XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

As Concepções de Álgebra e Educação Algébrica a partir de Atividades de Indução Matemática

Eduardo Machado da **Silva**
Centro Universitário Eurípides de Marilia – UNIVEM
Faculdade de Tecnologia de Garça – FATEC
Brasil
eduardo@univem.edu.br
Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**
Universidade Estadual de Londrina – UEL
Brasil
angelamarta@uel.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar concepções de Álgebra e Educação Algébrica que aparecem em registros escritos de estudantes de um curso de licenciatura em matemática, por meio de atividades que envolvem provas via princípio de indução matemática. Para tanto, empregamos as concepções de Álgebra e Educação Algébrica apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e também análises de alguns registros escritos coletados através de uma sequência didática desenvolvida tomando como referência os pressupostos da Engenharia Didática, de Artigue (1996). Os resultados que obtivemos apontaram que os estudantes possuem uma visão processológica e linguística-pragmática respectivamente referente às concepções de Álgebra e Educação Algébrica.

Palavras chave: Álgebra, Educação Algébrica, Indução Matemática, Ensino Superior.

Introdução

A indução matemática[1] é frequentemente tratada em cursos iniciais de Álgebra, constituindo dessa maneira uma das primeiras oportunidades dos estudantes iniciarem seus estudos sobre provas matemáticas. Sua aplicação consiste em demonstrar as propriedades referentes ao conjunto dos números naturais. Porém, a forma dogmática que esse assunto é tratado pelos livros didáticos não faz com que os estudantes reflitam sobre o papel desse tema no ensino da matemática. Além disso, notamos que a maioria dos estudantes quando se depara com esse assunto executa os passos do método até chegar (ou encontrar) uma solução para um

[1] Existem outras denominações para indução matemática, como indução finita.

determinado problema. A exagerada preocupação com o procedimento faz com que os estudantes não parem para refletir sobre o que estão fazendo, se importando apenas em buscar modelos que os ajudem a resolver os exercícios.

Essa procura por padrões, que faz com que os estudantes atuem de maneira mecânica, pode estar fundamentada no fato de como compreenderam a Álgebra, a Educação Algébrica e os conteúdos algébricos. Assim, a partir das concepções de Álgebra e Educação Algébrica apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e utilizando registros escritos de uma sequência didática[2] desenvolvida a partir dos pressupostos da Engenharia Didática[3], propostos por Artigue (1996), a qual versava sobre indução matemática, apresentamos quais dessas concepções aparecem numa turma de alunos de licenciatura em matemática.

Um panorama geral sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra

Até meados do século XIX a Álgebra era compreendida como:

> *[...] aquela parte da matemática que se ocupava de estudar as operações entre números e, principalmente, da resolução de equações. Nesse sentido, pode-se dizer que esta ciência é tão antiga quanto a própria história da humanidade, se levamos em conta que esta última se inicia a partir da descoberta da escrita (MILIES 2004)*

Desse modo, tomando como referência a ideia anterior, nota-se que o início das atividades algébricas deu-se pelos egípcios e babilônios, os quais, de acordo com Eves (2004), começaram a solucionar seus problemas mesmo que de modo experimental. Os problemas característicos desse período se referiam a encontrar valores desconhecidos que não representavam necessariamente objetos concretos, como por exemplo: "Se te digo, divide 10 héqats[4] de cevada por 10 homens, de tal maneira que a diferença entre cada homem e o seu vizinho seja em héqats de cereal, 1/8, qual é a parte que cabe a cada homem?"

As primeiras perspectivas da Álgebra como conhecemos atualmente foram desenvolvidas pelos gregos, ao se preocuparem em generalizar suas afirmações por meio de provas. Esse povo herdou dos babilônios a aritmética e a álgebra até então desenvolvidas e assim, logo transformou tais conceitos em algo denominado álgebra geométrica, na qual o interesse era por problemas geométricos onde os valores desconhecidos representavam lados ou área de uma figura geométrica. Assim, a utilização da Álgebra tinha como objetivo generalizar propriedades referentes a tais figuras.

