Un modelo matemático para espacio de estados adaptado a cursos iniciales

María Mercedes **Gaitán**
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná. Argentina
mgaitan@frp.utn.edu.ar
Gustavo de Dios **Pita**
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná. Argentina
gdpita@frp.utn.edu.ar
Diego **Dupleich**
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná. Argentina
diegodupleich@gmail.com
Alejandro **Braun**
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná. Argentina
alejandro.braun@yahoo.com.ar

Resumen

Para los docentes de Matemática en Ingeniería, ya sean ellos profesores o ingenieros, es una preocupación constante conseguir que dicha materia, además de su faz formativa, posibilite ser un vehículo de modelización de situaciones reales, entre otros objetivos.

En particular, el uso de espacio de estados facilita lograr la modelización, la evaluación y la resolución de sistemas dinámicos con alto grado de complejidad mediante herramientas matemáticas, muchas de las cuales están en el currículo de Matemática de primer año de ingeniería. Una significativa utilización de los espacios de estados es en control automático. Se presenta en este trabajo un enfoque sobre un tema de control moderno, adaptado a cursos iniciales de ingeniería electrónica, el cual puede ser utilizado también como elemento disparador de tareas de investigación de becarios alumnos. Se realizaron las simplificaciones necesarias para que puedan ser comprendidas sin mayores dificultades por alumnos del Ciclo Básico de la carrera.

Palabras clave: espacio de estados, modelo matemático, álgebra lineal, ingeniería electrónica

Introducción

El Grupo de la Universidad Tecnológica Nacional de Investigación en la Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI), dentro se sus objetivos tiene presente el denominado *problema del currículo.* Se plantean numerosas preguntas, entre ellas: ¿Cómo diseñar de manera didácticamente fundamentada un currículo actual de Matemática para esta etapa educativa? ¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos no se reduzcan a un conjunto desarticulado de técnicas más o menos algorítmicas? ¿Cómo lograr enseñar la matemática como una herramienta de modelización de situaciones reales? Por otra parte, se tiene presente que la Matemática es imprescindible en la formación, posee una profunda interacción en las Ciencias Aplicadas y la Tecnología; también es una herramienta insustituible en el desarrollo de las materias del Ciclo Superior, con las cuales además, constituye un sistema de fuerte interactividad y retroalimentación.

Fundamentación

En el currículo de ingeniería las mayores aplicaciones de conceptos matemáticos se suelen estudiar en cursos superiores, pero es una tarea motivadora indagar sobre aplicaciones adecuadas para los cursos del Ciclo Básico de la carrera.

Las necesarias y sumamente motivadoras aplicaciones de Matemática en Ingeniería conllevan actividades de resolución de problemas, y ellas están vinculadas a modelizaciones matemáticas. Lo cual produce una manera de trabajar en Matemática que permite que ella se perciba desde una perspectiva dinámica, interactiva, como un lugar óptimo para potenciar la creación continua a través de la resolución de problemas. Los alumnos así formados adquieren modos de pensar y razonar, que luego los independiza de la misma Matemática.

Tomando algunas palabras de M. Bosch Saldaña y A. Frías Zorrilla (1999), se puede expresar que el conocimiento matemático se edifica, a partir de una perspectiva antropológica, por interacción social. El que aprende debe poner en juego una serie de conocimientos previos para dar solución a una situación nueva que lo interpela.

Para los docentes de Matemática en Ingeniería puede resultar un problema la consabida pregunta: ¿qué aplicaciones de temas específicos de la carrera se pueden adecuar para los conocimientos impartidos en la asignatura? Aparecen interrogantes tales como la pertinencia y la adaptabilidad para que sea asequible al estudiante. Como así también, ¿se trabaja la modelización en sí misma como contenido o es un instrumento? ¿Se tienen presentes las competencias que debe poseer un ingeniero al realizar la tarea cotidiana? No siempre se acuerda con las posibles respuestas, son problemas a resolver. Desde otra perspectiva, se pueden recordar los numerosos escritos de Schoenfeld (1985) de los cuales se desgaja *no hay que temerle a los problemas.*

Surge así una situación cuyos vectores descriptivos pueden ser la necesidad de motivar a los alumnos, de llevar a la práctica los temas desarrollados, la incertidumbre sobre la visión que pueden tener los estudiantes y la delicada elección del contenido específico de ingeniería.

