a la enseñanza preescolar) extendible a los grados superiores, pues señala que el trabajo con los procesos de generalización se puede, inicialmente, desarrollar de forma intuitiva, al observar la regularidad y al desarrollar un trabajo con patrones. De acuerdo con este documento, el trabajo desarrollado en primaria, que equivale a los niveles 5-8, debe incluir la exploración de patrones y funciones para que los estudiantes sean capaces de descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones; describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas; analizar relaciones funcionales para explicar de qué forma un cambio en una cantidad provoca un cambio en la otra; y usar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

En el currículo mexicano, este contenido (el de patrones y generalización) no aparece con un gran énfasis en la escuela primaria; sin embargo, sí hay una presencia extensa del razonamiento proporcional; a partir de esto, se asignan significados de la comparación cuantitativa y cualitativa de cantidades; las ideas de variable y de relación funcional aparecen en una etapa más avanzada que conduce, a su vez, hacia procesos de generalización. De acuerdo con Pegg, (citado en Durán Ponce, 1999), el descubrimiento de patrones requiere de trabajar tres procesos: actividades con patrones numéricos; expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos particulares mediante oraciones, involucrando a los estudiantes para hacer aclaraciones y precisiones; y propiciar que los estudiantes expresen en forma abreviada de dichas reglas. Para el referido autor, la parte más compleja de la introducción al álgebra requiere el trabajo con patrones numéricos, describir esos patrones utilizando la notación algebraica, y recomienda las siguientes actividades. Desarrollar en forma escrita las reglas que caracterizan un patrón numérico; comparar diferentes alternativas correctas y que son originarias de un mismo patrón; generar patrones numéricos cuando se da una regla; encontrar varias reglas para un mismo patrón; socializar con los estudiantes el surgimiento de patrones numéricos y finalmente, explicar la creación de reglas que caracterizan patrones numéricos. Los estudios de Mac Gregor y Stacey (1993) con estudiantes australianos revelan que, cuando se trabaja con patrones numéricos, los niños muestran dificultades para describir y expresar algebraicamente dicho patrón. Reggiane (1994), afirma que la generalización es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver la generalidad en casos particulares.

Diversos estudiosos han investigado las componentes del pensamiento algebraico y examinado tanto las dificultades de los niños como los contextos del álgebra. También, han estudiado la relación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje de la programación, señalando la contribución de este último para llegar a un uso correcto de la variable y finalmente, el entrenamiento con el trabajo algebraico. Han resaltado la coexistencia de dificultades específicas correspondientes al ambiente de la programación con la dificultad conectada al requisito de la formalización. Estas dificultades se podrían revelar en el uso de cualquier idioma formal y con dificultades más profundas relacionadas con la conceptualización de las estructuras involucradas. Estas últimas se podrían atribuir a las dificultades con la generalización.

Las investigaciones describen algunas limitaciones en habilidades espontáneas para pasar de lo particular a lo general, y recomiendan estimular a los niños con procedimientos guiados. Específicamente, el estudio de Ursini (1996) con niños entre 11-12 años, cuyo objetivo era la comprensión de la generalidad, plantea una actividad con un procedimiento guiado paso por paso, que apuntaba estimular la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Se requirió la estimulación e intervención externa para que la zona fuera activada y, a pesar de que los niños no habían sido introducidos al álgebra, se cree que éstos se encontraban en una etapa pre-algebraica. De acuerdo con Castro, Rico y Castro (1995), se puede generalizar en problemas que involucren patrones de tipo lineal o cuadrático mediante expresiones algebraicas. Por otro lado, los estudios de Hoyles y Sutherland (1989) en el proyecto Logo Math revelaron que el trabajo con la generalización era un camino importante para ser desarrollado y que su investigación con el ambiente Logo mostraba evidencias pertinentes acerca de la contribución del trabajo con parejas, cuando los niños programaban en dicho ambiente.

Consideraciones metodológicas

La presente investigación es de corte cualitativo: se estudia los fenómenos que ocurren durante los procesos de enseñanza y aprendizaje como un conjunto de diversas variables que se deben considerar a partir de una visión más dinámica, con el propósito de comprender los procesos, los significados y la naturaleza social del aprendizaje, así como el papel que asume el investigador en el estudio. Participantes; se trabajó con estudiantes de 5o y 6o grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal, y sin previo conocimiento de álgebra.

