CAMBIOS EN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO CURSO EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Sixth graders' procedure changes in multiplicative structure problems

Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina cómo cambian los procedimientos de estudiantes de sexto curso cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa con fracciones tras haber participado en una instrucción basada en el principio de variación considerando dos conexiones: la conexión entre los diferentes problemas de estructura multiplicativa y la conexión de los problemas de estructura multiplicativa con números naturales y con fracciones. Para analizar estos cambios, utilizamos un pre-test y un post-test que consistían en 9 problemas de estructura multiplicativa. Los resultados muestran tres grupos de cambios en los procedimientos: progresión, adaptación y dificultades.

Palabras clave: *problemas de estructura multiplicativa, principio de variación, educación primaria, estrategias, representaciones.*

Abstract

This study examines how sixth graders' procedures change when they solve multiplicative structure problems with fractions after participating in an instruction based on the variation principle that considers two connections: connecting multiplicative structure problems and connecting multiplicative structure problems with natural numbers and fractions. To analyse these changes, we used a pre-test and post-test that consist of 9 multiplicative structure problems. The results show three groups of changes in procedures: progression, adaptation, and difficulties.

Keywords: *multiplicative structure problems, variation principle, primary school, strategies, representations*.

INTRODUCCIÓN

En la década de los 80, se inició una línea de investigación que identificó que la resolución de problemas de estructura multiplicativa con números racionales suponía un reto para los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (e.g., Fischbein et al., 1985; Levain, 1992). Fischbein et al. (1985) mostraron que una de las causas de estas dificultades eran las generalizaciones procedentes de los números naturales: el producto de una multiplicación siempre será un número mayor que ambos factores, y el cociente de una división siempre será un número menor que el dividendo. Es decir, los estudiantes mostraban no prestar atención a la invariancia de la estructura multiplicativa de los problemas cuando se trabaja con números naturales o con números racionales (Levain, 1992; Zorrilla et al., 2022). A pesar de que estas investigaciones se realizaron varias décadas atrás, estudios de los últimos años han documentado que las dificultades con los números racionales persisten (González-Forte et al., 2022; Zorrilla et al., 2022, 2023), por lo que es necesario seguir explorando cómo los estudiantes aprenden en la transición de los números naturales a los racionales cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Para superar las dificultades, estudios previos han propuesto promover dos conexiones: la conexión entre los diferentes problemas de estructura multiplicativa (operaciones inversas, Downton, 2009), y la conexión de los problemas de estructura multiplicativa con números naturales y con fracciones (Levain, 1992). La enseñanza

Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P. (2023). Cambios en los procedimientos de los estudiantes de sexto curso en problemas de estructura multiplicativa. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 547–554). SEIEM.

centrada en el principio de variación ha permitido implicar a los estudiantes en estos dos tipos de conexiones (Sun, 2019). Sin embargo, no conocemos estudios que se hayan centrado en explorar empíricamente cómo los estudiantes aprenden en la transición de los números naturales a los racionales cuando participan en una instrucción centrada en la enseñanza con variación que promueve ambas conexiones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

MARCO TEÓRICO

Nos centramos en (i) los problemas de estructura multiplicativa, y en las representaciones y estrategias usadas por los estudiantes en estos problemas, y (ii) la enseñanza con variación.

Problemas de estructura multiplicativa: Representaciones y estrategias

En este estudio nos centramos en los problemas de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983). En estos problemas, al reducirse una de las cuatro cantidades a una unidad, los estudiantes deben identificar las relaciones que se establecen entre tres cantidades, dando lugar a tres clases de problemas si atendemos a la cantidad desconocida (Greer, 1992): multiplicación, cuya incógnita es la cantidad total; división-partitiva, cuya incógnita es el número de elementos por grupo y; división-medida, cuya incógnita es el número de grupos. Empson y Levi (2011) identificaron las siguientes estrategias en estudiantes cuando resolvían estos problemas con fracciones:

