XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011 50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática

Jhony Alexander Villa-Ochoa
CIEP-ASDEM; Grupo de pesquisa em *Educação Matemática e Historia* - Universidade de Antioquia.
Medellín, Colômbia
javo@une.net.co

Resumo

Neste artigo são discutidos dois episódios de um estudo de caso que indagou a maneira como um estudante raciocina “covariacionalmente” ao fazer abordagem de situações que envolvem funções quadráticas. O estudo foi pensado para desenvolver uma linha convergente de pesquisa e destaca as descrições e as ações que o estudante fez na abordagem das situações de covariação. Nos episódios foi possível observar que existem estudantes que podem fazer interpretações qualitativas tanto do crescimento e decrescimento de uma função quanto das suas concavidades antes de um estudo formal de cálculo. Finalmente a necessidade de aprofundar em algumas ações metais do quadro conceitual é apresentada.

Palavras-chave: Função Quadrática; Raciocínio Covariacional; Taxa de Variação.

1. Introdução

O estudo dos processos de variação nas salas de aula de matemáticas colombianas tem sido sugerido desde 1998 com a publicação do documento “*Lineamientos Curriculares”* pelo Ministério da Educação Nacional- MEN da Colômbia. Em outro documento o MEN ressalta a necessidade de construir, desde o Ensino Fundamental, diferentes caminhos e aproximações significativas para a compreensão e uso dos conceitos de cálculo numérico e algébrico e após, no Ensino Médio, o cálculo diferencial e integral (Colômbia, 2006, p. 66)

Tanto no âmbito internacional (Cantoral, 2004; Cantoral e Farfán, 1998; Dolores, 1999; 2007) quanto nacional (Posada e Villa-Ochoa, 2006) existem aportes desde a pesquisa para recomendar a necessidade de desenvolver um pensamento que leve em conta uma interpretação e compreensão da variação em diferentes contextos.

Particularmente Posada e Villa-Ochoa (2006) fazem uma pesquisa que ressalta a importância de introduzir o conceito de função linear através do estudo da variação. Estes pesquisadores centram sua atenção numa proposta que mistura três componentes, são eles: os sistemas de representação, o estudo da variação e a modelagem matemática. A proposta destes pesquisadores estabelece que uma aproximação à função linear deveria ter seu início no estudo de situações que envolvem taxa de variação constante. Desta maneira, a função linear surge como a relação entre duas grandezas sendo a taxa de variação entre elas uma constante.

Baseado na pesquisa de Posada e Villa-Ochoa (2006) foi realizada uma nova pesquisa cujo propósito teve dois componentes: o primeiro consistiu em identificar alguns elementos importantes para um estudo da função quadrática que leve em conta o estudo da variação; e o segundo, consistiu em descrever a maneira como os estudantes raciocinam quando abordam situações de variação associadas à função quadrática. A ênfase deste artigo está no segundo componente do propósito da pesquisa, em que é usado o quadro conceitual proposto por Carlson et al. (2003) que será descrito a seguir.

2. Elementos Teóricos

O quadro conceitual desenvolvido por Carlson et al. (2003) descreve o raciocínio covariacional como *"as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda com referência à outra*" (p. 124, tradução do autor). Baseado nesta descrição, estes pesquisadores propõem um quadro conceitual composto de cinco ações mentais e cinco níveis que descrevem uma maneira como os estudantes podem raciocinar covariacionalmente diante de situações de variação.

O quadro conceitual de Carlson et al.(2003) considera as imagens de covariação como evolutivas no sentido de Piaget, e portanto, podem descrever-se por níveis que emergem em sucessão ordenada. Segundo os autores, o conceito de imagem de seu quadro é coerente com a descrição prestada por Thompson (1994, citado por Carlson et al., 2003) e é descrita como "*dinâmico que é originada em ações corporais e movimentos da atenção, e como a fonte e o médio das operações mentais*" (p. 124, tradução do autor).

