La educación matemática del estudiante de ingeniería y los núcleos generadores de conceptos y modos de actuación

Jacinto Eloy **Puig** Portal
Departamento de Ciencia Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Católica
Colombia
jepuig@ucatolica.edu.co

Resumen

El Cálculo Diferencial e Integral constituyen los fundamentos para el estudio de fenómenos dinámicos con modelos matemáticos, sin embargo los conceptos básicos del cálculo tienen además aplicaciones, que pueden ser aprovechadas desde un inicio para que los estudiantes encuentren un mayor sentido en las construcciones conceptuales primarias y tengan un mejor rendimiento en la actividad de estudio. Para lograr este propósito hemos definido los núcleos generadores de conceptos y modos de actuación, (situaciones problema generales), cuya resolución requiere definir nuevos conceptos y establecer adecuadas rutinas de análisis y de cálculo. Dada las falencias con que ingresan los estudiantes a las facultades universitarias, en la mayoría de ellas se ha establecido el curso de Precálculo. En nuestra propuesta hemos optado por resolver estas falencias en contexto y no como un curso previo, lo que ha contribuido a fortalecer en los estudiantes el sentido del estudio de los prerrequisitos.

Palabras clave: didáctica del cálculo, diseño de asignaturas, resolución de problemas, sentido del aprendizaje.

La formación matemática de los profesionales y en particular de los ingenieros, en términos muy generales, está encaminada al modelado de procesos dinámicos, su interpretación y representación geométrica, la optimización con restricciones y el análisis estadístico y probabilístico (Kudriavsev, 1980). De este modo se da el fundamento matemático para asimilar y aplicar los avances de la Física y las nuevas tecnologías.

Se ha notado una tendencia a reducir la extensión de los cursos de pregrado lo que exige selectividad, síntesis y estrategias adecuadas de relación con los estudiantes, apoyadas en recursos tecnológicos. Las competencias y el sistema de créditos son dos términos estrechamente vinculados ya que en la base de los mismos están las actitudes de los estudiantes (Gallego, 1999), que se expresa en su deseo manifiesto de transformarse en profesionales de la más alta calificación. La existencia de proyectos educativos institucionales obliga a los colectivos académicos a construir una identidad coherente con la misión declarada por la Universidad.

La Universidad Católica de Colombia tiene como eje central de su misión la persona, lo que compromete al colectivo académico con modos de actuación que garanticen la realización profesional de cada estudiante.

El Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia es una unidad académica adscrita a la Facultad de Ingeniería y presta servicios a los programas de esta facultad y a las facultades de Economía y Psicología.

Durante los cinco años de creado el Departamento hemos dado pasos sistemáticos para la conformación de una identidad académica coherente con la misión de la universidad, en el momento de desarrollo actual hemos elaborado los diseños de asignatura ateniéndonos a los lineamientos de la decanatura académica de la Universidad y los parámetros de la reciente reforma curricular implementada en la Facultad de Ingeniería.

El componente clave de los diseños de nuestras asignaturas es la precisa definición del sentido que cada una de ellas tiene para la futura profesión del estudiante. Este es el punto de partida que como principio rector orienta todas las acciones y decisiones pedagógicas que se plasman en el diseño, lo que comprende: competencias, objetivos, distribución de los contenidos en unidades de estudio, estrategias didácticas, formas de organización de la actividad cognoscitiva de los estudiantes y sistema de evaluación.

Los núcleos generadores de conceptos y formas de actuación son las unidades clave que conforman la estructura de nuestras asignaturas, para cada asignatura se definen tres núcleos que agrupan los conceptos y procedimientos de cálculo en torno a una situación problema, se agrupan en tres núcleos para establecer una correspondencia con los cortes evaluativos, la idea es que para cada corte se haya completado un eslabón de la cadena de formación, cada eslabón se encuentra conectado, no es un elemento suelto que muere con el acto evaluativo, sino todo lo contrario, es sostén indispensable del proceso siguiente (Arjanguelsky, 1980)