- *Representación de cada grupo*. Se representan todas las cantidades, que se utilizan para contar, sumar o restar hasta obtener la respuesta al problema. La representación puede darse de dos modos: dibujando las cantidades; o empleando símbolos matemáticos para mostrar las relaciones matemáticas, i.e., adición repetida.
- *Estrategias de agrupamiento y combinación*. A diferencia de la estrategia previa, solo se representan las cantidades que se consideran necesarias. Las cantidades se agrupan aditivamente hasta alcanzar lo que Empson y Levi (2011) denominan "cantidades amigables" (p. 57) con las que trabajar de una manera más sencilla. Normalmente, estas cantidades se tratan de números naturales.
- *Estrategias multiplicativas*. Los estudiantes usan relaciones multiplicativas a través de la formación de grupos.

Por otro lado, la comunicación de la resolución del problema requiere representaciones (Dahl, 2019). Mainali (2021) categorizó los modos de representación como: gráfico, que incluye recursos figurativos (dibujos, diagramas…); verbal, que incluye el lenguaje natural (escrito u oral); numérico, que incluye la presentación de datos/conceptos de forma ordenada y; algebraico, que incluye el uso de fórmulas, símbolos, etc. Asimismo, Duval (2017) también destacó la importancia de los cambios producidos entre/dentro de los distintos modos (i.e., *transformaciones*), los cuales dividió en dos tipos: *tratamiento* y *conversión*. Por un lado, el tratamiento consiste en la transformación dentro del mismo modo de representación (e.g., cambiar de fracción a expresión con coma dentro del modo de representación numérico). Por otro lado, la conversión consiste en la transformación entre modos de representación (e.g., de modo de representación gráfico a modo de representación verbal).

La variación como herramienta para el aprendizaje

Hay dos tradiciones para la enseñanza con variación: la tradición sueca, con la teoría de variación del aprendizaje (Marton, 2015); y la tradición china, con la enseñanza *Bianshi* (Cai y Nie, 2007; Sun, 2019).

En cuanto a la tradición sueca, Marton (2015) indicó que para dominar un objeto es necesario discernir y tomar en consideración sus características necesarias. Estas características necesarias, denominadas *características críticas*, se tratan de las características *claves específicas* necesarias en el aprendizaje del objeto. Marton (2015) identificó tres patrones de (in)variación: contraste, generalización y fusión. En este estudio nos centramos en la generalización. Si discernir el color verde fuera el objeto de aprendizaje, la generalización consistiría en mantener el color "verde" invariante mientras variarían otras características (e.g., forma del objeto).

En lo que respecta a la tradición china, la enseñanza *Bianshi* considera condiciones en el objeto de aprendizaje que, a través de su variación, promueven el discernimiento. Cai y Nie (2007) y Sun (2019) distinguen tres tipos de actividades comunes en esta enseñanza: un problema con múltiples cambios (OPMC, por sus siglas en inglés), que consiste en proponer nuevos problemas en base a un problema original ya resuelto; un problema con múltiples soluciones (OPMS), que consiste en brindar la oportunidad de resolver un problema de diferentes maneras; y múltiples problemas con una solución (MPOS), que consiste en el uso de una única estrategia que resuelva un grupo de problemas cuya estructura lo permite.

En nuestro estudio, diseñamos la instrucción teniendo en cuenta las actividades de variación identificadas en Cai y Nie (2007) y el patrón de generalización de Marton (2015). Antes y después de la instrucción se realizó un pre-test y un post-test con el objetivo de explorar cómo la instrucción diseñada apoya/obstaculiza el aprendizaje de los estudiantes. En esta investigación contestamos a la pregunta de investigación: ¿Cómo cambian los procedimientos (estrategias y representaciones) usados por estudiantes de 11-12 años cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa tras participar en una instrucción basada en la enseñanza con variación?