O quadro conceitual, aqui apresentado, inclui os termos *processo pseudo-anaíitico* e *comportamentos pseudo-analíticos*. De acordo com Carlson et al. (2003) tais termos foram publicados por Vinner em 1997 e são associados a "*processos de pensamento e comportamentos que ocorrem sem compreensão, e os comportamentos pseudo-analíticos são produzidos por processos de pensamentos pseudo-analíticos*" (Carlson et al., 2003, p. 125, tradução do autor)

A descrição das ações mentais do quadro conceitual é apresentada na seguinte tabela:

Tabela 1.
Ações mentais do quadro conceitual para a covariação. (Carlson et al. 2003, p. 128, tradução do autor).

Ação mental	Descrição da ação mental	Comportamento
AM1	Coordenação do valor de uma variável com a mudança na outra.	Designação dos eixos com indicações verbais de coordenação das duas variáveis (exemplo: *y* muda com as mudanças de *x*)
AM2	Coordenação da direção da mudança de uma variável com a mudança na outra variável.	Construção de uma linha reta crescente. Verbalização da consciência da direção da mudança do valor de saída, enquanto é considerada a mudança no

		valor da entrada.
AM3	Coordenação da "quantidade de mudança"[1] de uma variável com a variação da outra.	Marcação de pontos/construção de linhas retas secantes. Verbalização da consciência da quantidade de variação do valor da saída, enquanto a variação no valor de entrada é considerada.
AM4	Coordenação da taxa de variação média da função com os incrementos uniformes da mudança na variável de entrada.	Construção de linhas retas secantes contíguas para o domínio. Verbalização da consciência da taxa de variação do valor de saída (comparada com o valor de entrada), enquanto são considerados os incrementos uniformes do valor de entrada.
AM5	Coordenação da taxa de variação instantânea da função com a variação contínua na variável independente para todo o domínio da função.	Construção de uma curva suave com indicações claras da mudança das concavidades. Verbalização da consciência da variação instantânea na taxa de variação para todo o domínio da função (os pontos de inflexão e a direção das concavidades são corretos.

Baseado nestas ações mentais, os autores classificam os seus estudantes em níveis (ver tabela 2) de acordo com a imagem global que dá suporte às várias ações mentais que a pessoa mostra no contexto de uma tarefa ou problema.

Tabela 2.
Níveis do quadro conceitual da covariação (Carlson et al., 2003, p. 129, tradução do autor).

Níveis	**Características**
Nível 1 (N1) Coordenação	Neste nível, as imagens de covariação podem sustentar à ação mental de coordenar a mudança de uma variável com a mudança na outra variável (AM1).
Nível 2 (N2) Direção	Neste nível, as imagens da covariação podem sustentar às ações mentais de coordenar a direção da mudança de uma das variáveis com a mudança na outra. As ações mentais identificadas como AM1 e AM2 são sustentadas por imagens de N2.
Nível 3 (N3) Coordenação quantitativa	Neste nível, as imagens da covariação podem sustentar às ações mentais de coordenar a "quantidade de mudança" em uma variável com a mudança na outra. As ações mentais identificadas como AM1, AM2 e AM3 são sustentadas pelas imagens de N3.
Nível 4 (N4) Taxa média	Neste nível, as imagens de covariação podem sustentar às ações mentais de coordenar a taxa de variação média de uma função com as mudanças uniformes nos valores de entrada da variável. A taxa de variação média pode-se decompor para coordenar a "quantidade de mudança" da variável resultante com a mudança na variável de entrada. As ações mentais identificadas de AM1 até AM4 são sustentadas por imagens N4.
Nível 5 (N5) Taxa de variação instantânea	Neste nível, as imagens de covariação podem sustentar às ações mentais de coordenar a taxa de variação instantânea de uma função com a mudança contínua na variável de entrada. Este nível inclui uma consciência sobre a taxa de variação instantânea é resultado de refinamentos cada vez menores na taxa de variação média. Também inclui a consciência sobre que o ponto de inflexão é aquele que a taxa de variação passa de crescente a decrescente ou vice-versa. As ações mentais identificadas como AM1 até AM5 são sustentadas pelas imagens de N5.

[1] Uso "quantidade de mudança" como uma tradução da expressão "amount of change" em inglês ou "cantidad de cambio" em espanhol.