Núcleos generadores

La idea de los núcleos generadores surge como resultado de una de nuestras búsquedas para lograr mejores rendimientos de los estudiantes, en los cursos que oferta el Departamento de Ciencias Básicas. En nuestro empeño de satisfacer las necesidades de los estudiantes además de ofrecer el curso de Matemáticas Básicas que recogía los contenidos del Precálculo, decidimos implementar un curso previo para los estudiantes con índice académico muy bajo, el curso se denominó Matemáticas Fundamentales y en el mismo se implementó una nueva metodología de relación con los estudiantes. El punto de partida fueron los núcleos generadores; se confeccionaron elaboraciones metodológicas detalladas en la que se especificaba cómo realizar el diálogo productivo introductorio de cada situación problema y las tareas prácticas a plantear a los estudiantes para resolverlas en equipos. Esta metodología es muy afín a la llamada teoría de la comprensión (Carpenter & Lehrer, 1999)

La idea rectora que se ha retomado de esta experiencia es la consideración de que formalización conceptual prematura (Gnedenko, 1981) puede constituirse en un obstáculo para la comprensión, por tanto en lugar de abordar el objeto de estudio desde la conceptualización de los elementos primarios, el punto de partida es la presentación de una situación problema compleja (Majmutov, 1983; Morin, 2001), que puede en principio ser interpretada y manipulada con procedimientos empíricos, esta manipulación previa (Shamova, 1982) genera la necesidad de la conceptualización y las formas de actuar o de operar con los conceptos, de este modo la abstracción se aborda como proceso del fenómeno a la esencia y en esta dinámica se revela la relación entre lo lógico y lo histórico.

La mayoría de los estudiantes que asistieron a estos cursos lograron un tránsito sin grandes tropiezos, sin embargo el análisis costo beneficio y la reflexión final sobre el desarrollo del curso de Matemáticas Fundamentales nos llevó a reconsiderar toda la estructura del conjunto de cursos, desde el Cálculo Diferencial hasta las Matemáticas Especiales y las Estadísticas y Probabilidades.

Aunque parezca paradójico, después de un prolongado y detallado análisis, la decisión final fue iniciar la oferta del departamento con el curso de Cálculo Diferencial, pero asumiendo los aspectos metodológicos implementados en el curso de Matemáticas Fundamentales. Además se implementó un sistema de tutorías grupales de nivelación en paralelo al curso de Cálculo Diferencial para atender las falencias de los estudiantes en un contexto más significativo. Con esta estrategia se economizan realmente dos semestres en comparación con la propuesta de hacer los cursos de Matemáticas Fundamentales y Matemáticas Básicas, antes del curso de Cálculo Diferencial.

Se hizo un pilotaje de esta propuesta para corroborar si la relación costo beneficio se mantenía en niveles aceptables. A continuación mostramos los resultados globales obtenidos por dos poblaciones de estudiantes. Resulta difícil discriminar los estudiantes que tomaron el curso de Matemáticas Fundamentales porque se inscriben muy dispersos, en los grupos de Matemáticas Básicas de acuerdo a su preferencia de horarios.

La población de la variante A comprende los estudiantes que recibieron el curso de Matemáticas Básicas que incluye además los estudiantes con nivelación previa en el curso de Matemáticas Fundamentales y los estudiantes repitentes.

La población de la variante B se refiere a los estudiantes que ingresan directamente en el curso de Cálculo Diferencial, con la nivelación en paralelo.

La columna Activos primer corte se refiere a los estudiantes que iniciaron semestre y realizaron la primera evaluación parcial. En las siguientes columnas están los datos de los estudiantes que permanecieron y el porcentaje de permanencia hasta el final del curso y los que aprobaron con el respectivo porcentaje.

La tabla solo muestra resultados generales globales, en realidad un análisis más fino mostraría muchos detalles del currículo oculto.

Tabla 1
Resultados globales de las poblaciones de estudiantes en las variantes A y B

Variante	Total de Grupos	Primer Corte	Consolidado Final			
		Nº de Estudiantes	Nº de Estudiantes			Porcentaje que Aprobó
		Activos	Activos	% Permanencia	Aprobaron el Semestre	
A	24	721	609	84%	424	69.6%
B	11	336	270	80%	169	62.6%

Como era de esperar los resultados de la variante B son inferiores a los de la variante A en términos absolutos, dado que el haber estado uno o dos semestres en la universidad, por fuerza, tiene un efecto positivo en los estudiantes; aquí el punto de análisis es otro, se trata de considerar si realmente la diferencia en los resultados es meritoria para dedicar uno o dos semestres para nivelar los estudiantes. Hay una serie de factores concomitantes que finalmente definieron nuestra decisión de iniciar los cursos con la asignatura Cálculo Diferencial. De todos esos factores destacamos tres:

- Cuando se analizan los resultados por grupos, no son tan significativamente desfavorables a los grupos que tomaron de entrada el curso de Cálculo Diferencial, ya que en ambas poblaciones hay grupos con rendimientos altos, medios y bajos.
- En los grupos de la variante B se aplicó toda una nueva estrategia, que algunos profesores y estudiantes, no alcanzaron a interpretar en todas sus dimensiones. Además de algunas incongruencias organizativas al inicio del semestre a la hora de insertar las tutorías grupales de nivelación en los horarios habituales.
- Para los estudiantes resulta ventajoso hacer la variante nivelación en paralelo por ahorro de tiempo y es en consecuencia por ser más económica.

Núcleos generadores por asignaturas.

Como resultado del análisis de la metodología empleada en el curso Matemáticas Fundamentales, se propuso estructurar los cursos por núcleos generadores, tratando de concentrar los contenidos de cada asignatura en tres grandes unidades, haciendo énfasis en el planteamiento de situaciones problema (Majmutov, 1983) que le dieran sentido a las asignaturas, y en el aumento de la presencia de las tecnologías como medio para facilitar la comprensión de las propiedades geométricas de los conceptos objeto de estudio y como instrumento de cálculo. Para lograr este objetivo se acentuó nuestra atención en la realización de los laboratorios, donde el estudiante resuelve tareas complejas con ayuda del programa Wolframalpha y elabora un informe que responde a las tareas y recomendaciones de cada instructivo de laboratorio que le entrega el profesor, solo es netamente presencial el primer laboratorio donde se instruye al estudiante para hacer uso efectivo del programa Wolframalpha.

Cálculo diferencial

- Comportamiento asintótico e infinitésimos equivalentes. Límites fundamentales
- Velocidades y tangentes. Reglas de derivación. Cálculos aproximados
- Razones de cambio relacionadas. Problemas de optimización. Análisis global del comportamiento de una función.

Cálculo integral

- Problemas modelados con ecuaciones diferenciales separables y reducibles. Integral indefinida y métodos de integración
- Aplicaciones geométricas y físicas de la integral definida
- Problemas de convergencia. Integrales impropias. Series de funciones aplicadas al cálculo aproximado.

Cálculo vectorial

- Movimiento en el plano y en el espacio. Curvas y superficies. Aplicaciones de las derivadas parciales (aproximación y optimización)
- Aplicaciones geométricas y físicas de las integrales múltiples

- Masa y densidad variable. Trabajo y flujo de campos vectoriales.

Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

- Modelación de procesos dinámicos con ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Modelación de procesos dinámicos con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ecuaciones de layes de la física
- Modelación de procesos con ecuaciones diferenciales resolubles mediante la transformada de Laplace

Matemáticas especiales

- Transformaciones en el plano complejo (derivadas, integrales y series)
- Representación de funciones con las series e integrales de Fourier
- Resolución de problemas con la transformada de Fourier y la transformada z

Algebra lineal

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales determinados
- Problemas de vectores en el plano, en el espacio tridimensional y en espacios de funciones.
- Problemas de transformaciones entre espacios vectoriales.

La dinámica del curso

En este apartado describiremos brevemente cómo se ha configurado la nivelación en paralelo de acuerdo a las necesidades de los desarrollos planeados para la primera unidad de la asignatura Cálculo Diferencial.

Los profesores participan en una reunión de orientación inicial donde se analiza el diseño de la asignatura, que comprende una serie de elementos que dan pauta sobre la forma de relacionarse con los estudiantes y cómo enfocar los contenidos. Además se le entrega la planeación detallada del curso con el tipo de actividad a desarrollar en cada sesión; esta planeación también la reciben los estudiantes.

Un aspecto fundamental de la planeación son los laboratorios, uno por cada unidad, los estudiantes en grupos de tres como máximo deben realizar los laboratorios en trabajo independiente (Pidkasisty, 1980) y demostrar mediante un informe escrito, como ha sabido implementar los conceptos y procedimientos de cálculo estudiados, utilizando las facilidades que ofrece el programa Wolframalpha. En el instructivo aparecen algunos ejemplos donde se hace especial énfasis en los análisis de gráficos.

