SILOGISMOS Y DIAGRAMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Syllogisms and diagrams in Mathematics Education: A proposal of Hypothetical Learning Trajectory

Sanz-Herranz, H. [a], Marbán, J.M. [a] y Frápolli, M.J. [b]

[a] Universidad de Valladolid, [b] Universidad de Granada

Resumen

El proceso de razonamiento es considerado por la comunidad académica como una de las guías más relevantes para orientar la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, a menudo no se trabaja de forma explícita y, además, se suele abordar directamente en campos donde intervienen inferencias bastante complejas. El objetivo de esta comunicación es proponer una trayectoria hipotética de aprendizaje para desarrollar habilidades de razonamiento con un alumnado de educación primaria en el contexto de los silogismos y utilizando representaciones diagramáticas. Para ello, se siguen las fases de una investigación basada en diseño. Los resultados exploratorios con un grupo de 433 alumnos sugieren la posibilidad de profundizar en los procesos de razonamiento y prueba en edades tempranas a través del uso de diagramas complejos.

Palabras clave: *Razonamiento, silogismo, diagrama de Venn, diagrama de Euler, educación primaria.*

Abstract

The process of reasoning is widely recognized by the academic community as one of the most relevant guides for teaching mathematics. However, it is often not explicitly taught and is usually addressed directly in fields where complex inferences are involved. The objective of this paper is to propose a hypothetical learning trajectory for the development of reasoning skills in primary school students, specifically in the context of syllogisms and using diagrammatic representations. To achieve this, the phases of design-based research are followed. The exploratory results from a group of 433 students suggest the possibility of enhancing reasoning and testing processes at an early age through the use of complex diagrams.

Keywords: *Reasoning, syllogism, Venn diagram, Euler diagram, Primary education.*

INTRODUCCIÓN

Es una realidad el consenso que existe al respecto de la importancia capital de los procesos en la educación matemática, como se desprende de prescripciones como las del NCTM (2000), las que plantea la OCDE a través del informe español de PISA (2019) o las de la Asociación Internacional de Evaluación del Rendimiento Escolar (2019) recogidas en el marco de evaluación TIMSS. Particularmente, el razonamiento viene siendo en los últimos años notablemente prolífico en lo que a avances de investigación se refiere, toda vez que acaparan buena parte del trabajo de diversos grupos académicos (Stylianides y Harel, 2018). Asimismo, las normas educativas de aplicación en nuestro país han hecho acopio de las recomendaciones expertas (Hanna y Barbeau, 2010) incluyendo en los currículos sendas menciones expresas a estos procesos. De hecho, se hace referencia a la importancia del razonamiento como eje fundamental del sentido matemático en la

Sanz-Herranz, H., Marbán, J. M. y Frápolli, M. J. (2023). Silogismos y diagramas en Educación Matemática: Una propuesta de trayectoria hipotética de aprendizaje. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 499–506). SEIEM.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE). Además, en muchos de los decretos autonómicos por los que se establecen los currículos de la educación primaria, como es el caso del de Castilla y León (Decreto 38/2022), podemos encontrar esta iniciativa desarrollada de forma más prolija y sosteniendo que, desde los primeros años, se habrán de proponer actividades educativas que permitan al alumnado dominar el razonamiento matemático. Sin embargo, aun cuando se llega a hablar expresamente en algunos de ellos de razonamientos deductivos, lo cierto es que, a excepción del caso de la propuesta curricular de Aragón, no abundan las orientaciones didácticas específicas en tales documentos oficiales con las cuales ayudar al profesorado a acercar tareas vinculadas al razonamiento al alumnado de educación primaria. En particular, el estudio de las inferencias deductivas suele esperar hasta la asignatura de Filosofía, que aparece en el bachillerato. Así, se torna necesario el disponer de herramientas en forma de situaciones de aprendizaje que permitan el desarrollo temprano de las habilidades precisas para generar deducciones correctas, así como para evaluar si efectivamente estas suscitan tal propósito.