Os povos hindus e árabes também utilizaram e desenvolveram conceitos algébricos, encontrando soluções de equações mais complexas do que as conhecidas pelos egípcios e babilônios.

Como podemos notar, as primeiras definições relativas à Álgebra estão associadas à realização de operações numéricas e resolução de problemas, porém esta referência foi se transformando ao longo dos anos com o surgimento de conceitos abstratos e estruturas matemáticas. Dessa maneira, se tomarmos como critério a evolução dos conceitos algébricos a

[2] Sequência didática consiste num certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com o objetivo de observar situações de aprendizagem.
[3] O conceito de Engenharia Didática para Artigue (1996) é de uma metodologia de investigação, caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula.
[4] Unidade de medida de volume ou capacidade.

classificação da Álgebra pode ser dada, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), da seguinte forma: Álgebra Clássica ou Elementar e Álgebra Moderna ou Abstrata.

Com relação à definição sobre a Álgebra Clássica temos que:

> *A Álgebra Clássica constitui um conjunto de métodos formais que permitem resolver equações formadas pelas quatro operações fundamentais mais a potenciação e a radiciação, em que aparecem elementos conhecidos e desconhecidos. Até aproximadamente metade do século XIX o objetivo principal da Álgebra Clássica era a resolução de equações algébricas. (SILVA 2009)*

A Álgebra Abstrata, segundo Milies (2004), teve inicio em 1815 a partir dos trabalhos de matemáticos como Charles Babbage (1792 – 1871), George Peacock (1791 – 1858) e John Herschel (1792 – 1878) que fundaram a Analytical Society com o objetivo de atualizar as notações referentes ao cálculo diferencial e integral reformando assim o ensino de cálculo. Apesar disso, para Silva (2009), o precursor da Álgebra Abstrata foi Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) entre 1856 e 1858 quando estudou a Teoria de Galois e as inter-relações entre grupos de substituições e subcorpos dos complexos. Ainda segundo Silva (2009), "a noção de Ideal proporcionou um novo exemplo de lei de composição entre conjuntos de elementos. Estas noções em conjunto com as noções de Grupo e de Espaço Vetorial, posteriormente se converteram no cerne da Álgebra Abstrata." Dessa forma podemos dizer que a Álgebra Abstrata trata das estruturas algébricas como Grupos, Anéis e Corpos. Além disso, com relação à ruptura entre a Álgebra Clássica da Álgebra Abstrata temos:

> *A passagem da álgebra clássica para a assim chamada álgebra abstrata foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-científicos da disciplina como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica – num certo sentido – uma mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreensão de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho. (MILIES 2004)*

Outra maneira de caracterizarmos a Álgebra é por meio da evolução da linguagem e notação algébrica. Os estágios nesse caso são denominados: Álgebra Retórica ou Verbal, Álgebra Sincopada e Álgebra Simbólica. De acordo com Eves (2004), foi Nesselmann em 1842 que analisou e propôs tal classificação. Segundo este autor:

> *[...] a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm haver com os entes que representam. (EVES 2004)*

Outra classificação para a Álgebra segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ocorre quando se toma como referência os significados atribuídos ao simbolismo algébrico. Esta classificação, segundo os autores, foi proposta por Jacob Klein em seu livro de 1934. Dessa maneira, os símbolos até Viète eram usados apenas para representar valores desconhecidos de uma equação. A inovação proposta por Viète era representar tanto quantidades conhecidas como quantidades desconhecidas e para isso ele utilizou de modo padronizado as vogais para os coeficientes e as consoantes para as incógnitas. A perspectiva proposta por Viète possibilitou um maior grau de generalização.

A álgebra também pode ser classificada segundo os métodos para encontrar a solução de equações. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) essa classificação foi proposta por Piaget e Garcia (1987) na obra Psicogênese e História das Ciências. Segundo os autores a Álgebra pode ser dividida no *período intra-operacional* que se caracteriza com a busca de um método particular para resolver um determinado problema. O *período interoperacional* corresponde a encontrar fórmulas para resolução de equações gerais de qualquer grau. E por fim, o período *transoperacional*, no qual as propriedades dos números é que atraem o interesse.