Se requiere el conocido proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, pasar del saber sabio al saber enseñado, pero siempre en un marco adecuado que garantice la comprensión del tema, la fidelidad al mismo, la aprehensión de los conceptos y la articulación, de ser posible con alguna otra asignatura de la carrera.

Es recomendable utilizar la modelización como una propuesta de articulación con un análisis previo de las restricciones transpositivas. Teniendo presente que un modelo matemático es una forma de representar un sistema manejando elementos y conceptos matemáticos, corresponde que se pongan en evidencia ciertas particularidades fundamentales del mismo sin tener presente aquellas complementarias; resulta así que el modelo es más conciso que el lenguaje coloquial. Un modelo matemático equivale a una ecuación matemática o a un conjunto de ellas y puede ser usado para calcular y predecir el comportamiento del sistema. Para un determinado sistema se pueden realizar diversos modelos matemáticos. Puesto que existen distintas representaciones que resultarán o no complementarias, se deberá elegir la más adecuada a la situación particular planteada.

Contenido

Se pasa a continuación a trabajar con temas de Ingeniería Electrónica en particular. La utilización de espacio de estados permite realizar la modelización, la evaluación y la resolución de sistemas dinámicos con un alto grado de complejidad mediante herramientas matemáticas, muchas de las cuales están en el currículo de Matemática de primer año de ingeniería. Una significativa utilización de los espacios de estados es en control automático.

El tratamiento completo del análisis y del diseño de sistemas de control es primordial en muchas ramas de la ingeniería, como lo son: electrónica, mecánica, eléctrica, hidráulica, aerospacial y química; invariablemente todas ellas vinculadas a la informática, puesto que constantemente aparece el uso de las computadoras en los sistemas de control.

El control automático tiene un sinnúmero de aplicaciones en diferentes ramas de la industria, por ejemplo en la industria automotriz para nuevos sistemas de frenado, en las cajas de cambios automáticas; en la industria aeroespacial en el posicionamiento de los satélites, en el disparo de nuevos cohetes, en el piloto automático de los aviones; en la industria química; en la electrónica y en la robótica por citar algunas.

En Ingeniería Electrónica, el área de control automático posee actualmente un gran auge. Se divide en dos categorías: el control clásico y el control moderno. El primero basa su teoría en la representación de los modelos en el dominio frecuencial, mientras que el segundo lo hace en el dominio temporal mediante la representación en el espacio de estados.

Se presentan seguidamente conceptos elementales para el desarrollo básico del tema a tratar:

Sistemas: Se puede caracterizar a los sistemas como una *caja negra* con una o múltiples entradas y salidas dependientes del tiempo. Se intenta modelar matemáticamente a los sistemas para poder predecir su comportamiento y estudiar sus respuestas frente a distintas entradas.

Espacio de estado: El modelado de sistemas basados en variables de estado hace uso de elementos del Álgebra Lineal y permite incorporar la computación como herramienta de cálculo.

Establecer cómo se encuentra el sistema en un momento dado es lo que se trata de determinar caracterizando al mismo mediante parámetros y variables dependientes del tiempo. Dichos parámetros y variables se denominan ***variables de estado*** y brindan esta información.

La información de la evolución de los estados con el tiempo frente a diferentes entradas se presenta en la ***matriz de transición de estados***.

Variables de estado: El estado de un sistema es una estructura matemática que contiene n variables $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ llamadas ***variables de estado***. Estas variables, más el valor inicial $x_i(t_o)$ de cada una de las variables y las entradas $u_i(k)$, permiten conocer la salida del sistema para $t > t_o$.

Las variables de estado no siempre representan magnitudes físicas reales, muchas veces son sólo abstracciones matemáticas del sistema.

