XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2011 CIAEM
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

El papel de la geometría dinámica y de los registros gráfico y algebraico en los procesos de conceptualización de parámetros en la educación secundaria

Teresa **Bernal** Díaz
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México
dany_tere40@yahoo.com.mx
Teresa **Rojano** Ceballos
Departamento de Matemática Educativa
México
trojano@cinvestav.mx

Resumen

Se reportan resultados de un estudio llevado a cabo con estudiantes de educación secundaria de México, cuyo propósito fue el de investigar el papel que juega el ambiente dinámico de *Cabri–Géomètre* en los procesos de conceptualización de los parámetros pendiente (*m*) y ordenada al origen (*b)* en la ecuación general de la recta. La potencialidad de este ambiente se utiliza en el diseño didáctico de las sesiones de clase, con la finalidad de introducir a los alumnos a la solución de sistemas de ecuaciones lineales y sentar las bases para que puedan discriminar entre parámetros e incógnitas. Dicho diseño se inspira en el acercamiento teórico de los "registros" (Duval, 1999) donde se afirma que la conceptualización en matemáticas tiene lugar en procesos de visualización y conversión entre distintas representaciones (registros) de los conceptos.

Palabras clave: Parámetros, representación, geometría dinámica, ecuación de la recta, semiósis.

Introducción

En varios estudios se reportan resultados relacionados con las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de nociones tales como: las de incógnita, variable y número general cuando se inician en el estudio del álgebra (por ejemplo, véanse los trabajos de Kieran, 1989, y Filloy & Rojano, 1989). Existen estudios de este tema basados en experimentos de enseñanza con alumnos no principiantes de nivel bachillerato o universitario (por ejemplo, Yerushalmy & Chazan, 2003, y Boedy-Vinner, 2001). Por otra parte, los parámetros están presentes desde los programas de educación secundaria; la experiencia docente en este nivel escolar ha hecho evidente que los alumnos tienen dificultades con el empleo simbólico de esta noción, sobre todo por la falta de referentes significativos para ellos. En este artículo se reportan resultados de un estudio efectuado con alumnos de tercer grado de educación secundaria, en el que se provee de referentes significativos a los parámetros de la ecuación $y = mx + b$ de la recta a través de una experiencia de aprendizaje en el entorno computacional de *Cabri–Géomètre*. Ésta es una herramienta útil para el diseño y aplicación de actividades vinculadas con diferentes representaciones, permite tener en la pantalla dos o más registros a la vez, enlazados entre sí; además, por medio del arrastre (*dragging*) es posible observar los cambios que se presentan en los registros algebraico y geométrico.

En esta investigación se utilizó la *teoría de las representaciones semióticas* para el diseño y análisis de las actividades, tomando en cuenta las dificultades que puedan tener los alumnos en la articulación entre representaciones de tipo algebraico, gráfico y numérico. Los resultados expuestos muestran la potencialidad del ambiente de la geometría dinámica, que también se tomó en cuenta para el diseño didáctico de las sesiones de clase. En la teoría de los registros se pone énfasis en la idea de que la conceptualización en matemáticas tiene lugar en procesos de visualización y conversión entre distintas representaciones (registros) de los conceptos. Aquí se reporta como desempeñó un papel central esta idea teórica en el caso particular de los registros simbólico, numérico y gráfico.

Problema de investigación

La finalidad de esta investigación sobre la conceptualización de parámetros en álgebra es profundizar en el análisis de los procesos cognitivos de los alumnos cuando trabajan con parámetros en la ecuación de la recta, a través de dos tipos de representaciones, la algebraica y la geométrica, en un ambiente dinámico. Para esta tarea de profundización se tomó como punto de partida los resultados reportados por Bloedy–Vinner (2001) sobre las dificultades que enfrentan estudiantes de bachillerato para distinguir entre los parámetros y las incógnitas, entre los parámetros y las variables, y sobre la importancia de la noción de parámetro como condición necesaria para que los alumnos accedan a la noción de familias de funciones. También se incorporan los resultados de los estudios de Hoyos (1996), Bernal (2006) y Lara (1995) sobre la importancia de proveer de fuentes de significado a los parámetros, a partir del contexto geométrico y de la interacción entre representaciones en un ambiente de geometría dinámica.