As concepções de Álgebra e Educação Algébrica

É a partir das características que destacamos anteriormente que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam as concepções de Álgebra e de Educação Algébrica.

Com relação à Álgebra a primeira concepção que os autores apresentam é a processológica que é definida

> *[...] como um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas. Esses procedimentos específicos consistem em técnicas algorítmicas ou processos iterativos que se aplicam a problemas ou conjunto de problemas, cuja resolução se baseia no segmento de uma seqüência padronizada de passos. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL 1993)*

Em seguida os autores destacam a concepção linguístico-estilistíca onde a álgebra é caracterizada como uma linguagem particular criada com o objetivo de expressar corretamente os procedimentos específicos. Outra concepção é a linguístico-sintático-semântica que consiste numa linguagem própria e concisa, porém sem espaço para elementos como criatividade. E a última concepção de Álgebra que os autores destacam é a linguístico-postulacional, a qual caracteriza a Álgebra como uma linguagem simbólica com alto grau de abstração e generalidade comum a todos os campos da matemática.

Portanto, comparando as concepções de Álgebra com a prova por indução matemática, concluímos que a processológica é a que possui mais características em comum, pois as soluções dos problemas de indução matemática são realizadas sempre a partir da verificação das duas propriedades que compõe o método (base de indução e hipótese de indução). Sendo assim, é possível constatar em Silva (2010) que alguns estudantes de um curso de licenciatura em matemática, quando notam que um problema deve ser resolvido usando a indução matemática se preocupam em estabelecer conexões com outros exemplos já conhecidos. Deste modo, a preocupação deles consiste em comparar os exercícios com alguns modelos e realizarem as transformações algébricas necessárias para encontrar a solução.

Por outro lado, as concepções que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam sobre Educação Algébrica são: a linguística-pragmática, a fundamentalista-estrutural e a fundamentalista-analógica. Segundo os autores a linguística-pragmática é:

> *[...] a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico[5]" seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância deles que determinariam os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas forma como "fabricar" um problema para cuja solução tais e tais tópicos, tidos como indispensáveis, deveriam ser utilizados. (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL 1993)*

A concepção funamentalista-estrutural é denominada como uma abordagem das propriedades estruturais das operações com objetivo de fundamentar logicamente cada passagem no transformismo algébrico. E por fim, a concepção fundamentalista-analógica, que se constitui como uma fusão entre as duas concepções anteriores, porém com o intuito de resgatar o valor instrumental da Álgebra a partir do uso de recursos analógicos e geométricos.

Confrontando as concepções de Educação Algébrica apresentadas juntamente com o conceito de indução matemática, entendemos que a linguística-pragmática é a que apresenta mais características comuns ao nosso objeto de estudo. Acreditamos que isso se deve pelo fato dos exercícios apresentados em livros didáticos, que abordam esse assunto, trazerem as fórmulas prontas e com o enunciado explícito, "prove por indução". Essa abordagem não oferece qualquer oportunidade dos estudantes analisarem a proposição que está em questão.

Outro fator que apresentamos e nos guia até a conclusão anterior é que de acordo com Lopes (1998) a melhor maneira dos estudantes assimilarem a prova por indução matemática é por meio da resolução de muitos exercícios. Para nós, solucionar um número exagerado de exercícios de um mesmo tipo proporciona aos estudantes agirem de maneira automática. Tal ação não promove qualquer reflexão sobre o método de prova que estão empregando. Entendemos também que a aprendizagem não está associada diretamente com a quantidade de exercícios resolvidos e sim com o modo de como é discutido um determinado assunto. Assim, com relação à indução matemática acreditamos que a utilização dos axiomas de Peano e de problemas históricos, como por exemplo, os números figurados, são eficazes e pode promover uma experiência matemática no sentido dos estudantes atuarem como matemáticos conjecturando e provando as proposições encontradas.