Vector de estado: El conjunto de las variables de estado representan un vector de estados $x(k)$ de dimensión n:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Trayectoria de estado: Es la trayectoria producida en el espacio de estados por el vector de estados $x(k)$ al cambiar durante el transcurso del tiempo.

Dinámica del sistema: Las ecuaciones de estado de un sistema forman un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden, siendo n el número de estados independientes. Estas ecuaciones representan la dinámica del sistema, en tiempo discreto y para sistemas invariantes en el tiempo se tiene:

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{gathered}$$

Donde:

$x(k+1) \in \Re^n$ es el vector derivado del estado.
$x(k) \in \Re^n$ es el vector de estado.
$y(k) \in \Re^{n.y}$ es el vector de salida del sistema.
$u(k) \in \Re^{n.u}$ es el vector de entrada del sistema.
$A \in \Re^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes del sistema.
$B \in \Re^{n \times n.u}$ es la matriz de control del sistema y actúa sobre las entradas.
$C \in \Re^{n.y \times n}$ es la matriz de salida y relaciona los estados con la salida del sistema.
$D \in \Re^{n.y \times n.u}$ es la matriz de acoplamiento directo y vincula directamente la entrada con la salida, en la mayoría de los sistemas esta matriz es nula ($D = 0$).

Propuesta Didáctica

Se desea modelar el desplazamiento de un vehículo. Para ello se tiene que la entrada es la fuerza motriz, es decir, se puede gobernar la fuerza de desplazamiento. Es de notar aquí que los conceptos utilizados son conocidos por el alumno debido a que son parte de Física I. De esta manera se reafirma una articulación horizontal con espacios curriculares de cursos básicos.

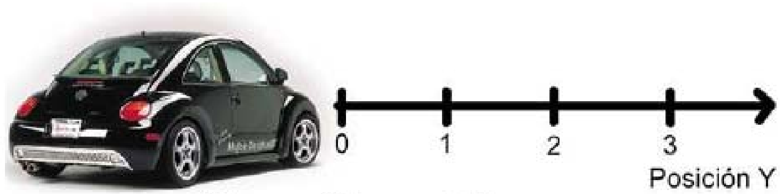

Figura 1. Definición de las variables de estado

$$y(t) = x_1(t) = posición$$
$$x_2(t) = velocidad = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)$$
$$x_3(t) = aceleración = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t)$$
$$u(t) = fuerza = m.a(t) = m\dot{x}_2(t)$$

Se despejan las variables en función del vector derivadas:

$$x_1(t) = posición = y(t)$$
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

Se forma la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Se traduce a variables de tiempo discreto utilizando MatLab:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17/m \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Mediante estas ecuaciones se ha realizado un modelo matemático abstracto del sistema. Ahora aplicando ciertas propiedades se puede lo someter a pruebas de estabilidad y saber el comportamiento frente a diferentes entradas.

Si se desea desplazar el vehículo hasta cierto punto y_f y estacionarlo ahí, se buscará qué entradas hay que aplicar para poder llevar al vehículo de su estado $x(t_0) = [y_0\ \ 0]$ a $x(t_f) = [y_f\ \ 0]$

Evolución del sistema con el tiempo: Teniendo en cuenta el sistema anteriormente descrito:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

En el tiempo ***k = 0***

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

En el tiempo ***k = 1***, considerando ***x (1)***:

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A\big(Ax(0) + Bu(0)\big) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

En el tiempo ***k = 2***, teniendo en cuenta ***x (2)***:

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A\big(A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)\big) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2u(0) + AB\,u(1) + Bu(2)$$

Generalizando:

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x(0) + A^{n-1}Bu(0) + \ldots + ABu(n-2) + Bu(n-1) \\ &= A^n x(0) + W_c U \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} U &= [u^T(n-1) \ldots u^T(0)] \\ W_c &= [B\ AB \ldots A^{n-1}B] \end{aligned}$$

De este sistema se deben despejar las entradas *u[k]* necesarias para poder llevar el sistema a un estado determinado (multiplicación de matrices y resolución de sistemas mediante ecuaciones matriciales).