Propósito específico del estudio

Diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica que favorezca la conceptualización de los parámetros en alumnos de tercer grado de educación secundaria y que a su vez los introduzca a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mediante la interacción con distintos registros en el ambiente de geometría dinámica y así sentar las bases hacia la discriminación entre parámetros e incógnitas.

Preguntas de investigación

1.- ¿Qué influencia tiene el trabajo en ambiente de geometría dinámica como fuente de significados para la representación de los parámetros en los casos de la ecuación de una recta ($y = mx + b$) y de sistemas de ecuaciones lineales?
2.- En particular, ¿qué papel desempeña la experiencia con la variación de parámetros (representación simbólica) y su correspondiente representación gráfica, estando vinculadas estas en el ambiente computacional?

3.- En términos de la teoría de Duval, ¿qué papel desempeña la conversión entre registros, en su versión virtual en la construcción de significados, de objetos algebraicos?
4.- ¿Qué influencia tiene el trabajo con distintas representaciones de los parámetros y de las ecuaciones lineales en la distinción que puedan hacer los alumnos entre parámetros e incógnitas específicas?
5.- ¿Qué influencia tiene la asignación de significado geométrico a la representación literal de los parámetros en el aprendizaje de métodos geométricos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales?

Marco teórico

Sistemas de representación y teoría de los registros

Para el aprendizaje de las matemáticas es importante el uso y manejo adecuado de símbolos y representaciones, así como la coordinación de registros, el conocimiento conceptual de múltiples representaciones semióticas y la definición de variables considerando diferentes registros de representación. Duval (1998) afirma que la palabra "representación" se emplea con frecuencia bajo su forma verbal "representar". Un objeto matemático puede estar representado por símbolos, trazos y figuras. También afirma que jamás se debe confundir a los objetos matemáticos con su representación. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas.

Las representaciones semióticas desempeñan un papel fundamental en la actividad matemática. Además, Duval menciona que sólo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, y que se puede construir un verdadero ambiente para el aprendizaje; señala que no se puede evitar la confusión al no tener la posibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos fuera de toda representación semiótica. Una figura geométrica, una fórmula algebraica y una gráfica son representaciones semióticas diferentes.

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano es inseparable de una diversidad de registros semióticos de representación. Se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto (Duval, 1998). No hay noesis sin semiosis: no se debe enseñar las matemáticas como si la semiosis fuera una operación menos aceptable con respecto a la noesis.

En la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica en el transcurso de una misma gestión, o poder escoger un registro en lugar de otro. Recurrir a varios registros es una condición necesaria para que no se confundan los objetos matemáticos con sus representaciones y para que se les pueda reconocer en cada una de ellas. Duval (1998) hace notar que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

1.- La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado: el dibujo de una figura geométrica, la elaboración de un esquema y la escritura de una fórmula.

2.- El *tratamiento*, que es la transformación al interior de un registro. El cálculo es una forma de tratamiento propio para las escrituras simbólicas.

3.- La *conversión***,** que es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de determinada información de un registro a otro; es una transformación externa relativa al registro de representación de partida.

Duval menciona que la conversión de las representaciones resultaría por sí misma desde el momento en que alguien ya es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones tales como construir una gráfica, escribir una ecuación y sustituir en ella los valores numéricos de las variables.

En la conversión, el alumno se debe percatar de la diferencia entre el sentido, la referencia de los símbolos y los signos. Para la escritura de un número es necesario distinguir la significación operatoria ligada al significante. Para una adición deben ponerse en acción los mismos tratamientos, por ejemplo:

$0.25 + 0.25 = 0.50$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2$ y $25 \times 10^{-2} + 25 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-2}$.

La *conversión* es importante para la comprensión de los objetos o de los contenidos conceptuales representados. Los criterios de *congruencia* fueron importantes para el análisis de las actividades de la investigación que aquí se presenta:

> Varias razones pueden explicar la amplitud y la profundidad del fenómeno de encasillamiento de los registros de representación. Aludiremos a la *no congruencia* la cual es inherente a la variedad heterogénea de los registros; cuando hay *congruencia* entre la representación de partida y la de llegada, la conversión es trivial y casi podría ser considerada, intuitivamente, como una simple codificación. (Duval, 1998c, pp. 247 – 249)

Los procesos de conceptualización y visualización también se consideran de importancia en el sustento teórico para efectuar el análisis de las actividades que se reportan en este documento. La *conceptualización* implica una coordinación de registros de representación: "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" (Duval, 1998, p. 186). Por otra parte, *"*La *visualización* se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica; es decir, ni mental ni física […] La visualización está basada en la producción de una representación semiótica" (Duval, 1999, p. 14). Duval (1999) afirma para desarrollar la visualización se requiere un entrenamiento específico para cada registro, sin reducirlo a un entrenamiento de construcción; es decir, se deben considerar las reglas del registro y de las matemáticas.