MÉTODO

Se diseñó un módulo de enseñanza de ocho sesiones, siendo la primera y la última sesión un pre-test y un post-test. Las sesiones 2-7 se centraban en una instrucción basada en la enseñanza con variación (Cai y Nie, 2007; Marton, 2015). Se diseñaron 5 conjuntos de problemas que se trabajaron durante las 6 sesiones de la instrucción. Cada conjunto de problemas está formado por 3 problemas en los que se mantiene la misma situación y números, pero se varía el tipo de problema (Greer, 1992), i.e., multiplicación, división-partitiva y división-medida (variación OPMC). Para ilustrar esta variación, en la Tabla 1 se observa cómo en el conjunto de problemas 1 se varió el problema original de acuerdo a la incógnita, mientras la situación y los números se mantenían invariantes (3 paquetes de 4 kg son 12 kg). En cada conjunto de problemas, los 3 problemas se presentaron en diferente orden. Se esperaba que los estudiantes conectaran los tres tipos de problemas de estructura multiplicativa al discernir que la situación y los números eran los mismos y que solo variaba la incógnita.

Tabla 1. Conjunto de problemas 1 (variación OPMC)

Problema de multiplicación	Problema de división-partitiva	Problema de división-medida
Tenemos 3 paquetes. Cada paquete pesa 4 kilos. ¿Cuántos kilos tenemos en total?	Tenemos 3 paquetes. Todos los paquetes pesan lo mismo. Tenemos 12 kilos en total. ¿Cuántos kilos pesa cada paquete?	Tenemos algunos paquetes. Cada paquete pesa 4 kilos. Tenemos 12 kilos en total. ¿Cuántos paquetes tenemos?

Por otra parte, entre los conjuntos de problemas se mantuvieron la situación y los tipos de problemas (incógnita) y se variaron los números: números naturales en el *conjunto 1*, una fracción propia y dos números naturales en el *conjunto 2*, una fracción impropia y dos números naturales en el *conjunto 3*, dos fracciones propias y un número natural en el *conjunto 4* y dos fracciones impropias y un número natural en el *conjunto 5*. Al mantener invariantes la situación e incógnita del problema (mismo tipo de problema) y variar los números (variación OPMC), se pretendía apoyar a los estudiantes en la transición de los números naturales a las fracciones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa mediante la conexión de estos problemas con ambos conjuntos numéricos. Asimismo, se pretendía que los estudiantes observaran que podían resolver el mismo tipo de problema (ya fuera con fracciones o naturales) usando una misma estrategia (variación MPOS). Entre los conjuntos de problemas 1-2, 2-3 y tras el conjunto 5, se incluyeron problemas adicionales que no conservaban la misma situación ni los mismos números en los 3 problemas. Al mantener invariante el tipo de problema se pretendía que los estudiantes generalizaran la estructura de los problemas de estructura multiplicativa (Marton, 2015). Los estudiantes trabajaron todos los problemas en pequeños grupos, y posteriormente se discutieron las distintas estrategias en gran grupo (variación OPMS).

Por otro lado, las sesiones 1 y 8 se centraban en la resolución de un cuestionario individual. El pre-test y el post-test estaban formados por 9 problemas de estructura multiplicativa: 3 problemas de multiplicación (M), 3 problemas de división-partitiva (P) y 3 problemas de división-medida (Q). Entre estos problemas, se usaron problemas con números naturales (N); una fracción (Q1); dos fracciones propias (Q2) y dos fracciones, siendo una fracción impropia presentada como número mixto (Q2-m). La Tabla 2 muestra la estructura subyacente a cada problema, subrayando su incógnita (para pre-test véase Zorrilla et al., 2022). Se diseñaron 4 versiones de los cuestionarios, que presentaban los problemas de manera aleatoria. A los estudiantes se les indicó que debían justificar sus respuestas y que no podían utilizar dispositivos electrónicos en su resolución.