Experimentação

As atividades desenvolvidas ocorreram em 2009, onde foi aplicada uma sequência didática, baseada nos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1996), a uma turma composta por estudantes de um curso de licenciatura em matemática. Ao analisarmos os registros escritos dos estudantes, verificamos a possibilidade de investigar quais as concepções de Álgebra e Educação Algébrica que estavam presentes. Concluímos que as concepções processológica e linguística-pragmática apareceram quando da resolução de questões pelos estudantes. A seguir, apresentamos a resolução de um dos estudantes da questão: mostre que $\forall\, n \in \mathrm{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2.

---

[5] Segundo os autores transformismo algébrico é o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas.

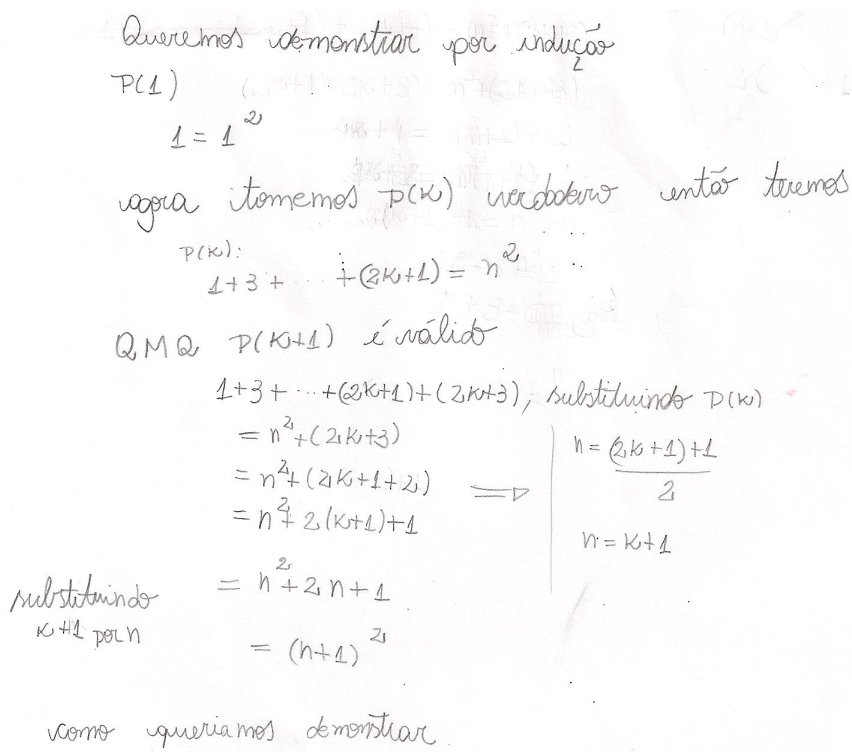
Queremos demonstrar por indução
P(1)
$1 = 1^2$
agora tomemos P(k) verdadeiro então temos
P(k):
$1+3+\cdots+(2k+1) = n^2$
QMQ P(k+1) é válido
$1+3+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$, substituindo P(k)
$= n^2+(2k+3)$
$= n^2+(2k+1+2)$
$= n^2+2(k+1)+1$ $\Longrightarrow$ $n = \frac{(2k+1)+1}{2}$, $n = k+1$
substituindo k+1 por n $= n^2+2n+1$
$= (n+1)^2$
como queríamos demonstrar

Figura 1. Solução apresentada por Pitágoras

Como podemos observar na solução apresentada anteriormente, o estudante inicia sua resolução sem mostrar qualquer evidência que possa garantir que a proposição é verdadeira (ou não), dessa forma ele a assume como verdadeira e inicia a demonstração. Seu objetivo, assim que percebe que a solução pode ser obtida pela indução matemática, é executar os passos do método seguindo um modelo já conhecido por ele. Concluímos que tal estudante se preocupa com uma técnica algorítmica específica e padronizada para a resolução deste problema e isto comprova a presença da concepção processológica.