Montaje experimental

Se formularon rutas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje sobre la introducción al pensamiento algebraico en el nivel básico, en ambientes de tecnología digital, con referencia explícita a: 1. Modelo Teórico Local (MTL) 2. Diseño de actividades y de secuencias de actividades de aprendizaje de acuerdo a dos rutas conceptuales: razonamiento proporcional y procesos de generalización diseñadas para los temas matemáticos en educación básica. 3. Estudio con grupos de alumnos de primaria de una escuela pública del Distrito Federal (México) con computadoras (de escritorio), equipo para video-grabación y edición de video, software especializado para la enseñanza de temas matemáticas concernientes a las dos rutas conceptuales, con Logo y Expresser y software específico que desarrollaremos (en Visual Basic, Excel, Visual C++ y Java). Para el montaje experimental se proponen dos rutas de acceso al pensamiento algebraico, conforme se muestra en el siguiente diagrama (ver Figura 1).

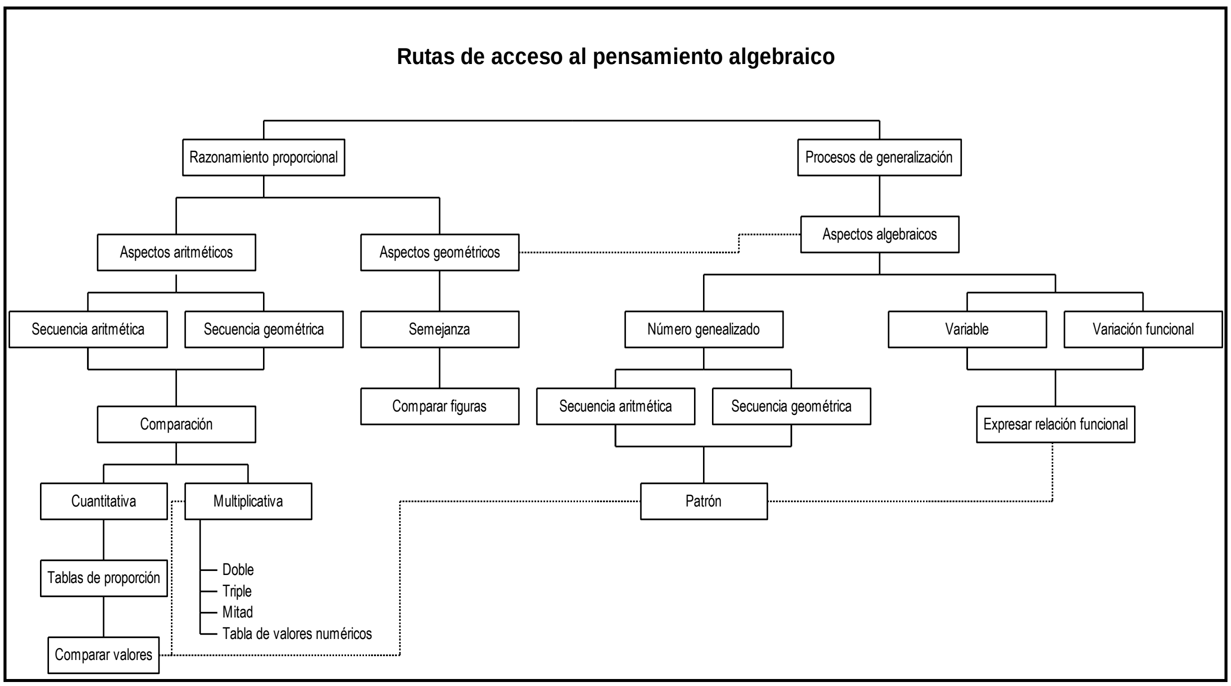


Figura No. 1 Rutas de acceso al pensamiento algebraico

En este escrito se presentan resultados preliminares de la segunda ruta didáctica: procesos de generalización.

Primera etapa: Ruta didáctica: procesos de generalización: Cuestionarios iniciales

En esta etapa se aplican y analizan los cuestionarios iniciales de razonamiento proporcional y los procesos de generalización, cuyo objetivo es identificar posibles dificultades y competencias matemáticas en los dominios que serán explorados en la secuencia didáctica, como se muestra en la Tabla 1. Aquí sólo se abordarán los procesos de generalización.