3. O estudo

Como já relatado, este estudo investigou a maneira como os estudantes raciocinam quando abordam situações de variação associadas à função quadrática. Para observar as ações mentais próprias do raciocínio covariacional foi necessário um aprofundamento nos modos como os estudantes abordaram as diferentes situações de covariação quadrática. Desta maneira se assumiu o *estudo de caso* como método de pesquisa, pois, para Salkind (1999), o estudo de caso é um método empregado para estudar indivíduos ou uma instituição em um contexto ou situação única de maneira intensa e o mais detalhada possível. Mesmo assim, Yin (2009) assinala que um estudo de caso é uma indagação empírica que pesquisa um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto real de existência, quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são evidentes.

Para o estudo de caso foi desenhado um conjunto de situações para desenvolver uma linha convergente de pesquisa como escreveu Yin (2009). Nesta linha convergente, em todas as situações se fizeram perguntas que pretendiam dar conta de *quê, como, quanto varia as quantidades; e também como e quanto variam essas mesmas variações*.

O propósito deste artigo é discutir dois episódios em que Santiago raciocina covariacionalmente quando aborda situações de variação com funções quadráticas. Santiago foi um estudante de Ensino Médio (15-17 anos) descrito pelos professores como alguém que gostava de Matemática. Santiago foi selecionado dentre um grupo de 19 estudantes que cursavam a disciplina de pré-cálculo; na qual o conceito de função é estudado para que, posteriormente, o cálculo diferencial seja ensinado.

Embora Santiago houvesse evidenciado poucas habilidades para o trabalho com algoritmos, mostrava ter um bom desempenho em suas argumentações e além de demonstrar boas habilidades para comunicar seus pensamentos. Estas habilidades tiveram um papel importante ao identificar seus estilos de raciocínio; além disso, o estudante mostrou vontade por se envolver nesta pesquisa.

Para obter as informações foi organizado um conjunto de quatro situações que Santiago teria de desenvolver. O contexto de cada situação é descrito a seguir:

- A primeira situação foi retomada de Villa-Ochoa (2008). Na situação a queda livre de um corpo é simulada usando o *software Modellus*.
- Na segunda situação se usa o *software Cabri Geometrie* para criar uma situação da variação da área de um retângulo, interno a um quadrado, ao mover um ponto do lado do quadrado (Figura 1).
- Na terceira situação foi usado o *software flash* para simular o *download* de um arquivo de computador (Figura 6).
- Finalmente na quarta situação é apresentado um gráfico usado para o controle do crescimento fetal. No desenho se observa um gráfico que é semelhante a um trecho de uma função quadrática, no qual o estudante deveria argumentar por que é ou não quadrático.

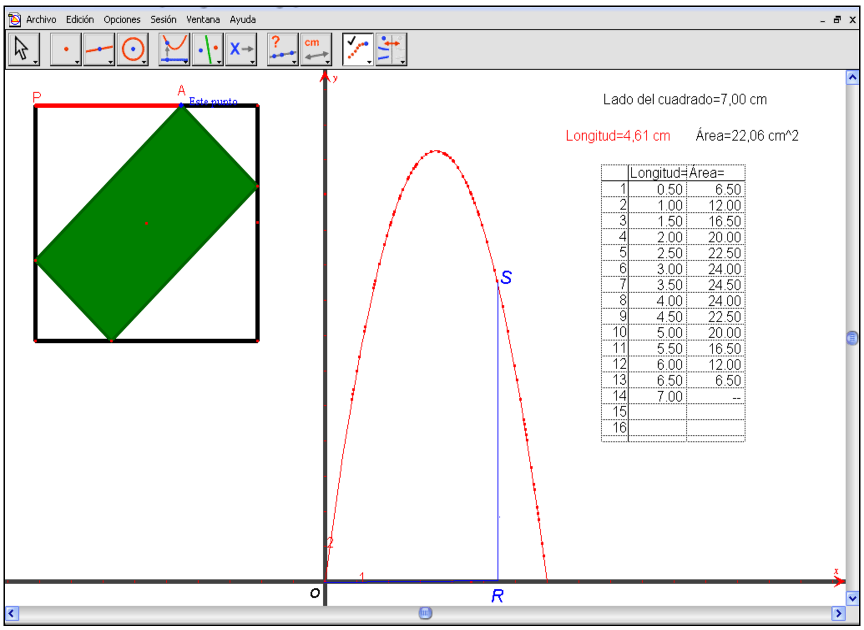
Enquanto Santiago desenvolvia-se nas situações, um diálogo com o pesquisador foi estabelecido, no qual algumas perguntas eram feitas com o intuito de aprofundar e tentar compreender o raciocínio do estudante. O pesquisador fazia anotações de campo e gravações em áudio que, junto com as produções escritas (documentos) de Santiago, constituíram o material analisado nesta pesquisa.