Controlabilidad: Un sistema es completamente controlable, si existe una secuencia de controles ***u(k)***, tal que el origen x**=** ***0*** puede ser alcanzado a partir de cualquier estado en un tiempo finito.

Alcanzabilidad: Un sistema es completamente alcanzable, si existe una secuencia de controles ***u (k)***, tal que un estado arbitrario puede ser alcanzado a partir de cualquier estado inicial en un tiempo finito.

Un sistema es alcanzable sí y sólo sí el rango de la matriz $W_c = [B\ AB \ldots A^{n-1}B]$ de controlabilidad es igual a *n* (utilización del rango de la matriz).

Continuando con el caso presentado:
Se desea saber si se puede alcanzar el estado $x(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ partiendo de $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, es decir, si se puede en el instante de tiempo 2 estar en la posición 3 con una velocidad igual a 2, partiendo del punto 1 con una velocidad igual a 5. Se supone una masa del auto igual a $m = 1$ y se arma la matriz de controlabilidad W_c.

$$W_c = [B\ AB] = \left[\begin{matrix} 0{,}54 \\ 1{,}17/m \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17/m \end{bmatrix}\right]_{con\ m=1} = \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix}$$

Figura 2

El rango de **W_c = 2**, siendo el sistema de orden **n = 2,** por lo que este sistema es alcanzable. Para llevarlo al estado **x (2) = [3 2]:**

$$x(n) = A^n x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 3{,}76 & 3{,}72 \\ 3{,}72 & 3{,}76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}89 \\ 22{,}43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -18{,}89 \\ -20{,}43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

El sistema no siempre tendrá una solución única, en este caso sí la tiene y es:

$$u(0) = -8{,}7$$
$$u(1) = 0{,}76$$

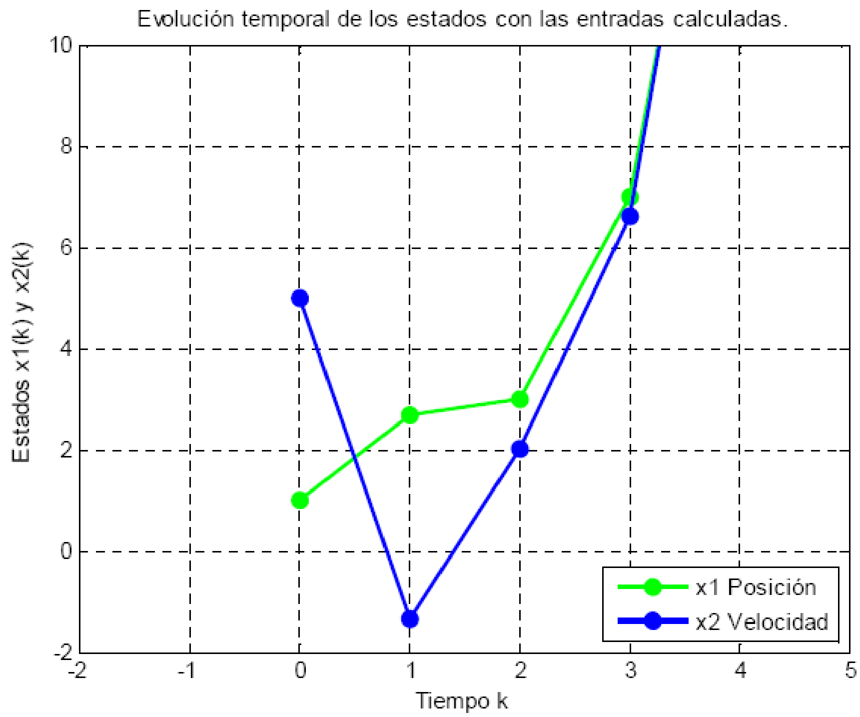

Figura 3: Evolución de los estados en el tiempo con las entradas calculadas

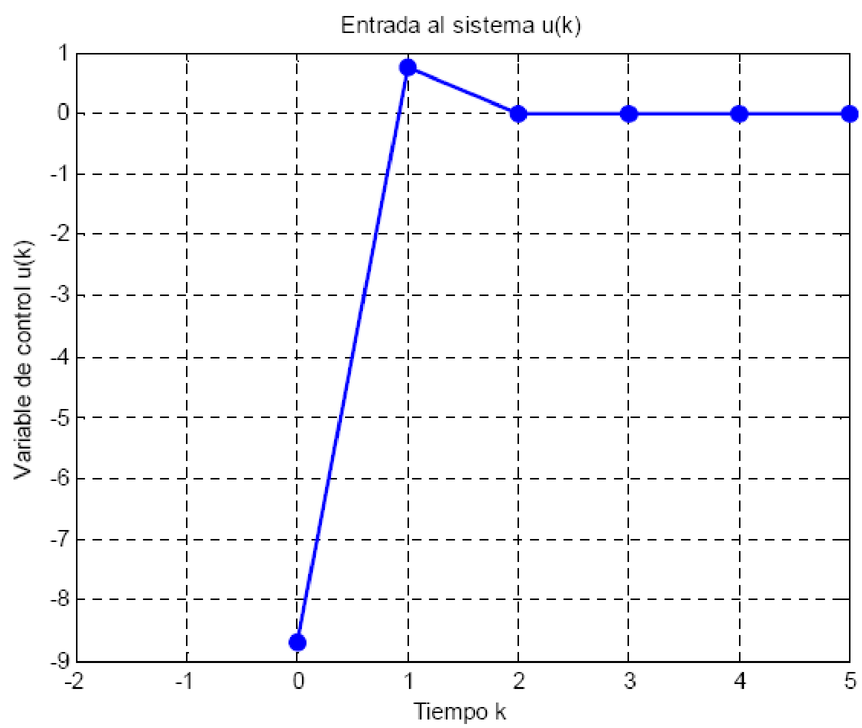

Figura 4: Entrada al sistema ***u(k)***

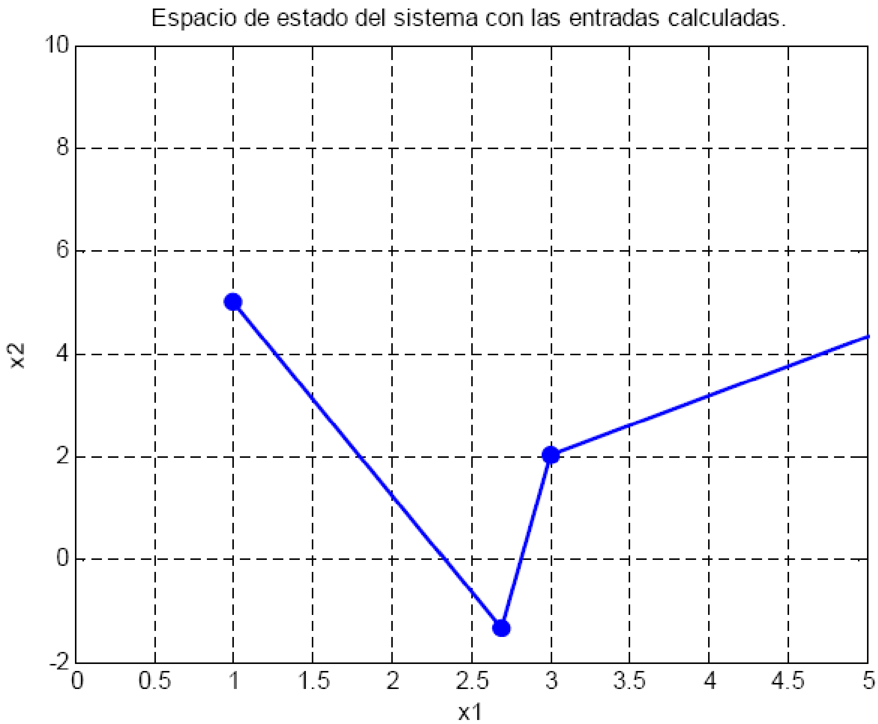

Figura 5: Espacio de estado del sistema con las entradas calculadas

Se puede observar que una vez aplicadas las dos entradas en sus respectivos tiempos, se hace la entrada nula, es decir $u(k) = 0$ para $k > 1$, sin embargo, se ve claramente en la figura como los estados siguen evolucionando y creciendo infinitamente (ver *Estabilidad*).