Tabla 2. Características de los problemas de pre-test y post-test

	Pre-test			Post-test		
	M	P	Q	M	P	Q
N	$8 \times 2 = \underline{16}$	$5 \times \underline{4} = 20$	$\underline{6} \times 4 = 24$			
Q1	$3 \times 2/3 = \underline{2}$	$3/4 \times \underline{16} = 12$	$\underline{8} \times 1/4 = 2$	$8 \times 3/8 = \underline{3}$	$2\ 1/2 \times \underline{2} = 5$	$\underline{16} \times 1/2 = 8$
Q2	$1/4 \times 3 = \underline{3/4}$	$6 \times \underline{1/8} = 3/4$	$\underline{5} \times 1/10 = 1/2$	$1/5 \times 2 = \underline{2/5}$	$6 \times \underline{1/9} = 2/3$	$\underline{3} \times 1/9 = 1/3$
Q2-m				$5\ 1/3 \times 3/4 = = \underline{4}$	$10 \times \underline{1/3} = = 3\ 1/3$	$\underline{6} \times 4/5 = = 4\ 4/5$

En este estudio participaron 17 estudiantes de 6º curso de Educación Primaria (11-12 años) de un centro público de la provincia de Alicante, cuyos nombres fueron modificados en el estudio para garantizar su anonimato. Los estudiantes se agruparon en 6 pequeños grupos de 2-4 personas para las sesiones. Estos estudiantes ya habían trabajado previamente con el concepto de fracción y con los algoritmos de la adición, sustracción y multiplicación de fracciones. Además, habían recibido instrucción sobre los cuatro algoritmos con números decimales. Las sesiones duraron aproximadamente 45 minutos.

Los datos analizados son las respuestas de los 17 estudiantes al pre-test y post-test. Este análisis constó de cuatro fases:

- Fase 1. Se analizaron las estrategias de los estudiantes en cada problema de acuerdo a las categorías de Empson y Levi (2011). Además, a partir de un análisis inductivo se refinaron las categorías iniciales y se generaron dos nuevas categorías *algoritmo* y *algoritmo inverso* (primera fila, Tabla 3). Llamamos estrategias informales a las estrategias que no implican el uso del algoritmo formal: representación de cada grupo, y a las estrategias aditivas y multiplicativas de agrupamiento y combinación.
- Fase 2. Se analizaron los modos de representación utilizados según la categorización de Mainali (2021) y las transformaciones -tanto tratamientos como conversiones- (primera columna, Tabla 3).
- Fase 3. Las fases previas permitieron identificar 15 procedimientos correctos (Tabla 3) y 8 procedimientos incorrectos (Tabla 4), obteniendo estos cruzando las estrategias identificadas en la fase 1 y las representaciones y sus transformaciones identificadas en la fase 2. A estos procedimientos se añadieron *respuestas en blanco* y *procedimientos no identificados*.
- Fase 4. Se analizaron los cambios en los procedimientos de los estudiantes entre el pre-test y el post-test.

Tabla 3. Procedimientos correctos identificados en pre-test y post-test

	Representación de cada grupo	Estrategia aditiva de agrupamiento y combinación	Estrategias multiplicativas		
			Estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación	Algoritmo	Algoritmo inverso
Sin conversiones/ tratamientos	X	X	X	X	X
Tratamiento a expresión con coma	X	X	X	X	X
Tratamiento a expresión con coma del resultado				X	
Tratamiento a número natural				X	
Tratamiento a expresión con coma y conversión a modo gráfico	X				
Tratamiento a expresión con coma y a número natural				X	
Tratamiento a número natural y conversión a modo gráfico	X				