Por otro lado, conviene notar que las propuestas curriculares tampoco especifican cuál es el marco en el que trabajar las deducciones: lógica proposicional, lógica de primer orden, lógica multimodal, etc. No obstante, en el trabajo que aquí nos ocupa se ha optado por recurrir a los silogismos, y ha sido así por tres motivos. El primero de ellos es que todo el desarrollo histórico de la lógica comienza con los silogismos aristotélicos. El segundo se debe a la inherente relación con sistemas representacionales habitualmente vinculados a la Matemática como son los diagramas de Venn o los de Euler. El último motivo, pero no por ello el menos importante, es que los silogismos son el sistema lógico más elemental, prestándose por tanto como el más idóneo, a nuestro juicio, para adentrarse en el estudio de la Lógica. Debemos señalar que, si bien existen intentos por utilizar diagramas de Venn en la enseñanza de los silogismos, estos no han sido dirigidos a estudiantes de primaria (Joaquin y Boyles, 2017). Asimismo, también se ha propuesto el uso de estos diagramas en primaria, pero sin atender su potencial como herramienta para la deducción (Olga, 2020). En este sentido, uno de los objetivos principales de este trabajo es proponer un recurso idóneo para que los niños desarrollen habilidades de razonamiento en el contexto de los silogismos.

También resulta pertinente advertir del peligro del uso ambiguo o directamente incorrecto de conceptos como "silogismo" o "diagrama de Venn". El primero de ellos suele confundirse con cualquier inferencia deductiva, mientras que el segundo se utiliza de forma general para referir casi cualquier diagrama en el que aparezcan círculos. Por eso, esta comunicación persigue subsidiariamente arrojar algo de claridad a este respecto, tratando de aportar precisión lógica en el ámbito del razonamiento matemático y, particularmente, en unos recursos que se vienen utilizando frecuentemente por parte de la comunidad académica (Huerta y Arnau, 2014; Vargas et al., 2019).

MARCO TEÓRICO

Clásicamente, un "silogismo" (*syllogismós*) es una expresión que Aristóteles utiliza en tres sentidos diferenciados. A saber, un uso no técnico de silogismo asociado a operaciones de razonamiento, inferencia o argumentación (silogismo-0); uso técnico que apunta a un tipo de razonamiento particular, el deductivo, en los que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas (silogismo-1); y un tercer sentido (silogismo-2) más técnico aún que hace referencia a figuras o esquemas (schemata) en las que se pueden presentar los silogismos-1. Tales figuras sirven, indica Aristóteles, para identificar razonamientos perfectos (Striker, 2009).

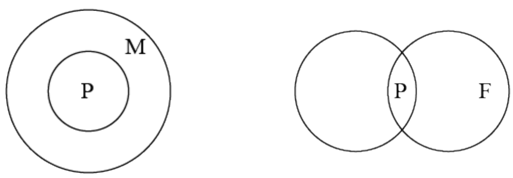
Por lo tanto, los silogismos presentan siempre una relación de consecuencia lógica, lo cual significa que la conclusión se sigue necesariamente de lo establecido en las premisas. En este sentido, los silogismos se pueden entender como la manifestación de conexiones entre conceptos dados, lo que encaja con la conceptualización que se hace del razonamiento y la argumentación en el ámbito de la educación matemática, donde se entiende que el primero es el establecimiento de nuevas relaciones entre conceptos y el segundo justamente su expresión (Rico, 1997). Esta conclusión es algo distinta de lo establecido. Además, los silogismos deductivos requieren de la presencia de más de una premisa, todas las cuales son necesarias y suficientes con respecto a la conclusión, es decir, ninguna de ellas puede ser irrelevante. Tanto las premisas como la conclusión contienen términos generales no vacíos, concretamente tres, de cuyas combinaciones obtenemos las figuras o esquemas de silogismos-2. Estas figuras o esquemas tienen que ver no ya con la idea de consecuencia lógica, sino más bien con la de forma lógica, sirven como instancias de validación (como refiere el *principio de la forma*, dos argumentos en la misma forma lógica son ambos válidos o son ambos inválidos).