Tabla No. 1 ***Descripción del cuestionario inicial sobre procesos de generalización***

Preguntas	Contenido algebraico
1	Secuencia aritmética creciente y decreciente
2	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1}+1$
3	Variación conjunta
4	Variación funcional lineal y = 2x+1, resolución de la ecuación 2x+1=b.
5 y 6	Variación funcional exponencial $y_n = 2^{x_n}$ a partir de las secuencia aritmética $x_{n+1}=x_n+1$ y geométrica $y_{n+1}=2y_n$.
6	Plantear y resolver la ecuación x + x/3 = 1200.
7 y 8	Plantear y resolver la ecuación x + x/2 = 1200
9	Secuencia aritmética, relación cuadrática
	Las secuencias aritmética (b_n) base, (h_n) altura satisfacen $b_n = b_{n-1} + 2$, n = 1,2,3,..., de donde $b_n = 2n$;$h_n=h_{n-1} + 1$, n = 1,2,3,..., de donde $h_n = n+1$,eliminado n: $2 h_n = b_n+2$, de donde $a_n = b_n h_n = h_n(h_n-1) = (1/2) b_n(b_n + 2)$, siendo para toda n:
	a = h (h-1) = (1/2)b(b+2)

La aplicación duró 60 minutos y los estudiantes tuvieron libertad para resolver el cuestionario en el orden deseado.

Segunda etapa: Sesiones de trabajo

Secuencia didáctica, temáticamente dividida en dos partes: razonamiento proporcional y procesos de generalización. Los niños trabajaran en pares, alternadamente con lápiz y papel y en ambiente Logo y eXpresser.

Tercera etapa: Ruta didáctica: procesos de generalización

En esta etapa se aplican y analizan los cuestionarios iniciales de razonamiento proporcional y los procesos de generalización. Se aplica un cuestionario al término de las sesiones de trabajo, con el propósito de verificar el desempeño de los niños en dicha secuencia y analizar su evolución hacia el pensamiento algebraico, contrastándolos con resultados del cuestionario inicial. En el cuestionario final se exploran las mismas ideas matemáticas que en el cuestionario inicial, pero en contextos distintos, con ejemplos diferentes y con ambiente Logo y eXpresser.

Niveles de Análisis de los datos para el cuestionario inicial sobre procesos de generalización

El primer nivel de análisis incluye las estrategias utilizadas por los estudiantes de la primera etapa del estudio: cuestionario sobre razonamiento proporcional y proceso de generalización. Estas fueron categorizadas en:

Estrategias de resolución de problemas

Estrategia aritmético-aditiva: En esta categoría los estudiantes resuelven los problemas planteados con sumas y restas; muestran tener dificultades para descubrir la relación proporcional y expresar los datos en una gráfica. No llegan a la construcción de una regla general y se manifiesta un pensamiento en términos aditivos o aritméticos.

Estrategia pre-algebraica: En esta categoría los estudiantes resuelven los problemas con una multiplicación y establecen relaciones proporcionales. Comprenden la idea de variable como número general y como una relación funcional, pero presentan dificultades para encontrar una regla general y expresarla. Sus pensamientos están en transición de las estructuras aditivas a las multiplicativas.

Clasificación de los estudiantes por niveles de conceptualización matemática
Clasificación de los estudiantes por niveles de conceptualización matemática (alto, medio e inicial).

Nivel Alto: Se caracteriza por la comprensión del razonamiento proporcional y los procesos de generalización, y se expresa en un pensamiento pre-algebraico. **Nivel medio**: se caracteriza por la comprensión del razonamiento proporcional, pero con dificultades para generalizar y expresar una regla en términos pre-algebraicos. **Nivel inicial:** se caracteriza por la falta de comprensión del razonamiento proporcional y los procesos de generalización; el pensamiento matemático se expresa en términos aditivos o aritméticos.

Niveles de análisis de los datos para las sesiones de trabajo sobre procesos de generalización