Tabla 4. Procedimientos incorrectos identificados en pre-test y post-test

	Representación de cada grupo	Estrategias multiplicativas		
		Estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación	Algoritmo	Algoritmo inverso
Error en número de grupos representados	X			
Tratamiento erróneo a expresión con coma	X		X	X
Conversión a modo gráfico e interpretación errónea	X			
Tratamiento erróneo de operación/ agrupamientos		X	X	
Identificación de algoritmo erróneo			X	

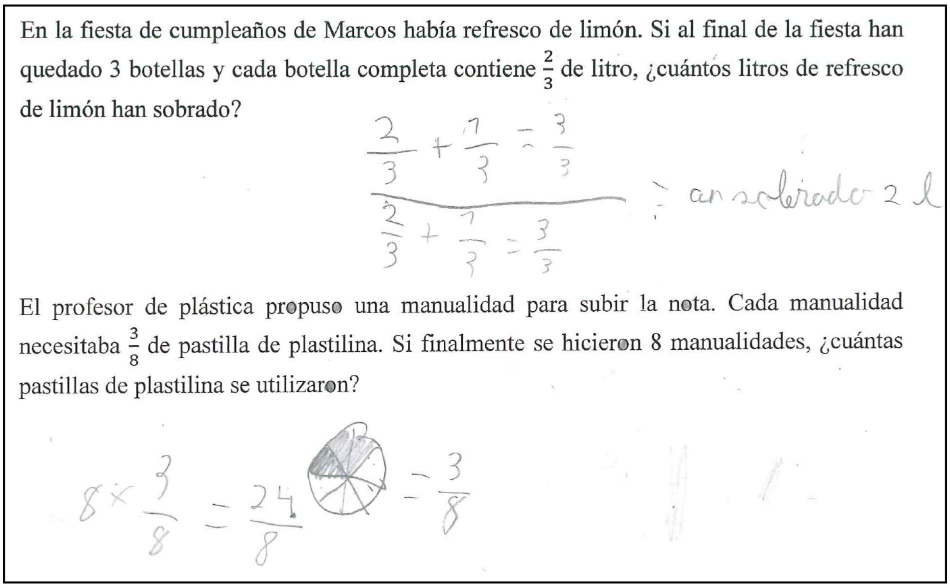
RESULTADOS

Agrupamos los cambios identificados en tres grupos: (i) cambios que mostraron progresión en los procedimientos, (ii) cambios que mostraron adaptación en los procedimientos y (iii) cambios que mostraron dificultades. Con relación a los cambios de progresión, identificamos tres:

- *De procedimientos incorrectos a usar procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test se usaron *identificación de algoritmo erróneo*, *respuestas en blanco* o *procedimientos no identificados*; mientras que en el post-test se usaron procedimientos de estrategias informales que reflejaron su conocimiento sobre las relaciones entre las cantidades correctamente (e.g., procedimientos de representación de cada grupo), en ocasiones con algunas dificultades (e.g., error en número de grupos representados).

- *De procedimientos incorrectos o uso de procedimientos de estrategias informales a identificar la operación formal*. En el pre-test se usaron *identificación de algoritmo erróneo*, *respuestas en blanco*, *procedimientos no identificados* o procedimientos de estrategia informal (e.g., procedimientos de las estrategias aditiva o multiplicativa de agrupamiento y combinación); mientras que en el post-test se identificó la operación formal (i.e., procedimientos de algoritmo o algoritmo inverso), aunque en ocasiones se presentaron dificultades en el tratamiento de la fracción y/o de la operación. La Figura 1 muestra las respuestas de Melania en los problemas M-Q1. En pre-test Melania recurrió a un procedimiento de estrategia informal aditiva de agrupamiento y combinación sin conversiones/tratamientos. En cambio, en post-test optó por un procedimiento de algoritmo con la multiplicación sin conversiones/tratamientos.

Figura 1. Respuestas de Melania a M-Q1 de pre-test y post-test



En la fiesta de cumpleaños de Marcos había refresco de limón. Si al final de la fiesta han quedado 3 botellas y cada botella completa contiene $\frac{2}{3}$ de litro, ¿cuántos litros de refresco de limón han sobrado?