Hay que señalar que los "términos" no son otra cosa que el sujeto y el predicado de la conclusión, y lo que opera relacionando sujeto y predicado, pero que no aparece en ella. Así las cosas, al término que funciona como sujeto gramatical de la conclusión se le denomina "término menor". Por su parte, al término que funciona como predicado de la conclusión se le denomina "término mayor" y al que relaciona sujeto y predicado, sin aparecer en la conclusión, se le denomina "término medio". En consecuencia, a la premisa donde aparezca el término mayor se le llamará "premisa mayor", y "premisa menor" a aquella en donde aparezca el término menor. Utilicemos la letra M para el término mayor, F para el menor, y P para el término medio e ilustrémoslo con un ejemplo: "Todos los profesores [P] son matemáticos [M]"; "algunos filósofos [F] son profesores [P]"; luego, "algunos filósofos [F] son matemáticos [M]".

Como se ha apuntado anteriormente, para comprobar la validez de distintos silogismos se pueden utilizar diversos diagramas, lo que a su vez puede ser una buena actividad para trabajar también los procesos matemáticos que nos ocupan. En efecto, nótese que un diagrama constituye un argumento visual, lo que se puede utilizar para movilizar de otra forma los procesos de razonamiento, comunicación y prueba.

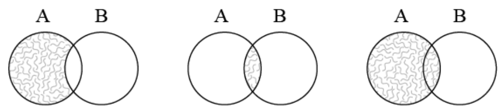
El primer intento por valerse de diagramas para ilustrar el razonamiento silogístico se lo debemos a Euler en *Lettres à une pricess d'Allemagne* (1761). Su sistema, no obstante, adolecía de varias patologías que fueron advertidas por Venn y que, esencialmente, se deben a su carácter representacional en lugar de uno funcional (Shin, 1994; Venn, 1881). Así es, si nos fijamos en las premisas 1 y 2 de nuestro ejemplo, habríamos de combinar los dos diagramas de la Figura 1 para concluir la relación entre F y M, lo que resulta imposible.

Figura 1. Diagramas incompatibles en forma de Euler



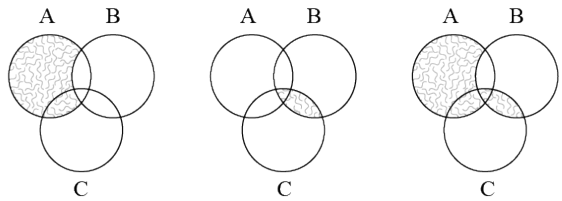
Venn, tras reparar en estas deficiencias, mejora el sistema de Euler introduciendo un esquema único que admite una mayor cantidad de configuraciones de relaciones entre los términos involucrados. Esencialmente, los diagramas siempre se colocan en la misma posición a razón de un círculo por término, y se sombrean las clases en las que no hay elementos. Esto es, los siguientes diagramas responden a "todo A es B", "ningún A es B" y, su solape, "todo A es B y ningún A es B".

Figura 2. Distintos ejemplos de diagramas de Venn que utilizan regiones sombreadas



Así, por ejemplo, los diagramas de Venn tienen poder representacional suficiente para abordar una proposición como "todo lo que es A o B es A y B". Así, las bondades de los diagramas de Venn se hacen patentes cuando se combinan para representar un silogismo, ya sea para alcanzar su conclusión o para verificar si esta es correcta.

Figura 3. Representación con diagramas de Venn del silogismo "todos los A son B" y "ningún B es C", luego "ningún A es C"



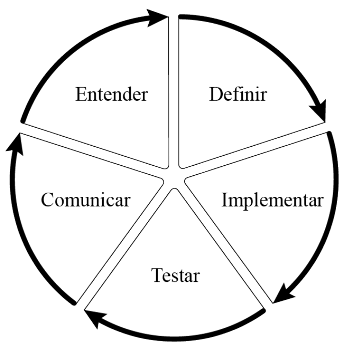
A tenor de lo expuesto puede comprobarse que, si bien los diagramas de Venn suponen una mejora de la capacidad expresiva del sistema diagramático frente a los de Euler, todavía no permiten representar la totalidad de los modos silogísticos. No obstante, para los objetivos de esta comunicación será suficiente con que el marco teórico abarque hasta aquí.

METODOLOGÍA

Nuestro planteamiento general sigue el esquema de una investigación basada en diseño, de carácter cualitativo, toda vez que lo que se pretende es comprender una realidad general al respecto de los procesos de razonamiento en edades tempranas. Este método exhibe una manifiesta idoneidad de cara a obtener resultados innovadores que deriven en diseños curriculares fundados para enriquecer los procesos de enseñanza-aprendizaje, como se desprende de los hallazgos de Núnez del Río et al. (2010).