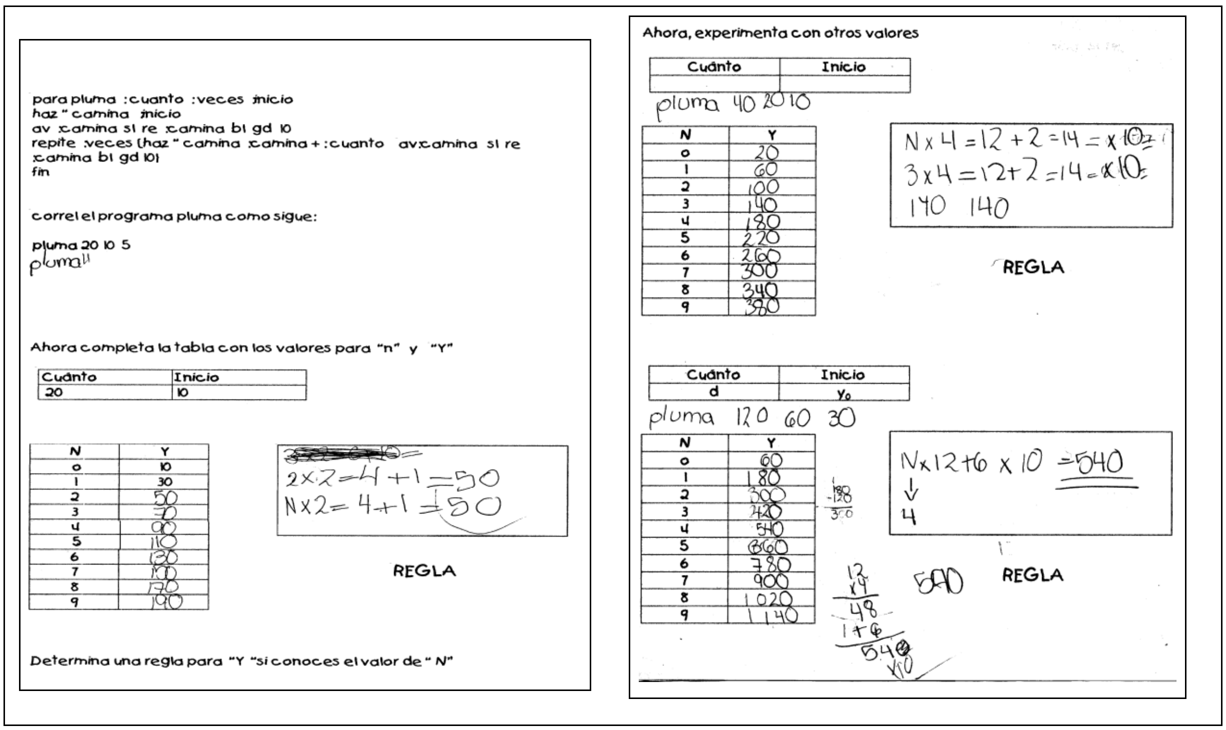
En un estudio preliminar de sesiones de trabajo (Logo, eXpresser y Lápiz y papel) se analizaron los datos a partir de hojas de trabajo de los estudiantes durante la secuencia didáctica. En un segundo momento analizamos la interacción social en pares durante las sesiones de resolución de problemas, seguidos de las entrevistas clínicas individuales.

Resultados

Resultados de la segunda ruta didáctica. Procesos de generalización: cuestionarios iniciales

Los resultados del cuestionario inicial (procesos de generalización) muestran que los estudiantes utilizaban estrategias pre-algebraicas. En el cuestionario inicial, los problemas que exploraban la idea de variable como relación funcional, los estudiantes percibían la existencia de relaciones entre cantidades. Ellos percibían como los valores de una de las variables aumentaban y disminuían. Fueron capaces de expresar relaciones entre cantidades en una tabla, pero presentaron dificultades para expresarlas por medio de una regla general.

A continuación se describe una de las actividades realizadas en el estudio piloto (secuencia de actividades en ambiente WINLOGO) sobre los procesos de generalización. Se les pedía que corrieran el programa PLUMA y completaran una tabla con los valores "n" y " y". Inicialmente se les proporcionó unos valores en la tabal de variación, se les solicitó que los completaran y que determinaran una regla para "y" conociendo el valor de "n". También se les pidió que experimentaran diferentes valores para "y" conociendo "n" .Los estudiantes llegaron a comprender la correspondencia entre los valores. La experiencia adquirida con un Programa General en Logo (PGL) (asignar un valor y obtener un resultado) les permitió llegar a una regla general. Esto se logró, por ejemplo, observando qué sucedía con la figura que iban produciendo al variar uno de los valores; se les indicó que, si deseaban hacer la figura de diferentes tamaños, deberán asignar diferentes valores a la variable y ver su efecto (véase figura 2).



```
para pluma :cuanto :veces :inicio
haz "camina :inicio
av :camina si re :camina bi gd 10
repite :veces [haz "camina :camina + :cuanto av:camina si re
:camina bi gd 10]
fin
```

correl el programa pluma como sigue:

pluma 20 10 5

pluma 11

Ahora completa la tabla con los valores para "n" y "Y"