En las tutorías de nivelación se clarifican en contexto los aspectos que constituyen requisitos previos, para poder resolver las diferentes situaciones que pueden presentarse vinculadas a los nuevos conceptos introducidos en la clase.

Comportamiento asintótico e infinitésimos equivalentes. Límites fundamentales

A continuación hacemos una descripción de cómo abordamos el comportamiento asintótico en las fracciones racionales y las funciones exponenciales para definir los tipos de indeterminaciones, definir los tipos de discontinuidad y llegar al cálculo de los límites fundamentales.

Los comportamientos asintóticos caracterizan estados de estabilidad e inestabilidad de procesos que han sido modelados con expresiones matemáticas.

Como ejemplos tenemos las oscilaciones amortiguadas, los procesos de asentamiento de edificios, los procesos que se subordinan a la distribución normal y otros.

Los comportamientos asintóticos serán estudiados en las fracciones racionales, funciones que presentan los tres tipos de asíntotas y que aparecen con mucha frecuencia en los problemas abordados con los recursos del cálculo diferencial e integral.

En este momento se visualizan los tres tipos de comportamientos asintóticos.

Para referirnos al caso típico de funciones que presentan comportamientos asintóticos antes debemos recordar algunos modelos matemáticos que están presentes en la estructura de las fracciones racionales.

Las fracciones racionales en general son cocientes entre dos polinomios, las más simples son: el cociente entre un polinomio constante y uno de primer grado y las combinaciones en forma de cocientes entre polinomios, de primer grado, de segundo grado o de tercer grado.

Como las asíntotas son rectas es el momento oportuno para estudiar en paralelo las situaciones donde se presenta este modelo y algunas características de su ecuación.

Para abordar las ecuaciones lineales y cuadráticas se analizan las siguientes situaciones:

El caso del movimiento rectilíneo uniforme que se modela por la fórmula $e = vt$, en términos de las variables usuales en matemáticas este modelo se expresa por la ecuación $y = K x$. Una situación geométrica asociada a este mismo modelo es la fórmula del perímetro de una circunferencia en función de su diámetro, $P = \pi D$ o el perímetro en función del radio $P = 2\pi R$.

Un análisis análogo se hace para la función cuadrática a partir del modelo de la caída libre.

Se asocia a un experimento realizado por Galileo donde encontró que: $e = \frac{1}{2} g t^2$

Esta fórmula nos dice que el espacio recorrido en la caída libre en condiciones ideales, es proporcional al cuadrado del tiempo, como vemos la constante de proporcionalidad involucra la aceleración de la gravedad.

Un modelo geométrico más antiguo, similar al de la caída libre es el de la relación entre el área y el radio de un círculo: $A = \pi R^2$. Ambos modelos se expresan mediante la función cuadrática: $y = kx^2$

EL análisis detallado de las diversas situaciones que se presentan con las rectas se orienta en un instructivo de laboratorio. En el instructivo se dan las tareas correspondientes para hacer el análisis de las situaciones particulares relacionadas con la función cuadrática y su representación en el plano cartesiano, principalmente en lo que se refiere a puntos de corte con ambos ejes y tangencias con el eje X. Se incluyen además tareas relativas a funciones cúbicas.

La proporcionalidad inversa. El infinito y la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

La proporcionalidad inversa introduce un nuevo modelo donde aparecerá el comportamiento asintótico vertical y horizontal momento para introducir la noción de límite.

Supongamos que en la fórmula del movimiento rectilíneo uniforme e = vt se conoce el espacio como la distancia entre dos puntos y lo que se desea es determinar a qué velocidad se necesita desplazarse para recorrer esa distancia en un tiempo t dado. Esta situación se puede presentar cuando se trata de atender una emergencia, en tal caso: $v = \frac{e}{t}$

Ahora la velocidad es una variable dependiente, el tiempo continua siendo la variable independiente y el espacio es constante. Aquí se observa que si el tiempo requerido disminuye entonces tiene que aumentar la velocidad para cubrir la distancia.

Escribiendo esta relación con las variables cartesianas tenemos: $y = \frac{k}{x}$

El caso más sencillo es con k = 1 es decir: $y = \frac{1}{x}$

Aquí vemos que si x crece entonces y decrece, si x crece mucho decimos que x tiende a infinito y se puede expresar simbólicamente por $x \to \infty$ para tal valor tan extremo de x se tiene que la variable y se aproxima o tiende a cero $y \to 0$.