A análise da informação foi um processo contínuo; desde o começo a informação foi organizada, para logo ser analisada e confrontada com outras fontes. Foi assim que os documentos produzidos pelo estudante foram analisados e confrontados com as gravações em áudio e as anotações de campo do pesquisador. Algumas categorias emergiram deste trabalho as quais foram envolvidas com o quadro conceitual.

4. Dois episódios

Os episódios apresentados neste artigo foram escolhidos porque mostram alguns aspectos do raciocínio de Santiago; além disso, mostram a maneira como o estudante interpreta a variação em algumas características das funções fornecendo bases para um estudo posterior de noções como derivada e antiderivada próprias do cálculo.

Na situação do retângulo inscrito, Santiago analisou o movimento de um retângulo inscrito num quadrado gerado pelo movimento do ponto A de um lado do quadrado (figura 1).



	Longitud=	Área=
1	0.50	6.50
2	1.00	12.00
3	1.50	16.50
4	2.00	20.00
5	2.50	22.50
6	3.00	24.00
7	3.50	24.50
8	4.00	24.00
9	4.50	22.50
10	5.00	20.00
11	5.50	16.50
12	6.00	12.00
13	6.50	6.50
14	7.00	--
15		
16		

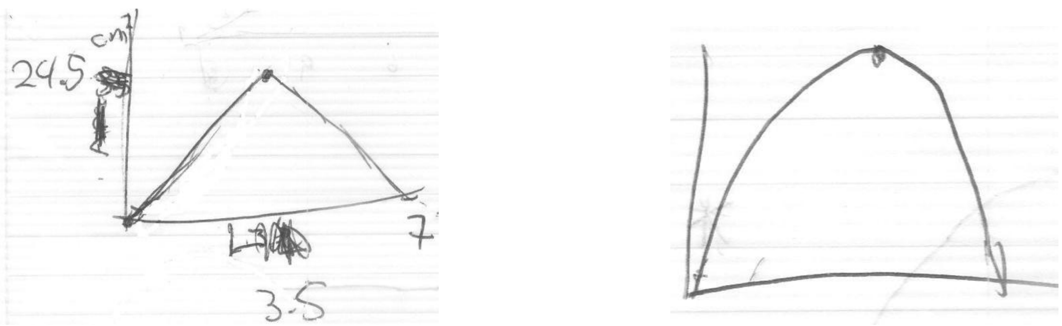
Figura 1. Situação: retângulo inscrito

4.1. Uma breve descrição de raciocínio de Santiago

Santiago iniciou o estudo da situação de maneira qualitativa. Através de verbalizações como: *quando o ponto A se mover, a área cresce e logo decresce* foi possível interpretar que o estudante reconheceu as relações direta e inversa nas variáveis coordenando assim as mudanças nelas (AM1). Mais adiante, Santiago descreve que *quando o ponto A estiver nos extremos do lado do quadrado a área se anularia* [teria o valor zero], *e se esse ponto A estiver na metade do lado, o retângulo seria um quadrado* (AM2). Estas descrições fornecem informação de como o estudante observa a maneira como muda a área em relação com a posição do ponto A. O raciocínio de Santiago até aqui esteve baseado na observação das imagens visuais oferecidas pelo software. O estudante não mostrou argumentos quantitativos nas suas verbalizações.

Posteriormente, o pesquisador solicitou a Santiago argumentos adicionais para justificar suas conclusões, foi assim que o estudante começou com alguns desenvolvimentos quantitativos, que posteriormente o levaram à construção de uma tabela e a determinar algumas relações quantitativas entre as variáveis (AM3). A seguir o pesquisador pediu a Santiago um gráfico cartesiano que representasse a relações da situação. Santiago desenhou o gráfico da Figura 2 (a) justificando-se nas relações crescente e decrescente da função que tinha descrito no nível 2.