La visualización es una habilidad que debe ser desarrollada en el alumno, apoyada en la tecnología. Por esta razón en este trabajo de investigación se hace uso del software *Cabri–Géomètre*, considerándolo como herramienta que permite manipular los objetos matemáticos (rectas). Esta herramienta permite al alumno una mejor visión del objeto matemático y le ayuda a pasar del registro gráfico al registro algebraico de la recta.

En relación a las características del software, la geometría dinámica ofrece la posibilidad de medir longitudes y áreas, trazar lugares geométricos de puntos cuando se aplican transformaciones dinámicas por medio del arrastre y observar cómo responden a la transformación el resto de los elementos (puntos, líneas, rectas paralelas y perpendiculares, etc.) que integran la construcción. Cuando se arrastra un objeto, el software mantiene todas las relaciones matemáticas que se especificaron entre los elementos de la construcción original y todas las que se derivan de ellas (Goldenberg y Cuoco, 1998; Laborde, 1998; Mariotti, 2000).

El diseño de la secuencia didáctica tuvo como referencia el trabajo de Cuevas *et al*., 2005, que se convirtió es una fuente muy rica para el estudio de la noción algebraica de parámetros en la educación secundaria con alumnos de 14 y 15 años de edad, pues estos autores se centran en los aspectos geométricos, apoyados en la tecnología digital, a fin de que el estudiante comprenda visual y dinámicamente qué representan distintos conceptos presentados en su trabajo.

Método

Este estudio es de corte cualitativo: para documentar y analizar los procesos de estudiantes sobre la conceptualización de los parámetros de la ecuación de la recta se aplicó una *secuencia didáctica*, diseñada para el aprendizaje de la ecuación de la recta y de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se llevó a cabo un estudio longitudinal aplicando un *diagnóstico* inicial y un cuestionario final mediante una *entrevista* individual.

A continuación se describen brevemente las características del escenario y de los instrumentos utilizados en esta investigación: 1) descripción de sujetos; 2) cuestionario inicial (diagnóstico); 3) secuencia didáctica, y 4) entrevistas individuales.

La investigación fue efectuada en una escuela secundaria diurna de la ciudad de México con nueve alumnos de tercer grado, quienes presentaron diferentes rendimientos académicos —alto, medio y bajo— y fueron capacitados en el manejo del *Cabri-Géomètre*. Los nueve alumnos resolvieron un *cuestionario diagnóstico* para mostrar sus habilidades en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y para conocer si interpretaban las letras como incógnitas específicas. También se puso atención en cómo analizaban las gráficas cartesianas. Las actividades de este cuestionario están fundamentadas en la vía del punteo, la vía de extensión del trazo efectuado y la vía de interpretación global de las propiedades de las figuras para interpretar una representación gráfica (Duval, 1992).

La *secuencia didáctica* se diseñó con la finalidad de que a través de diversas actividades los alumnos llegaran a identificar los parámetros de pendiente (m) y de ordenada al origen (b) en los registros algebraico y geométrico y pasaran de un registro a otro.

Para la segunda parte se diseñó una secuencia sobre sistemas lineales de 2×2 con acercamiento de geometría dinámica y orientada a elementos de la geometría analítica. Asimismo, se elaboraron actividades para trabajar con el *Cabri-Géomètre* y también con lápiz y papel, poniendo énfasis en las diferencias en los procesos con ambas herramientas. En una etapa posterior se generalizó el método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones.

Las actividades con el software fueron desarrolladas en parejas; esto dio oportunidad de observar el desempeño de los estudiantes y de seleccionar a tres de ellos, que son los casos que más adelante se reportan, para una entrevista individual semi-estructurada.

El análisis de las sesiones experimentales se efectuó con base en la *teoría de representaciones semióticas* (Duval, 1999), considerando los criterios de no congruencia y congruencia, así como los procesos de visualización, conversión y conceptualización.