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ = an sobrado 2 l

El profesor de plástica propuso una manualidad para subir la nota. Cada manualidad necesitaba $\frac{3}{8}$ de pastilla de plastilina. Si finalmente se hicieron 8 manualidades, ¿cuántas pastillas de plastilina se utilizaron?

$8 \times \frac{3}{8} = \frac{24}{8} = \frac{3}{8}$

- *De identificar la operación formal, pero con dificultades en el tratamiento a expresión con coma, a usar procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test, aunque identificaron el algoritmo correcto, realizaron un tratamiento erróneo a expresión con coma; mientras que en el post-test usaron procedimientos de estrategias informales como representación de cada grupo que les permitieron resolver los problemas correctamente.

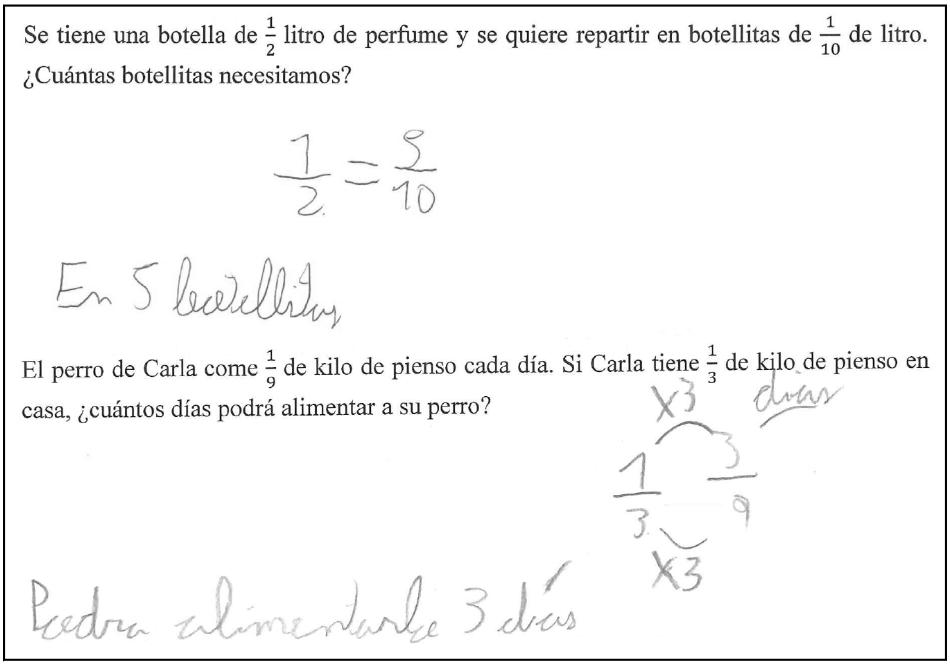
Identificamos dos cambios que mostraban adaptación de los procedimientos:

- *Uso de procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test y el post-test se usaron procedimientos de estrategias informales correctamente (e.g., de representación de cada grupo o de estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación). La Figura 2 muestra las respuestas de Jose en los problemas Q-Q2. Jose usó un procedimiento de estrategia informal multiplicativa de agrupamiento y combinación sin conversiones/tratamientos tanto en pre-test como en post-test.
- *Uso de procedimientos de operación formal*. En el pre-test y el post-test usaron procedimientos de algoritmo o de algoritmo inverso correctamente.

Por último, hallamos tres cambios en los que se observaron dificultades en los estudiantes:

- *De identificar la operación formal o usar procedimientos de estrategias informales a procedimientos incorrectos*. En el pre-test identificaron la operación formal (algunos con dificultades en el tratamiento) o usaron procedimientos de estrategia informal como la aditiva de agrupamiento y combinación, mientras que en el post-test usaron *identificación de algoritmo erróneo* o *procedimientos no identificados*.
- *Uso de procedimientos de estrategias informales, con dificultades*. En el pre-test y post-test usaron procedimientos de estrategias informales como la estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación, pero en el post-test se evidenciaron dificultades en la determinación del número de grupos a representar.