O trabalho seguinte esteve baseado na confrontação da resposta do estudante. Através dos questionamentos do professor, Santiago conseguiu observar uma relação entre a tabela de dados e o gráfico, o que lhe permitiu fazer um novo desenho como se observa na Figura 2(b) argumentando que *a área cresce, mas toda vez mais devagar*.



(a) (b)

Figura 2. Gráficos construídos por Santiago na abordagem da situação

Para aprofundar neste argumento o pesquisador pediu para o estudante construir uma tabela com as ferramentas fornecidas pelo *software* dividindo em intervalos uniformes de 0,5. No diálogo a seguir Santiago consegue identificar uma possível relação entre a concavidade do gráfico e a maneira como troca a rapidez da variação.

Inv : *Bom, agora temos a tabela. O que tem na tabela ou no comportamento que faz que o gráfico seja deste jeito e não de outro? Você inicialmente desenhou duas linhas [ver figura 2(a)], e quando te questionei você fez outro desenho de um jeito [...]*

San : *Montanha pequena [notando o gráfico da Figura 2(b)]*

Inv : *Por que você acha que o gráfico é desse jeito?*

San : *Como já te falei, observando-o, a mudança que tem entre 0,5 e 1 é bem maior, [...] bom, não muito, mas é maior do que a mudança que tem entre 1 e 1,5.*

Inv : *Tá! Como poderiam se observar essas mudanças no gráfico?*

San : *Bom, quando o lado aumentar de 0,5 até 1, ou seja meio cm; aqui [notando a área] a mudança será de 6,5 até 12, ou melhor a mudança é de 5,5.*

Inv : *Como poderíamos observar essa mudança no gráfico?*

San : *Não entendi. Como se desenharia ou que? [Santiago tenta construir um gráfico que não tem escala nos eixos, mas o professor lhe pede para fazê-la mais detalhada]*

O desenho feito por Santiago pode ser observado na Figura 3. Enquanto Santiago fazia o desenho ia verbalizando o processo de construção, foi assim que tornou evidente a relação anteriormente dita entre a concavidade e o jeito de trocar a rapidez da variação.

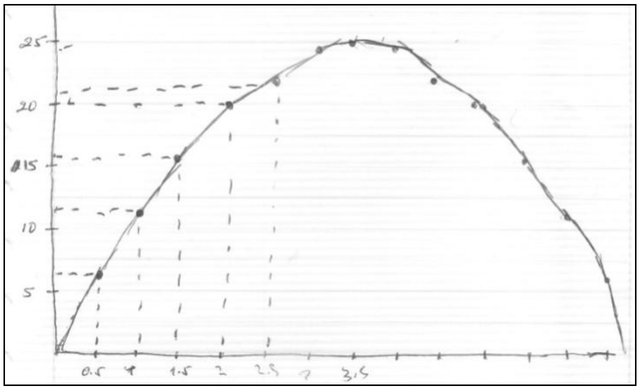


Figura 3. Gráfico construído por Santiago

A curva suave desenhada por Santiago não envolveu uma compreensão da taxa de variação instantânea, nem da continuidade das variáveis apresentadas no gráfico. Por isso não é possível afirmar que o estudante atingiu ao nível 5.

A seguir serão discutidos dois episódios deste estudo, nos quais Santiago parece associar um sentido desde a variação a algumas características dos gráficos cartesianos.

4.2. Uma interpretação das concavidades de um gráfico

Este primeiro episódio é um recorte do trabalho de Santiago na situação do retângulo inscrito. Após trabalhar com as figuras geométricas, a tabela e o gráfico cartesiano, o pesquisador desenhou um novo gráfico e pediu ao estudante que supusesse que esse gráfico era do comportamento de outro retângulo inscrito no quadrado. Em seguida, o pesquisador pediu para o estudante descrever tal movimento.