Descripción de los ítems utilizados en el diagnóstico

.- Obtener las coordenadas de los puntos señalados en la recta.

.- Dada la expresión $y = mx + b$, indicar los significados de m y b.

.- Completar las tablas de variación, dadas las ecuaciones y los valores de x.

.- Obtener la gráfica de cada ecuación en un mismo eje de coordenadas.
.- Relacionar el signo de la pendiente con la posición de las rectas.
.- Decir cuál recta tiene mayor inclinación.
.- Relacionar la ecuación con la gráfica e indicar las semejanzas y diferencias de la recta de acuerdo con su posición.
.- Indicar cuáles rectas pasan por el origen, por arriba o por debajo de él.

Descripción de los ítems utilizados en la secuencia didáctica
.- Dadas las gráficas y las ecuaciones, relacionen una de las gráficas con la ecuación que le corresponde.
.- Dadas las coordenadas, tracen dos rectas que se intersequen con los ejes y entre sí, para proceder a moverlas por medio del arrastre y observar los cambios que presentan en ambos registros.
.- Obtengan las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas.
.- Obtengan la ecuación de cada una de las rectas y sustituyan las coordenadas en una de las ecuaciones.
.- Hagan la igualación y comprueben si ese sistema de ecuaciones tiene solución.
.- Tracen familias de rectas paralelas y perpendiculares para que observen cómo es el valor de la pendiente en relación con la posición de las rectas.

Entrevista

Para la entrevista se utilizó un protocolo el cual se elaboró con base en las respuestas no acertadas de los alumnos, o bien para reafirmar su comprensión lograda.

Resultados

El estudio se llevó a cabo con nueve alumnos; aquí se reportan tres casos (las seleccionadas fueron alumnas), una de rendimiento académico alto, otra medio y otra bajo.

Diagnóstico inicial

Era la primera vez que estas alumnas trabajaban el tema de parámetros en la ecuación de la recta, entonces las respuestas al cuestionario inicial mostraban sus ideas previas acerca del concepto de ordenada al origen. Ejemplo de actividades planteadas en el diagnóstico son: se les pidió a las alumnas que, dada la expresión $y = mx + b$, indicaran los significados de m y b; que completaran las tablas de variación dadas las ecuaciones y los valores de x; que obtuvieran la gráfica de cada ecuación en un mismo eje de coordenadas, y que dada la expresión algebraica y el valor de x obtuvieran el valor de y; por último, que señalaran en la gráfica el valor obtenido de y. A partir de estas actividades las alumnas empezaron a ubicar dónde se presenta el parámetro b en el registro gráfico.

La alumna de alto rendimiento fue la única en representar tres graficas de las cuatro sujetándose a las indicaciones. A continuación en la Figura 1 se muestra el trazo correcto de las rectas y en las Figura 2, 3, y 4 se muestran los trazos de las rectas efectuados por las alumnas.

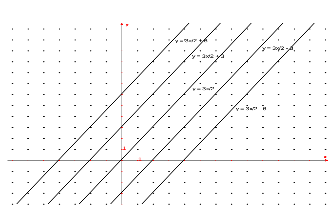

Figura 1: Trazo correcto de rectas

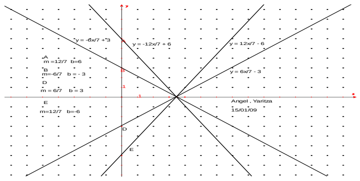

Figura 2. Alumna de rendimiento bajo

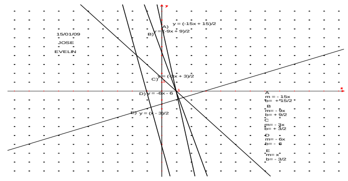

Figura 3. Alumna de rendimiento medio

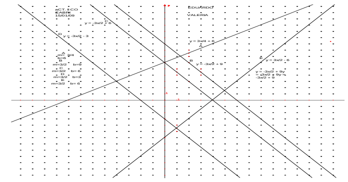

Figura 4. Alumna de rendimiento alto

La alumna de alto rendimiento identifica en el registro algebraico los parámetros *m* y *b* y el registro algebraico sólo identifica el parámetro *b*.