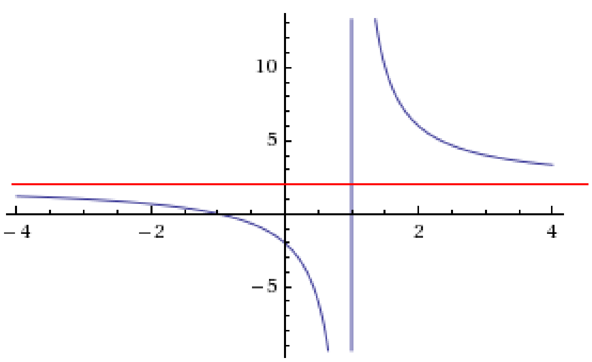
Se adopta entonces una notación simbólica que resume este comportamiento asintótico.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

A partir de aquí se analizan las diversas situaciones de comportamientos asintóticos asociados a las fracciones racionales, observando el comportamiento del gráfico en la proximidad de las asíntotas.

Veamos dos casos de interés.

Primero:



plot	$\frac{2x+2}{x-1}$

La asíntota vertical sigue siendo *x=1* pero ahora la asíntota horizontal no es el eje X sino la recta *y = 2*

Las asíntotas verticales están asociadas a saltos de la gráfica de la función al infinito, se conceptualiza este hecho como una discontinuidad de salto infinito.

Las funciones que acabamos de representar son ejemplos simples de las llamadas fracciones algebraicas racionales, en el último caso la fracción se puede transformar efectuando la división. De donde resulta:

$$\frac{2x+2}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$$

Se puede comprobar que las dos expresiones son equivalentes efectuado la operación indicada a la derecha del signo igual.

Si empleamos la notación de límite tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{4}{x-1}\right) = 2$$

Es decir la asíntota horizontal es *y = 2*

Las fracciones algebraicas racionales son cocientes de polinomios de cualquier grado, que aparecen con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de procesos, estas funciones se caracterizan por sus comportamientos asintóticos.

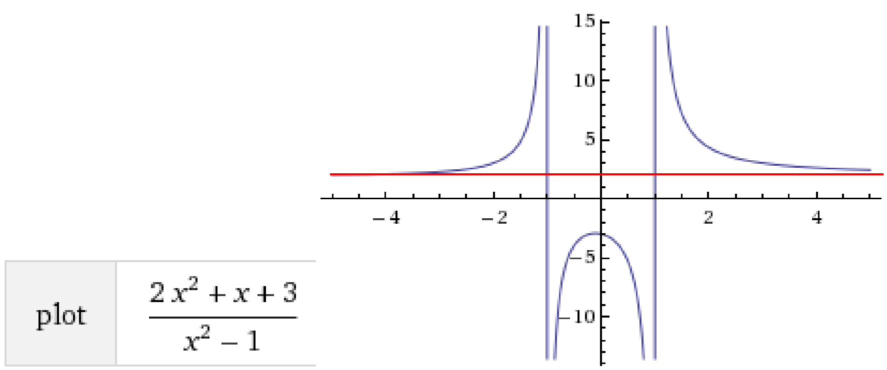
Segundo:

Si la fracción racional es el cociente de dos polinomios de igual grado siempre tendrá una asíntota horizontal, sea:

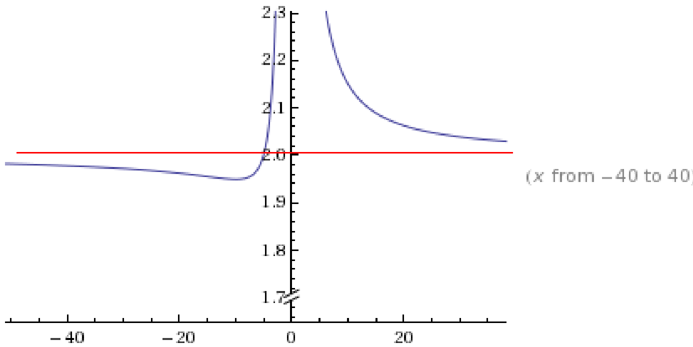
$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}$$

Esta fracción presentará una asíntota horizontal en *y = 2* y dos asíntotas verticales ya que hay dos valores de x que anulan el denominador *x = 1; x = -1*

Segundo, veamos el gráfico siguiente:



Efectivamente se producen los comportamientos asintóticos esperados, pero en la parte izquierda del gráfico hay algo inquietante, la asíntota se confunde con la curva, vamos a observar esa zona con más detalle para ver qué es lo que sucede realmente.