Cuánto	Inicio
20	10

N	Y
0	10
1	30
2	50
3	70
4	90
5	110
6	130
7	150
8	170
9	190

$2 \times 2 = 4 + 1 = 50$

$N \times 2 = 4 + 1 = 50$

REGLA

Determina una regla para "Y "si conoces el valor de " N"

Ahora, experimenta con otros valores

Cuánto	Inicio

pluma 40 20 10

N	Y
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180
5	220
6	260
7	300
8	340
9	380

$N \times 4 = 12 + 2 = 14 = \times 10 =$

$3 \times 4 = 12 + 2 = 14 = \times 10 =$

140 140

REGLA

Cuánto	Inicio
d	y_0

pluma 120 60 30

N	Y
0	60
1	180
2	300
3	420
4	540
5	660
6	780
7	900
8	1 020
9	1 140

180 − 120 = 300

$N \times 12 + 6 \times 10 = 540$

4

12 × 4 = 48; 1 + 6; 540 × 10

540

REGLA

Figura 2. Hoja de trabajo de los alumnos en una actividad en Ambiente Logo

En la hoja de trabajo se muestra que los estudiantes consiguen elaborar una regla general.

Consideraciones finales

La introducción temprana al pensamiento algebraico por medio de dos rutas conceptuales parece viable y tiene una correspondencia con la perspectiva histórica y curricular. Los resultados revelan la existencia de habilidades y dificultades típicas de esas edades (transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo), esto, en parte por el énfasis que la instrucción escolar hace en los problemas de estructura aditiva. Se observa que, a pesar de que los estudiantes no han desarrollado aún todas las estructuras cognitivas y matemáticas para comprender la complejidad del pensamiento algebraico, ellos son capaces de hacerlo con una secuencia didáctica enfocada a superar las dificultades encontradas por los estudiantes al inicio del estudio.

Referencias Bibliográficas

Bednarz, N, C. Kieran, y L, Lee (1996). *Approaches to Algebra*: *Perspectives for Research and Teaching*. Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. y J, Kaput (2002). Design principals for tasks that support algebraic reasoning in elementary classrooms. In: A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Int. Conf. for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 105-112. Norwich, England.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children´s Strategies and Errors.* Windsor, Reino Unido, NFER-Nelson.

Butto, C. (2005). Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria. México: Cinvestav. [Tesis de doctorado inédita].

Butto, C y T., Rojano (2004)**.** Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Revista Educación Matemática*. Vol. 12, No.1, pp. 113-148.

Castro, E., L. Rico y E. Castro (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización* (pp. 45-79) Bogotá. Grupo Editorial Iberoamericana.

Carraher, D., A, Schliemann, y B. Brizuela (2000).“Early Algebra, Early Arithmétic: Treating Operations as Functions”. In: M.L Fernández (ed.), Proceeding of the Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA XXII; Tucson, AZ, October 7-10, 2000.

Carraher, D., A, Shliemann, y B, Brizuela (2001). Operate You On Unknowns? En *PME 25 Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Holanda, vol 1, pp. 130-140.

Carraher, D. y D. Earnest (2003). Guess my rule revisited In Proceedings of the International Conference of the Psychology of Mathematics Education Proceedings of the 27 Conference of the PME Psychology of Mathematics Education, Honolulu, Hi. Vol 1, pp. 173-180.

Da Rocha Falcão, J. (1993). “A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas” en: A. D., Schliemann, A., D. W. Carraher, A. G. Spinillo, L.L. Meira, y J.T. da Rocha Falcão, (1993). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*: Recife, Editora Universitaría, UFPE.

Durán Ponce, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria*. México: Cinvestav [Tesis de Maestría inédita].

E., Mavrikis, M., C, Hoyles, y R, Noss. (2009). Design Decisions: A Microworld for Mathematical Generalisation. In M. Joubert (ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. 29 (3). Retrieved on 28 feb. 2010 from: http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip29-3/BSRLM-IP-29-3-18.pdf

Filloy, E. (1991). Cognitive Tendencies and Abstraction Processes in Algebra Learning. En: F. Furinghetti (ed.). Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 48-55.

Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del Algebra y de la Geometría. Enseñanza de las Ciencias, Vol.11, No. 2, pp.160-166.

Filloy, E. (1997). *La observación en matemática educativa. Modelos teóricos locales y sistemas de signos.* México: Notas del autor.

Filloy, E. (1999). "Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa" en *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Grupo Editorial Iberoamerica, capítulo 1.

Filloy, E. y T, Rojano. (1985). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies, in (ed) *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 154-158-Utrech. Holanda.1985a.

Filloy, E. y T., Rojano. (1985). Operating Unknown and Models of Teaching (A clinical Study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra), in (ed) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* pp.75-79.Ohio, USA.1985b.

Filloy, E y T, Rojano. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra, for the learning of Mathematics 9 (2), pp.19-25.

Filloy, E. y T, Rojano. (1991). Translating from Natural Language to the Mathematical System of Algebraic Signs and viceversa, en R. Underhill (ed.) Proceeding of the thirteenth Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, pp. 29-35.

Filloy, E., T., Rojano, and L. Puig (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.

Geraniou, E, M, Mavrikis, C, Hoyles, y R, Noss (2009). Design Decisions: A Microworld for Mathematical Generalisation. In M. Joubert (ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.* 29 (3). Retrieved on 28 feb. 2010 from http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip29-3/BSRLM-IP-29-3-18.pdf

Hoyles, C y R. Sutherland. (1987). Ways of learning in a computer-based environment: some findings of the LOGO Maths Project. Journal of Computer Assisted Learning. 3 (2), pp. 67-80.

Hoyles, C. y R. Sutherland, (1989). *Logo Mathematics in the Classroom Routledge.*

_____*Ways of Learning in a Computer Based Environment: Some* Findings *of the Logo Maths Project, Londres,* Institute of Education, University of London.

Kaput, J. M, Blanton, y L. Moreno. (2008). *Algebra* From a Symbolization Point of View In Algebra in the Early Grades, Lawrence Erlbaun Associates, National Council of Teachers of Mathematics, London.

Kaput, J. y M. Blanton, (2000). "Generalization and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations about even and Old Numbers " conferencia magistral presentada en PME-NA XXII; Tucson, AZ; presentado 10 de octubre.

_____(2002). Desing principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms, Norwich UK , vol 2, pp. 104-112.

Kieran, C. (1980). The Interpretation of the Equal Sign: Symbol for an Equivalence Relation vs. An Operator Symbol. An R. Karplus (ed.), Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley, California, University of California, pp. 163-169.

Lee, L. (2001). Early álgebra- but which algebra? In Proceedings of the 12 ICM Study Conference, Australia. Vol 2, pp. 392-399.

Mac Gregor, M. & Stacey, K. (1993). Seeing to pattern and writing to rule. PME, Psychology of Mathematics Education Ibaraki, Japan.

Mason, J. Graham, A.; Pimm, D, & Gower, N. (1985). Routes of Roots of Algebra, The Open University Press, Great Britain.

Moret, C y M, Labrador. (2006). La tecnología digital en Educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Theoria: Ciencia, arte y Humanidades. Año 7. Vol. 15, No.2, pp. 81-89.

Radford, L. (1996). "The Role of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective" en Bernardz, N, Kieran, C and Lee, I (eds). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Reggiani, M. (1994). "Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 years Old Pupils", en Proceeding of the XVIII PME Conference Lisboa, Portugal, pp. 97-104.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. Revista Iberoamericana de Educación número 0333, OEI, Madrid, España, pp 135-165.

Sfard, A. y L. Linchevski (1994). The Gains and Pitfalls of Reification- The Case of Algebra, *Educational Studies in Mathematic.* Vol. 26, pp. 191-228.

Slavit, D. (1999). "The Role of Operation Sense in Transitions from Arithmetic to Algebraic Thought", In *Educational Studies in Mathematics, Holanda, Kluwer Academic Publishers.* Vol. 37, pp. 251-274.

Schliemann, A. Carraher, D. Brizuela, B. Earnest, D. (2003). Algebra in elementary school In PME, 27 Psychology of Mathematics Education, Honolulu, Hi Vol 1, pp 127-134.

Sutherland, R. (1991). Some Unanswered Research Questions on the Teaching and Learning of Algebra *For the Learning of Mathematics 11, 3 November, pp. 40-46.*

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas In Educación Matemática. Vol. 8, no. 2. pp. 33-40.