En relación con la pendiente se dio a las alumnas una hoja de tarea con diferentes rectas y la ecuación correspondiente a cada recta; se les pidió que señalaran cuáles rectas pasan por el origen, arriba o por debajo de éste y que relacionaran el valor de la pendiente de la expresión algebraica con la posición de la recta. Ninguna de las alumnas relacionó el valor de la pendiente con la inclinación de la recta, lo cual indica que no tenían claro el concepto de pendiente o de inclinación.

Secuencia didáctica

Se presenta una de las actividades con el *Cabri–Géomètre* que desarrollaron las tres alumnas seleccionadas; en esta actividad no hubo "arrastre de puntos". Se les pidió a las alumnas que trazaran las rectas correspondientes a las ecuaciones: $y = 3x/2 + 6$, $y = 3x/2 + 3$, $y = 3x/2$, $y = 3x/2 - 3$ e $y = 3x/2 – 6$. Además, se les pidió que dieran respuesta a los ítems en cuanto a las semejanzas o diferencias entre las rectas y las expresiones algebraicas, y que explicaran por qué algunas rectas pasan por el origen, por arriba o por debajo de él.

En esta etapa inicial del estudio, con base en las gráficas, se notó que las alumnas tuvieron dificultades para trazar las rectas y establecer semejanzas o diferencias de estas tanto en su forma gráfica (paralelismo e intersecciones) como en su expresión algebraica.

- El trazo incorrecto de las rectas lo atribuimos a que al momento de sustituir los valores arbitrarios de *x* para obtener los valores de *y* en el proceso algebraico las alumnas efectuaron las operaciones de manera errónea.
- Pudimos observar que en esta etapa las alumnas no tenían clara la relación funcional entre variables.
- A causa de que las alumnas trazaron de manera incorrecta las gráficas, no pudieron observar que las rectas son paralelas y que la pendiente es la misma.
- En el ítem relacionado con la ordenada al origen, las alumnas no lograron expresar con claridad por qué algunas rectas pasan por arriba y otras por debajo del origen.
- Las alumnas no lograron identificar el parámetro *b* en los registros gráfico y algebraico.

Comentarios sobre los resultados según la teoría de Representaciones: respecto a los criterios de no congruencia y congruencia, y los procesos de conversión, visualización y conceptualización se tiene que:

a) En las graficas que trazaron las alumnas, aparecen muestras de *no congruencia***:** en el proceso de sustitución las tres alumnas no pudieron pasar del registro algebraico al tabular, por lo que no hay univocidad ni correspondencia semántica de los elementos significantes; además de que las alumnas no identificaron los parámetros en las ecuaciones que se les proporcionan para trazar las rectas y desconocían por completo las variables visuales en las que se podrían haber apoyado. Duval (1992) menciona que para proceder a la interpretación global de las propiedades de las figuras se debe considerar lo siguiente: *la forma de su escritura algebraica, llevar a cabo un*

análisis de congruencia entre dos registros de representaciones de un objeto o de una información y debe haber la asociación "variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica".
b) Por lo anterior, se considera que las alumnas no lograron pasar a la *conversión*: no trazaron las rectas correctamente a pesar de que intentaron hacer tablas de variación para obtener las coordenadas de los puntos e indicarlos en el plano.

A continuación presentamos una de las actividades llevadas a cabo por las alumnas elegidas, quienes utilizaron el *Cabri–Géomètre*, en esta actividad sí se llevó a cabo la manipulación de objetos en la pantalla "por arrastre". Se les indicó a las alumnas que hicieran lo siguiente: a) Tracen dos rectas cualesquiera y etiquétenlas con las letras G y Z respectivamente, b) apoyándose en el software, obtengan la ecuación de cada recta y señalen los valores de la pendiente y de la ordenada al origen. c) arrastren la recta Z por el punto en que se interseca con el eje *x* y observen cómo cambia el valor de la pendiente; hagan lo mismo con la recta G, d) definan el punto de intersección de las rectas y obtengan las coordenadas de ese punto para sustituir en una de las ecuaciones; luego, e) por medio de una igualación indiquen si el sistema de ecuaciones tiene solución. Las Figuras 5, 6 y 7 corresponden a las gráficas trazadas por las alumnas.