A questão anterior não é resolvida exclusivamente aplicando a indução matemática, é possível encontrar o mesmo resultado utilizando, por exemplo, a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética que é um conteúdo tratado no Ensino Médio. O estudante em questão, cursando licenciatura em matemática, não se atentou para essa alternativa de solução. Dessa forma, intuímos que o ensino em blocos e sem conexão com outros conteúdos deixa a entender que o que foi visto no Ensino Médio é do Ensino Médio e não possui relação com o Ensino Superior.

Além da questão ser resolvida mecanicamente, observamos também que a solução se baseia no transformismo algébrico. Isso porque um descuido que o estudante apresentou foi em considerar o número impar como sendo da forma $2k+1$, quando deveria utilizar a forma $2k-1$, pois o elemento 0 não pertence ao conjunto em questão. Dessa forma, a primeira propriedade da indução matemática não poderia ser verificada, o que compromete a prova. Além disso, com relação à segunda propriedade que compõe o método, notamos que ele se preocupou em achar as igualdades por meio de transformações algébricas. Essa característica nos mostra a presença da concepção linguística-pragmática.

O fato de associarmos a indução matemática com as concepções processológica e linguística-pragmática não exclui totalmente as outras possibilidades de comparação com as demais concepções, nós apenas entendemos que as características dessas concepções estão integradas e são evidentes à indução matemática.

A presença das concepções processológica e linguística-pragmática com relação à Álgebra e Educação Algébrica respectivamente em atividades, que envolvem o princípio de indução matemática, faz nos refletir sobre como o assunto está sendo tratado. Não basta "ensinar" a técnica, é preciso que aconteça um debate de ideias com o intuito de promover uma aprendizagem significativa.

Considerações finais

Como foi possível observar os estudantes possuem uma visão processológica e linguística-pragmática respectivamente com relação às concepções de Álgebra e Educação Algébrica. Entendemos que estas concepções estão intrínsecas no próprio conceito de indução matemática, isso porque os livros didáticos que tratam do assunto a apresentam de uma maneira que deixa a entender que a prova por esse método consiste em verificar as duas etapas que compõe o método. Percebemos que tais interpretações e entendimentos podem estar, além disso, ligados ao fato de como são tratados os conteúdos matemáticos nos Ensinos Fundamental, Médio e no próprio Superior, ou seja, de maneira fragmentada, o que não permite uma associação entre esses níveis de ensino.

Vale ressaltar que os estudantes que participaram da coleta de dados cursavam a terceira série de um curso de licenciatura em matemática, sendo assim, nós esperávamos que eles apresentassem certa maturidade ao lidar com esses problemas, utilizando dessa maturidade para analisar inicialmente a questão proposta sem se preocupar em utilizar as técnicas, artifícios e métodos discutidos em outras oportunidades. Esse ímpeto deixa evidente a presença das ideias que permeiam as visões processológica e linguística-pragmática, respectivamente, as concepções de Álgebra e Educação Algébrica, presentes nas atividades que tratam do assunto indução matemática.

Bibliografia e referências

ARTIGUE, M. (1996). Engenharia Didática. In. BRUN, Jean (Org.) *Didactica das Matemáticas*. Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

CARVALHO, C. C. S. *Uma Análise Praxeológica das Tarefas de Provas e Demonstração em Tópicos de Álgebra no Primeiro Ano do Ensino Médio*. 2007. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CURY, H. N., VIANNA, C. R., LANNES, W. BROLEZZI, A. C. (2002). Álgebra e Educação Algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. *Educação Matemática em Revista*, Rio Grande do Sul, v. 4, pp. 9–15.

EVES, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, Brasil: Editora da UNICAMP.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. (1993). Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Pro-Posições*, v. 4, pp. 78 – 91.

LOPES, L. (1998). *Manual de Indução Matemática*. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência.

MILIES, F. C. P. (2004). Breve História da Álgebra Abstrata. Minicurso apresentado na II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia. http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf.

PIAGET, J. & GARCIA, R. (1987). Psicogênese e História das Ciências. Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote.

SILVA, C. P. (2009). *Aspectos Históricos do Desenvolvimento da Pesquisa Matemática no Brasil.* São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física/SBHMat.

SILVA, E. M. *Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução matemática.* 2010. Dissertação (Mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.