Si se quiere dejar el móvil estacionado o quieto en el lugar, habría que calcular la entrada que cumpla:

$$x(3) = x(2) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17 \end{bmatrix} u(2)$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}97 \\ 6{,}61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17 \end{bmatrix} u(2)$$

No hay ningún valor de $u(2)$ que satisfaga la igualdad, por lo que el móvil no se puede quedar estacionado debido a las formulaciones que se plantearon al momento del modelado del sistema.

Estabilidad: La ventaja de la utilización de espacio de estado es que para evaluar la estabilidad no se requiere de la solución explícita de las ecuaciones en diferencia o diferenciales para la ubicación de los polos. Si se considera un sistema autónomo (es decir con entradas nulas), la estabilidad de dicho sistema estará garantizada si todos los autovalores de la matriz de coeficientes A tienen parte real menor o igual a 1 (utilización de los autovalores). En caso de no tenerla, frente a entradas nulas, el sistema seguirá progresando aumentando su salida y tornándolo inestable.

Por ejemplo, en el caso presentado del móvil, si se desea calcular la estabilidad, se buscan los autovalores de la matriz *A de coeficientes del sistema*.

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}54 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz A son *2,71 y 0,73*. Como se observa, la parte real es mayor que 1, por lo tanto, el sistema no es estable. Esto es, a entradas nulas (es decir, fuerza motriz nula) la salida seguirá creciendo (el móvil se seguirá desplazando). Esto se debe a que en el modelado no se consideró la fuerza de rozamiento del móvil con la superficie de desplazamiento. Esta fuerza haría que se vaya frenando el móvil y frente a entradas nulas, la salida sería acotada.

Consideraciones Finales

La propuesta del trabajo presentado se puede realizar de dos maneras: si el tiempo lo permite, durante el cursado regular de Álgebra Lineal en Ingeniería; o alternativamente como tarea de investigación extra áulica. En la Facultad Regional Paraná de la UTN se implementó como se indica en la segunda opción, posibilitando a un grupo de alumnos becarios indagar temáticas que no se alcanzan a desarrollar comúnmente en el dictado de Álgebra Lineal, puesto que es una asignatura del primer año del currículo. Esto es sumamente conveniente para introducirlos en la búsqueda, la observación, el análisis, la exploración, la validación de resultados; en otras palabras, entran al mundo de la investigación. Precisamente este trabajo en particular, surgió a partir de la indagación de uno de los alumnos que participa como becario en el ya citado Grupo GIEMCI, siendo uno de los coautores del mismo.

En el currículum de Ingeniería Electrónica, el tema control automático mediante espacio de estados se estudia en materias del último año. La resolución de los problemas planteados en ese nivel conlleva una gran complejidad matemática y allí se aplican muchos conocimientos matemáticos adquiridos durante el desarrollo de Álgebra Lineal. La bibliografía específica del tema los aborda con notación matricial, algunas veces desaprovechada durante el transcurso de la carrera. Es importante que el estudiante valore los temas de Matemática ya que le serán de gran utilidad. La utilización de un software (como MATLAB u otro similar) facilita los cálculos que en ciertos casos resultarían arduos.

En diversas asignaturas de la carrera se desarrollan temas que utilizan continuamente los conceptos del Álgebra Lineal. La introducción temprana a cuestiones específicas de la ingeniería elegida brinda una opción didáctica altamente motivadora y sitúa al estudiante de modo más amigable frente a los nuevos conocimientos. Al mismo tiempo, mejora los procesos de enseñanza y de aprendizaje, especialmente al reflejar la aplicabilidad de las herramientas matemáticas. Asimismo, pueden convertirse en disparadores para tareas de investigación de becarios alumnos como aconteció en el caso presentado.