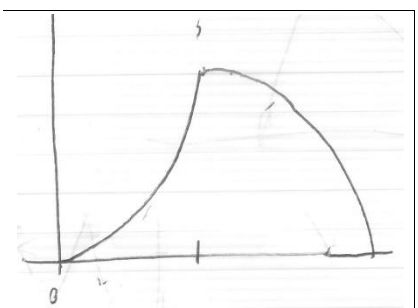


Figura 4. Gráfico apresentado pelo pesquisador a Santiago

Santiago: *Ehh, quando o ponto A estiver se afastando do ponto zero (0), isso é, a longitude esta aumentando, a área estará crescendo cada vez mais* [rápido] *até algum ponto* [coordenada da abscissa do ponto de máxima] *enquanto o ponto A está se afastando de tal ponto,* [a área] *estaria diminuindo mesma maneira cada vez maior. Ou seja, se num ponto diminuir 1,* [então] *em outro diminuirá 1,5 por exemplo.*

O trabalho desenvolvido com a situação inicial permitiu a Santiago estabelecer a regra: "*se a variação trocasse mais rápido então o gráfico será traçado assim* [concavidade voltada para acima]" e o contrário. Nas falas do estudante foi possível observar que ele identificou visualmente as concavidades do gráfico tanto crescente quanto decrescente e as relacionou com a maneira como muda a variação; este tipo de comportamento pode se associar com a ação mental AM5 do quadro conceitual de Carlson et al. (2003). O raciocínio feito por Santiago foi baseado numa análise da variação nos gráficos de maneira discreta, em outras palavras, traçando segmentos iguais no eixo *x* e analisando as variações nos segmentos correspondentes no eixo *y* (taxa de variação média, ver Figura 5); por isso não poderia se considerar como um comportamento pseudo-analítico.

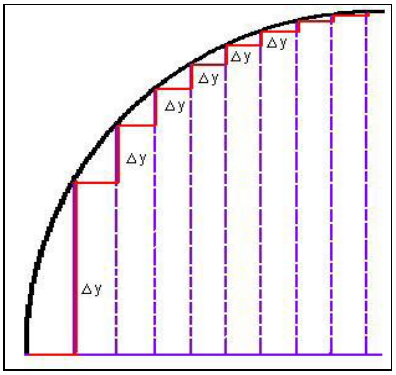


Figura 5. Análise discreta da variação

Deste episódio é possível observar que o estudo da taxa de variação média possibilita a criação de imagens das concavidades do gráfico envolvidas no raciocínio covariacional; ao mesmo tempo, converte-se nas bases de uma posterior compreensão gráfica e variacional da derivada de segunda ordem.

4.3. A reversibilidade na variação

O segundo episódio apresentado aqui tem a ver com a terceira situação abordada pelo estudante. Esta situação foi projetada simulando o "*download*" de um arquivo de computador. A simulação foi feita usando o *software flash*, nela são mostradas quantidades como: taxa de transferência (velocidade de *download*) e o tempo (Figura 6).

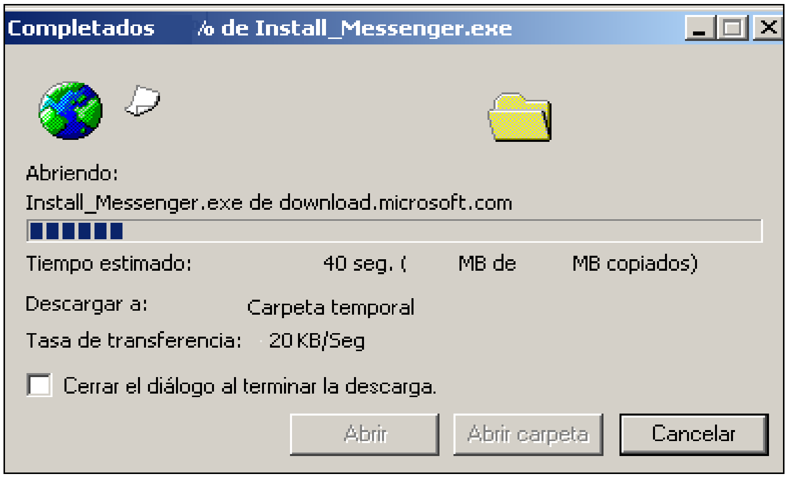


Figura 6. Imagem da situação "*download*" de um arquivo

Os dados da quantidade de MB baixados e da porcentagem de arquivo baixado não se mostraram na simulação, isso fez com que Santiago tivesse que calcular alguns desses valores.