Hay que señalar que el trabajo que aquí se presenta abarca tan solo una iteración del proceso ceñida a una cuestión muy concreta como es un tipo de deducción concreta (los silogismos) y su representación diagramática.

Figura 4. Diagrama de flujo que guía una investigación basada en diseño.



El pilotaje se ha llevado a cabo en el seno de la plataforma virtual para el aprendizaje de las matemáticas *Smartick*, participando 433 niños de entre 6 y 13 años de 6 países diferentes. No obstante, debemos mencionar que la distribución no ha sido completamente simétrica, toda vez que la mayoría del alumnado era de nacionalidad española. Todos los participantes fueron seleccionados aleatoriamente entre la base total de usuarios activos de la plataforma con un nivel de lectura suficiente, esto es, de entre aquellos que venían realizando actividades lectoras que involucraban la comprensión de textos breves sin exhibir ningún otro rasgo común Los datos que se recogieron fueron el porcentaje de éxito, el tiempo de respuesta, un indicador del gusto por la tarea y las conversaciones con los niños que exhibieron un peor desempeño a través de un chat integrado en la plataforma.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como investigación basada en diseño que se trata, los resultados obtenidos no son otros que una propuesta, en este caso una trayectoria hipotética de aprendizaje, junto con las informaciones que se derivan de su implementación a modo de pilotaje. Cabe recordar que una trayectoria hipotética de aprendizaje se compone de unos objetivos de aprendizaje, una secuencia de tareas para promoverlo y un conjunto de hipótesis a su respecto (Simon, 1995). Así, a partir de todo lo expuesto anteriormente, partimos de la hipótesis de que los diagramas de Euler resultan más intuitivos que los de Venn. Asimismo, asumimos inicialmente que el número de clases involucradas en el diagrama se relaciona directamente con su complejidad. También que la aparición de objetos concretos para ilustrar compromisos existenciales afirmativos resulta más sencilla que el uso de sombreados para el caso de los negativos. Por último, que las proposiciones ficticias suponen un puente entre las reales verdaderas (entendiendo como tales las que se corresponden con el conocimiento del mundo que tiene el sujeto) y las falsas. De este modo, pasemos a presentar la secuencia de actividades incluyendo algunas figuras para facilitar su comprensión.

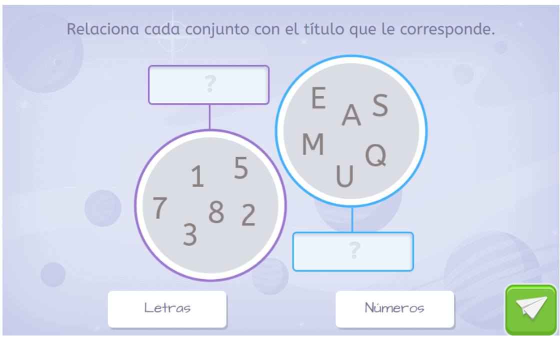
<table>
<tr><th>Número</th><th>Descripción</th><th>Porcentaje de éxito</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Actividad introductoria para trabajar la identificación de clases en un esquema de Euler.


Figura 5. Primera actividad de la secuencia</td><td>87,9%</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2</td><td>Se trabajan las relaciones de contención con diagramas de Euler, solicitando evaluar si un diagrama y una proposición real verdadera se corresponden.

Figura 6. Segunda actividad de la secuencia</td><td>82,9%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Tarea similar a la 2, pero con proposiciones ficticias como “todos los Winkis son Tranquis”.</td><td>84,2%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Similar a las dos tareas previas, pero con proposiciones reales falsas como “ninguna manzana es una fruta” o “todos los números son números pares”.</td><td>61%</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Alternando situaciones reales verdades y falsas, y también ficticias, se requiere seleccionar la afirmación correspondiente a un diagrama de Euler dado.

Figura 7. Quinta actividad de la secuencia</td><td>77,3%</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Se introducen los diagramas de Venn, requiriendo identificar aquellos que representan una misma situación que uno de Euler dado.