Como docentes de Matemática en Ingeniería se debe tener presente que en este siglo la enseñanza de la misma está cambiando. No es posible ignorar la complejidad de los avances tecnológicos y se deben incrementar los conocimientos sobre ellos, lo cual implica nuevas actitudes en la investigación y en la docencia. Indispensablemente, la Matemática es prioritaria para ello. También es válido preguntarse: ¿en qué medida las dificultades que surgen en el aprendizaje no son producto o reflejo de conflictos que plantea el sistema de enseñanza?

Actualmente, hay expresiones que declaran: *hay Matemática en todos lados,* creemos que es más pertinente decir: *hay que hallarla*. Y en esta tarea, el docente debe ser el encargado en el momento de la enseñanza de generar las situaciones adecuadas. Éstas llevarán al estudiante, en su proceso de aprendizaje, a encontrar la herramienta que subyace en el conocimiento matemático: *el descubrimiento y la valoración de la Matemática en la aplicación.*

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. (2006). "Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld". Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 1, número 1. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/issue/view/3

Bosch Saldaña, M.; Frías Zorrilla, A. (1999). La resolución de problemas de matemáticas desde las necesidades de la sociedad postmoderna. Andalucía. Epsilon 45: 249-256.

Camacho, E.; Bordons, C. (2004). Model Predictive Control. 2ª edición. Berlin: Springer.

Canavelli, J.; Gaitán, M.; Carrera, E. (2008). "Matemática para los ingenieros del mundo digital". Memorias del XIV Encuentro Nacional y V Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Mendoza.

Canavelli, J.; Gaitán, M.; Carrera, E. (2009). "Tic's, teoría de números y formación docente" TE&ET Número 3 Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología. Recuperado de http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/numero-3.htm

Canavelli, J.; Gaitán, M.; Vaira,S. (2008). "Discrete mathematics and digital technology". México. Memorias del 11th International Congress on Mathematical Education. Recuperado de http:// icme11.org/node/650

Carrera, E.; Moretto, G.; Contini, L.; Vaira, S. (2004). "La resolución de problemas en la enseñanza universitaria. Evaluación de una experiencia". Asunción. Paraguay: II Workshop de Educación Matemática. Vol. 12: 66-73.

Carrera, E.; Gaitán, M.; Canavelli, J. (2007). "Hacia una reforma del currículo de matemática en carreras de ingeniería". Memorias del 9° Simposio de Educación Matemática. Argentina. Edumat.

Carrera, E.; Gaitán, M.; M. Contini, L.; Vaira, S. (2010). "El rol de la matemática para el ingeniero de hoy". Memorias del Congreso Mundial de Ingeniería. Buenos Aires. Centro Argentino de Ingenieros y Federación Mundial de Organizaciones de Ingenieros.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Gaitán, M.; Gandulfo, M.; Braun, A.; Dupleich, D. (2009). *"Álgebra lineal en las ingenierías"*. Memorias del XIV Encuentro Nacional y V Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Tucumán.

Gaitán, M.; Gandulfo, M..; Vaira, S.; Braun, A.; Dupleich, D. (2010). *"Aportes para aplicar contenidos de álgebra lineal en ingeniería electrónica con la mediación de la tecnología"*. Memorias de III Reunión Pampeana de Educación Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.

Gascón Pérez , J (2010). *"Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad"*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Nº 22: 9-35. Recuperado de http://www.fisem.org/descargas/22/Union_022_005.pdf

González, A. (2008). Apuntes de Cátedra de Electrónica Industrial. Facultad Regional Paraná. Universidad Tecnológica Nacional.

Grossman, S. (2008). Algebra lineal con aplicaciones. 6ª edición. México: Mc Graw- Hill.

Noble, B., Daniel, J. W. (1989). Algebra lineal aplicada. 3ª edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Ogata, K. (2007). Ingeniería de Control Moderna. 4ª Edición. México: Pearson.

Sauchelli, V. H. (2004). Introducción a Sistemas de Control. Córdoba, Argentina: Universitas.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Strang, G. (2007) Algebra Lineal y sus Aplicaciones. México: Ed Thomson Learning.