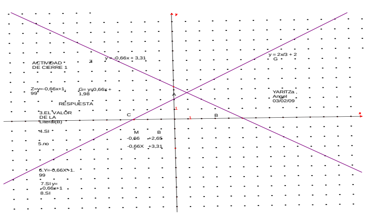
Figura 5. Alumna de rendimiento bajo

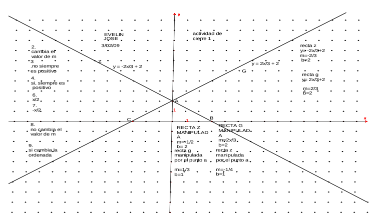
Figura 6. Alumna de rendimiento medio

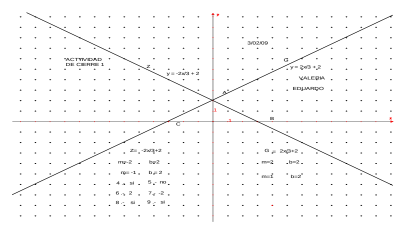
Figura 7. Alumna de rendimiento alto

En esta etapa del estudio las alumnas lograron trazar las rectas sin dificultad, obtuvieron las ecuaciones y de éstas los valores de la pendiente y de la ordenada al origen. También definieron el punto donde se intersecan las rectas y con ayuda del software determinaron las coordenadas.

Al arrastrar la recta Z por el punto donde se interseca con el eje *x*, las alumnas observaron en la expresión algebraica que el único parámetro que varía es la pendiente; pero al arrastrar ambas rectas por el punto donde se intersecan entre sí, observaron que ambos parámetros cambian en las ecuaciones. Este momento fue un inicio importante para que las estudiantes identificaran los parámetros *m* y *b* en ambos registros.

En relación con el ítem donde se tiene que comprobar la solución del sistema de ecuaciones mediante igualación se obtuvieron los siguientes resultados: i) la alumna de bajo rendimiento escolar no comprobó para justificar la respuesta de que el sistema de ecuaciones no tiene solución, y ii) las alumnas de medio y alto rendimiento escolar no tuvieron dificultades para efectuar la igualación y justificar que las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas son la solución del sistema de ecuaciones correspondiente. Respecto a los criterios de *no congruencia* y *congruencia*, y los procesos de *conversión*, *visualización* y *conceptualización* se tiene: a) La congruencia se evidencia cuando las alumnas localizan en los ejes los puntos por donde quieren que pasen las rectas. Con esto se confirma, según la teoría de Duval, que a cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde sólo una unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada (Duval, 1993), b) la sustitución es una *conversión* para verificar de forma numérica las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas. La *conversión* se presenta en ese ítem en el momento en que las alumnas obtienen las ecuaciones de las rectas: se pasa del registro gráfico al algebraico; es decir, la conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro a otro. La conversión también es importante para la comprensión de los objetos o de los contenidos conceptuales representados (Duval, 1998), c) La *visualización* se da en el momento en que las alumnas obtienen las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas. En este caso "la visualización está basada en la producción de una representación semiótica" (Duval, 1999, p. 14), d) La *conceptualización* tiene inicio en el momento en que las alumnas sustituyen los valores de las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas, ya sea en la ecuación de la recta G o en la ecuación de la recta Z, para obtener la igualación y verificar si las coordenadas de ese punto son la solución del sistema de ecuaciones. En este proceso hay coordinación del registro gráfico con el algebraico y con el numérico. Duval (1998, p. 186) afirma que "la conceptualización reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión".

En cuanto a la conceptualización, observamos que la alumna de bajo rendimiento no logró llegar a este proceso porque no llevó a cabo la igualación para justificar que las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas son la solución del sistema de ecuaciones correspondiente.

Entrevista

Esta parte de la investigación se realizó para confirmar si las alumnas habían comprendido las actividades planteadas, se llevaron a cabo de forma individual.

Durante la entrevista las alumnas utilizaron el *Cabri–Géomètre* para abordar las preguntas que se les hacían y así verificar si podían identificar los parámetros *m* y *b* en los registros gráfico y algebraico; además, de entender la relación funcional de la variable, para diferenciar un parámetro de una incógnita; un parámetro de una variable y una incógnita de una variable, y de esta manera llegar a la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas. Se observó que el uso del *Cabri–Géomètre* ayudó a las alumnas a desarrollar la visualización a través del arrastre de los objetos geométricos y adquirir así habilidad en el uso de las variables visuales, logrando observar cuándo una recta sube o baja, cuándo pasa por el origen, por arriba o por debajo de él, para dar pie a identificar los parámetros *m* y *b* en los registros gráfico y algebraico. Esto se logró a través de la secuencia didáctica y se afirmó durante la entrevista.