Figura 2. Respuestas de Jose a Q-Q2 de pre-test y post-test



- *Identificación de la operación formal, con dificultades en su tratamiento*. En el pre-test y post-test usaron el algoritmo, pero en el post-test se evidenciaron dificultades en los tratamientos a expresión con coma y/o de la operación.

Por último, cabe comentar que hubo estudiantes que usaron procedimientos incorrectos en ambos test. Estos estudiantes usaron en el pre-test y el post-test procedimientos incorrectos, *procedimientos no identificados* o *respuestas en blanco*.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han analizado los cambios en los procedimientos de los estudiantes cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa tras haber participado en una instrucción basada en el principio de variación. El diseño pareció ayudar a algunos estudiantes a superar sus dificultades. Esto se observa en los cambios identificados de progresión como *de procedimientos incorrectos a usar procedimientos de estrategias informales* o *de procedimientos incorrectos o uso de procedimientos de estrategias informales a identificar la operación formal*. Por un lado, de acuerdo con los resultados de Empson y Levi (2011), el primer cambio muestra que los estudiantes disponen de otras estrategias diferentes de la operación formal que les permiten resolver el problema. Este cambio podría deberse al formato OPMS seguido en las discusiones grupales de la instrucción, que potenciaba la discusión de distintas estrategias de resolución (informales y el algoritmo) para un mismo problema. Por otro lado, el segundo cambio muestra que los estudiantes fueron capaces de identificar la operación formal que resolvía el problema de estructura multiplicativa en el post-test. Este cambio podría deberse al diseño mediante OPMC, el cual permitía observar las conexiones entre las estructuras de los diferentes tipos de problemas y la transición desde el uso de números naturales a fracciones en un mismo tipo de problema. Por otro lado, otros estudiantes fueron capaces de adaptar sus procedimientos (de algoritmo o de estrategias informales) cuando trabajaban con distintos tipos de fracciones.

Sin embargo, también se identificaron cambios que muestran dificultades en algunos estudiantes. Estos cambios señalan que la transición de los naturales a las fracciones en la resolución de problemas multiplicativos no es sencilla, ya que algunos estudiantes mostraron dificultades en la adaptación de sus procedimientos; por ejemplo, cuando trabajaban con fracciones impropias dadas como números mixtos o con fracciones no decimales (*Identificación de la operación formal, con* *dificultades en su tratamiento*). Cabe mencionar que otras variables que no fueron objeto de estudio (socioculturales, lingüísticas, cognitivas, etc.) podrían haber influido sobre los resultados.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Ministerio de Universidades (FPU19/02965).

Referencias

Cai, J. y Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM*, *39*(5-6), 459-473. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0042-3

Dahl, H. (2019). "He's so fast at drawing" – Children's use of drawings as a tool to solve word problems in multiplication and division. En U. T. Jankyist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4475-4482). ERME.

Downton, A. (2009). It seems to matters not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 161-168). MERGA.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Heinemann.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

González-Forte, J.M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 22,* 47-70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situation. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). McMillan.

Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(2), 139-156. https://doi.org/10.1007/BF00588053

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1-21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Sun, X. H. (2019). Bridging whole numbers and fractions: problem variations in Chinese mathematics textbook examples. *ZDM*, *51*(1), 109-123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01013-9

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Zorrilla, C., Fernández, C., Cañadas, M. C. e Ivars, P. (2022). How primary school students perform multiplicative structure problems with natural and rational numbers. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 155-164). PME.

Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2023). Estrategias para resolver problemas de estructura multiplicativa con naturales y fracciones. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 25*, e15, 1-19. https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e15.4407