Figura 8. Sexta actividad de la secuencia</td><td>91,4%</td></tr>
</table>

7	Se solicita transformar un diagrama de Venn con objetos existenciales positivos en otro con sombreados para los existenciales negativos.	72,1%
8	Se requiere trasformar una proposición de cualquiera de los tipos mencionados en un diagrama de Venn con sombreados.	82,6%
9	La situación recíproca a la tarea anterior.	84,7%
10	Se trabaja la superposición de diagramas de Venn con sombreados.	76,5%
11	Se requiere evaluar la validez de un silogismo presentando simultáneamente las proposiciones involucradas y la representación diagramática.	88,3%
12	Se realiza un silogismo, pidiendo primero representar las premisas para extraer después la conclusión a partir del diagrama.	81,3%

Tras un análisis de la significación estadística, señalamos que no se ha percibido que el género o la edad sean variables relevantes a la hora de explicar el nivel de desempeño en cada tarea. Respecto a las dificultades observadas, se ha advertido que el error más común es el supeditar el diagrama al conocimiento del mundo, esto es, cuando se utilizan proposiciones reales falsas. Asimismo, se ha encontrado este mismo error en todas las tareas en las que aparecían este tipo de proposiciones. Al ser interpelados parte de los participantes que habían fallado un número elevado de veces, se constató que percibían las proposiciones falsas como errores en la redacción de la tarea toda vez que así lo denunciaron expresamente. Por su parte, la otra dificultad aparece al retirar los objetos concretos y pasar a la representación con sombreados propia de los diagramas de Venn. No obstante, como se puede ver en la tabla superior, esa dificultad remite una vez que los niños se han familiarizado con la representación. En cuanto al indicador del gusto por la tarea, un 53% respondió que sí que le gustaba; un 18% que no; y el resto no marcó ninguna opción.

CONSIDERACIONES FINALES

Como ya se ha indicado antes, este pilotaje es tan solo una parte de una investigación más compleja actualmente en curso. No obstante, los resultados que se han arrojado son alentadores, toda vez que parecen indicar que, efectivamente, el alumnado en edades tempranas es capaz de manejar diagramas de Venn relativamente complejos en cuanto a su semántica y formato. Asimismo, a partir de las dificultades observadas en el manejo de proposiciones que entran en contradicción con el conocimiento del mundo que tiene el alumnado, sugerimos introducir explícitamente la idea de "validez", para tratar de desligarla de la de "verdad". Por último, atendiendo a los resultados satisfactorios de esta propuesta cabe plantearse la idoneidad de introducir representaciones más intrincadas, como son los diagramas de Peirce, que permitan abordar situaciones con cuantificadores más complejos gracias a su mayor capacidad expresiva.

Referencias

Decreto 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, 190, de 30 de septiembre de 2022, 48316 a 48849. https://bocyl.jcyl.es/boletines/2022/09/30/pdf/BOCYL-D-30092022-2.pdf

Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnkey H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). Springer.

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González Astudillo, M. Codes Valcarse, D. Arnau Vera y T. Ortega del Rincón (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 415-424). SEIEM.

Joaquin, J.J. y Boyles, R.J. (2017). Teaching syllogistic logic via a retooled Venn diagrammatical tehnique. *Teaching philosophy*, *40* (2), (pp. 161 a 180).

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, de 30 de diciembre de 2020, 122868 a 122953. https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

Ministerio de Educación (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. OCDE. Informe español.* https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018/pisa-2018-informes-es.html

Ministerio de Educación (2019). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Núñez del Río, C., de Castro, C., del Pozo, A., Mendoza, C., y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). SEIEM.

Olga, C. (2020). Using the Venn diagram in primary education. *Romanian Review of Geographical Education*, 9(2), (pp. 87-98).

ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín oficial de Aragón*, 145, de 27 de julio de 2022, 25614 a 26207.

Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/521/1/RicoL97-2528.PDF

Shin, S. (1994). *The Logical Status of Diagrams*. Cambridge University Press.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Reseachs in Mathematics Educación*, 26(2), (pp. 114-145).

Striker G. (2009). *Prior analytics. book 1*. Oxford University Press.

Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective*. Springer.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J.A., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano, y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 593-602). SEIEM.

Venn, J. (1881). *Symbolic Logic*. Macmillan.