Comentarios

Diagnóstico

1.- Las alumnas seleccionadas no tuvieron dificultades en la identificación o ubicación de las coordenadas de los puntos en el plano para trazar una recta. Aplicaron de manera correcta la vía del punteo para interpretar una representación gráfica a partir de una pareja ordenada de números que permite identificar un punto.
2.- Las alumnas no tenían noción de los conceptos de pendiente y de ordenada al origen. En la forma común de la de la recta, $y = mx + b$ no supieron explicar qué representa *m* y qué representa *b*; esto indica que no tenían antecedentes de haber abordado estos conceptos.
3.- Se observó que las alumnas de bajo y medio rendimiento matemático en algunas ecuaciones no tenían claridad en el uso de la variable en una relación funcional de la forma pendiente-

ordenada al origen, pues no obtuvieron el valor de la variable independiente para completar las tablas de variación y formar las coordenadas de los puntos, ubicarlos en el plano y proceder a trazar las rectas. Sin embargo, la alumna de alto rendimiento mostró que tenía claridad en el uso de la variable en una relación funcional.

Secuencia didáctica

4.- En las actividades en que las alumnas trabajaron con el *Cabri–Géomètre* y donde no se utiliza el arrastre tuvieron dificultades para identificar los parámetros *m* y *b* en las ecuaciones que se les pedía que trazaran sus gráficas.
5.- Desconocían por completo las variables visuales en las que se pudieron apoyar para trazar las rectas. Ésta puede ser una razón por la que no pudieron indicar la semejanza o diferencia entre la posición de las rectas y las expresiones algebraicas.
6.- En las actividades en que se usó el *Cabri–Géomètre* y donde sí se utiliza el arrastre de objetos en la pantalla las alumnas manipularon las rectas por primera vez y les llamó la atención observar cómo cambian los valores de los parámetros de la pendiente y de la ordenada al origen (*m* y *b)* en las expresiones algebraicas.
7.- El arrastrar las rectas con el *Cabri-Géomètre* les ayudó a tener mejor visualización de los parámetros *m* y *b,* tanto en el registro gráfico como en el algebraico.
8.- Al arrastrar las rectas por el punto donde se intersecan con el eje *x* se observó que cambia el parámetro *m* en la expresión algebraica, y al arrastrar la recta donde se interseca con el eje *y* cambian ambos parámetros (*m* y *b*). Las alumnas pudieron observar estos cambios en las ecuaciones y por tanto pudieron determinar qué parámetro es el que se modificaba. Esto mostró que las alumnas comprendieron estas variables en una relación funcional, lo cual representa un paso significativo hacia la visualización de los parámetros *m* y *b* en ambos registros.
9.- Se observaron los avances de las alumnas conforme desarrollaban las actividades de la secuencia didáctica por ejemplo: a) Las tres alumnas adquirieron habilidad para identificar los parámetros *m* y *b* en el registro algebraico, b) hicieron uso de las variables visuales e identificaron cuándo una recta pasa por arriba o por debajo del origen, porque el signo de la pendiente es positivo o negativo, c) entendieron la relación funcional de la variable en una ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen, d) diferenciaron un parámetro de una variable y un parámetro de una incógnita, e) reconocieron que el punto donde se intersecan dos rectas es la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y lo pudieron comprobar mediante igualación, f) identificaron que la pendiente de una familia de rectas paralelas es la misma y que las pendientes de rectas perpendiculares son recíprocas entre sí;
10.- entendieron los conceptos de inclinación, pendiente y ordenada al origen.
11.- En cuanto a la Teoría de Representaciones: Se aprecia en las respuestas de las tres alumnas la presencia de los criterios de *no congruencia* y *congruenci*a, así como de los procesos de conversión, visualización y conceptualización de manera acertada.

Entrevista

12.- Se reflejó el avance que las alumnas lograron conforme se desarrollaron las actividades del cuestionario inicial o diagnóstico y la secuencia didáctica.

13.- Algunas preguntas de la entrevista fueron verbales y las demás las hicieron con el *Cabri–Géomètre*. Las alumnas de medio y alto rendimiento escolar sí llevaron a cabo el proceso de conceptualización a través del desarrollo de las actividades.
14.- La alumna de bajo rendimiento escolar no logró el proceso de conceptualización porque se le dificultó efectuar la igualación para justificar que las coordenadas del punto en que se intersecan las rectas que ella misma trazó son la solución de un sistema de ecuaciones. A pesar de ello, esta alumna mostró un gran avance cuando inició las actividades con el arrastre de los objetos matemáticos y observó los cambios en las expresiones algebraicas. Asimismo, durante la entrevista tuvo buen desempeño excepto en la igualación.