A simulação tem duração de 1 minuto e 15 segundos, e a taxa de transferência foi mudando assim:

Nos primeiros 10 segundos a taxa de transferência foi uma constante de 5 KB/seg, logo foi de 6 KB/seg e constante durante os 6 segundos seguintes; após a taxa variou e cresceu 1KB/seg em cada segundo até chegar a 20 KB/seg. Na sequência a taxa de transferência permaneceu constante por 5 segundos e depois baixou até 9 KB/seg em 11 segundos. Logo, a taxa foi novamente constante de 1 KB/seg durante 9 segundos e finalizando foi de 5 KB/seg nos últimos 6 segundos.

O objetivo da situação foi observar como o estudante constrói imagens da quantidade de KB "baixados" partindo do comportamento da taxa de variação. Mesmo assim, foi possível observar as imagens que o estudante fez da variação da taxa de variação (variação de segunda ordem).

O gráfico construído pelo estudante se apresenta na figura 7. Enquanto o tempo de construção transcorre, o investigador e o estudante interagiram através de perguntas como:

- Por que o gráfico é assim?
- O que quer dizer taxa de transferência constante?
- Como está mudando a taxa de transferência?

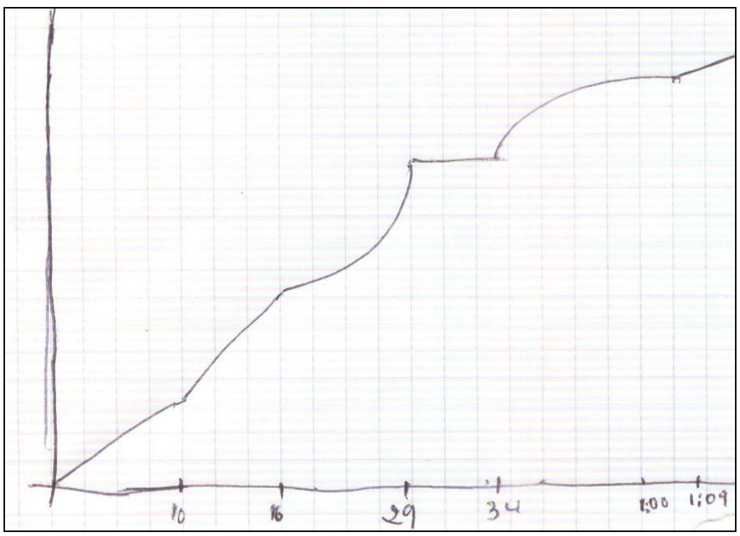


Figura 7. Gráfico construído por Santiago

Do trabalho do estudante foi possível confirmar uma interpretação qualitativa, ao invés de quantitativa, das concavidades do gráfico. Enquanto Santiago construía cada pedaço do gráfico, ele interagia com o pesquisador, dessa maneira foi possível conferir algumas das imagens mentais construídas na situação anterior.

O desenho do gráfico pelo estudante parece estar de acordo com uma compreensão qualitativa das relações entre a *taxa de variação* e a *quantidade de KB descarregados*. Isso pode ser confirmado no eixo *y* (vertical) que não foi graduado pelo estudante, ou seja, não teve os valores de KB "baixados". Para aprofundar nesta observação, o estudante foi questionado. Veja o diálogo abaixo:

Inv: *Quantos KB têm descarregado aqui?* [Assinalando o final do primeiro segmento do gráfico]

San: *Está baixando 5KB por segundo, e até aqui tem 10 segundos então tem descarregado, uhmmm, 50 KB*

Inv: *Por quê?*

San: *Porque é constante, então multiplico 10 vezes 5.*

O mesmo ocorreu quando lhe foi feita a pergunta pelo segundo segmento do gráfico a qual ele respondeu corretamente. Desse ponto em diante foi possível identificar que o estudante estabeleceu relações inversas tanto qualitativas quanto quantitativas entre a taxa de transferência constante (taxa de variação) e a quantidade de KB baixados. Porem quando a taxa de transferência não era constante o estudante só fez aproximação qualitativa; isso pode ser observado na justificativa que o estudante forneceu quando foi questionado pela maneira como desenhou o pedaço de gráfico côncavo. Por exemplo, no pedaço côncavo para acima, Santiago falou "*aqui a taxa de transferência esta aumentado, por isso é assim o gráfico*". Com esta fala do estudante é possível conferir que ele tem desenvolvido uma imagem mental que relaciona de maneira biunívoca a taxa de variação com a concavidade do gráfico; assim:

$$a\ taxa\ de\ variação\ aumenta\ \Leftrightarrow\ a\ concavidade\ do\ gráfico\ estiver\ voltada\ para\ acima$$