Conclusiones

A pesar de que las alumnas tuvieron dificultades en el diagnóstico con los conceptos de pendiente y ordenada al origen observamos que dos de ellas, las de medio y alto rendimiento lograron el propósito de la investigación llegando a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual comprobaron por igualación y con esto observamos que fueron capaces de llegar al proceso de conceptualización. El orden del desarrollo de las actividades de la secuencia sirvió a las alumnas a adquirir habilidades para identificar los parámetros m y b en ambos registros, y a sentar las bases que les permitieron discriminar entre parámetros e incógnitas.

Las actividades con lápiz y papel nos ayudaron a observar las dificultades que las alumnas tenían para la identificación de los parámetros y la relación funcional de la variable y las actividades con el *Cabri–Géomètre* ayudaron a las alumnas a desarrollar habilidades para la identificación de los parámetros m y b en la expresión algebraica. El arrastre (manipulación) de los objetos por diferentes puntos con el *Cabri–Géomètre* ayuda a las alumnas a desarrollar la visualización para identificar los parámetros m y b en los registros algebraico y geométrico. La relevancia de esta investigación se ve reflejada en la combinación del *Cabri–Géomètre* con la teoría de representaciones para llevar a cabo los criterios de congruencia y no congruencia, y los procesos de conversión visualización hasta llegar a la conceptualización.

La conversión es un proceso importante en esta investigación porque se puede pasar de un registro a otro sin tabular. Dicho proceso da pie a efectuar la visualización por ejemplo: al momento en que se arrastra el objeto geométrico se ven reflejados en la pantalla los cambios en la ecuación de la forma $y = mx + b$ apreciándose la variación de los parámetros en ambos registros. Los procesos anteriores nos sirven para llegar a la conceptualización.

Referencias

Bernal, T. (2006). Estudio exploratorio con estudiantes de tercer grado de secundaria. Para hallar el significado de los parámetros m y b en la ecuación de la recta ($y = mx + b$), utilizando *Cabri – Géomètre*. (Tesis de Maestría). Matemática Educativa. Cinvestav–IPN.

Bloedy–Vinner, H. (2001) “The analgebraic mode of thinking–The case of parameter”, in da Ponte, J.D. Matos, J. F. (eds.), *Proccedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematic Education*, Vol. 2. University of Lisbon Portugal, pp. 82–95.

Cuevas, C; Mejía, H; Pluvinage & F; Zubieta, G (2005) Geometría analítica dinámica. México. Editorial Oxford.

Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones. En Antología en Educación Matemática. (pp. 124–139). Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa. México, D F.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. En Fernando Hitt (Ed.). En *Didáctica*. Investigaciones en Matemática Educativa II. Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Matematics*. Vol. 9, No. 2, p. 19–25 (June), Quebec.

Gilead, S.; & Yerushalmy, M. (2001). Deep structures of algebra word problems: Is it approach (in) dependent? In M. van den Heuvel–Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th PME International conference*, 3, 41 – 48.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer & D.Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 351-367). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoyos V. (1996). La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico. (Tesis para el D. En C. Especialidad Matemática Educativa). Cinvestav – IPN.

Kieran C., Boileau, A., & Garançon, M. (1989). Proceses of mathematization in algebra problem solving within a Computer environment: A functional approach. In C.A. Maher, G.A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), Proceedings of the 11th PME-NA Annual Meeting 1, 26-34.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer based environment. En C. Mammana & V. Villiani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 113-120). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lagrange, J. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4* (1), 51-81.

Lara, N (1995). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. (Tesis maestría) Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav–IPN.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-2), 25-53.

R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (2001) "Perspectives on School Algebra", Mathematics Education (Vol. 22 pp. 177–189). Australia. Kluwer Academic Publishers.

Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. In A.A. Cuoco, & F.R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics (Yearbook of the NCTM, pp.251-268). Reston, USA: NCTM.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2000). Flux in school algebra: Curricular change, graphing, technology, and research on student learning and teacher knowledge. In L. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (pp. 725-755). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.