Embora os comportamentos de Santiago possibilitem inferir que o estudante conseguiu dar conta de fazer o gráfico e de estabelecer algumas relações inversas entre a taxa de variação e a quantidade de KB baixados, essas relações tem sido desenvolvidas através do estudo da taxa de variação de modo discreto e generalizado para o gráfico continuo, mas isso não significa que o estudante compreende o significado da taxa de variação instantânea nem as relações inversas que podem ser estabelecidas. Isso pode se conferir nas argumentações que Santiago forneceu quando o pesquisador perguntou pela quantidade de KB baixados em algum ponto do pedaço curvo do gráfico; diante dessa pergunta, o estudante evidenciou insegurança e falou: "*Não sei não, é muito difícil*"

Do desenvolvimento desta atividade por parte de Santiago é possível afirmar que o reconhecimento de uma relação inversa entre uma função e a sua taxa de variação não é imediato, mas tal relação em funções lineares aparenta ser mais compreensível de maneira quantitativa pelo estudante. Além disso, é importante observar que a relação inversa entre a função e a taxa de variação tem sentido para o estudante e que pode ser descrita qualitativamente. Isso pode ser importante para o posterior estudo da integral e para o entendimento da função quadrática como escreve Villa-Ochoa (2008).

5. Conclusões

Geralmente o estudo da função quadrática na sala de aula atende à sua definição formal $f(x) = ax^2 + bx + c$, para logo estudar algumas propriedades da sua equação e gráfico (vértice, crescimentos e decrescimentos...), e finalmente, algumas aplicações são feitas. Poucas vezes o início do estudo da função quadrática na sala de aula e nos livros didáticos inclui uma interpretação variacional de seus crescimentos e concavidades com situações como as apresentadas neste artigo. Além disso, a interpretação variacional é aguardada para um posterior estudo do cálculo diferencial e integral. O caso de Santiago mostra que existem estudantes que podem compreender algumas características das funções desde uma aproximação variacional, fornecendo algumas bases para um estudo posterior de conceitos do cálculo**.**

O caso do estudante, reportado neste estudo, mostra que existem algumas ações mentais AM5, porém o estudante não pode ser classificado no nível 5 por não ter desenvolvido o conceito de taxa de variação instantânea; além disso, é possível afirmar que este estudante pode estabelecer relações inversas entre a taxa de variação e função, que não são descritas no quadro conceitual de Carlson et al. (2003). O estudo (discreto) da taxa de variação média e as suas variações possibilitam uma interpretação das concavidades do gráfico. Baseado nisso, é preciso aprofundar nas ações mentais que descrevem tal relação e, assim, poderia ser caracterizado outro possível nível no raciocínio covariacional que poderia ser prévio à compreensão da taxa de variação instantânea.

Agradecimentos

Embora não sejam responsáveis pelas idéias relatadas neste artigo, eu agradeço aos membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática - GPIMEM da Universidade Estadual Paulista- Rio Claro- SP, Brasil pelas críticas e sugestões realizadas para este trabalho. Em especial, eu agradeço a Rejane Faria, Silvana Santos ao Anderson Afonso do Programa de Pósgraduação em Educação Matemática da mesma Universidade pelas contínuas sugestões para este artigo. Ao Centro de Investigações Educacionais e Pedagógicas da ASDEM (Medellín-Colômbia) pelo apoio econômico para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17*, pp. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R., & Frafán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA , 8* (2), 121-156.

Colômbia. Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

Colômbia. Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Salkind, N. (1999). *Métodos de Investigación.* México: Prentice Hall.

Villa-Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 21*, pp. 245-254. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Colegio Méxicano de Matemática Educativa.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.