Este gráfico muestra cómo es realmente el comportamiento asintótico en la parte izquierda del gráfico. Este comportamiento peculiar de esta curva nos indica que debemos determinar el punto donde se produce el cambio en el comportamiento, para poder entre otras cosas determinar el rango de la función, algo similar ocurre con la parte de la curva localizada en el semiplano inferior. Este ejemplo deberá ser retomado en el análisis de máximos, mínimos y concavidad.

En general si tenemos en la fracción dos polinomios del mismo grado siempre habrá asíntota horizontal $y = \frac{A}{B}$ donde A y B son los coeficientes de las potencias de mayor grado en cada polinomio.

Esto se deduce fácilmente aplicando límites, tomemos un ejemplo arbitrario con polinomios de tercer grado.

Sea la fracción racional $f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + x + 3}{3x^3 + x^2 - 1}$ podemos afirmar que:

$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + x + 3}{3x^3 + x^2 - 1} = \frac{5}{3}$ y por consiguiente tiene asíntota horizontal $y = \frac{5}{3}$

Esto significa que las potencias dominantes determinan el valor del límite es decir frente a los infinitos de orden superior podemos despreciar los de menor orden y las constantes.

Esta afirmación se justifica fácilmente dividiendo el numerador y el denominador por la potencia de mayor orden de la variable en este caso sería x^3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + x + 3}{3x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{5\frac{x^3}{x^3} - 2\frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{5 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{5}{3}$$

Sabemos que una constante dividida una variable que tiende a infinito, tiende a cero, a estas cantidades se les llama infinitésimos, es decir, si su límite es cero. Como vemos los infinitésimos se pueden despreciar frente a las constantes y como resultado llegamos al valor del límite.

Si cambiamos las variables tomando $y=\frac{1}{x}$ sabemos que si $x\to\infty$ entonces $y\to 0$ con lo que expresión anterior se puede escribir:

$\lim_{y\to 0}\frac{5-2y+y^2+3y^3}{3+y-y^3}=\frac{5}{3}$ aquí el análisis se hace con infinitésimos, que en pocas palabras son cantidades que tienden a cero y serán analizadas en detalle más adelante.

En la práctica procedemos directamente según las llamadas reglas de Leibnitz que se enuncian y ejemplifican.

Las fracciones racionales se presentan con mucha frecuencia en el modelado de procesos sobre todo las encontraremos cuando tengamos que resolver ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace, donde además se requiere saber hacer las integrales de estas funciones.

¿Cómo continuaría el análisis? La secuencia sería la siguiente:

- Asíntotas oblicuas. La indeterminación ∞ - ∞
- Comportamiento asintótico en fracciones irracionales.
- Comportamiento asintótico asociado a la función $y=e^{\frac{-1}{x}}$. Límites laterales.
- Equivalencias de infinitésimos. Indeterminación $\frac{0}{0}$. Discontinuidad evitable.
- Límite fundamental trigonométrico
- Infinitésimo equivalente con la función exponencial
- La función logaritmo asociada al punto de corte con el eje X de expresiones exponenciales.
- El límite fundamental algebraico por infinitésimos equivalentes
- Relación entre comportamientos asintóticos y las discontinuidades de salto finito con exponenciales. La función $f(x)=1+\frac{1}{1-e^{\frac{-1}{x-2}}}$

En el laboratorio correspondiente al análisis de la indeterminación $\frac{0}{0}$, la tarea principal consiste en calcular límites del tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con ayuda del programa Wolframalpha.

Resumen de las fórmulas de aproximación resultantes

Como resultado de los análisis de los infinitésimos equivalentes fundamentales se llega a cuatro importantes fórmulas de aproximación:

$$senx\approx x\ ,\ \frac{x^2}{2}\approx 1-\cos x\Rightarrow \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2},\ e^x\approx 1+x\ ,\ \ln(x+1)\approx x$$

Conclusiones

La propuesta que hemos descrito en líneas muy generales, está encaminada básicamente a que el estudiante de ingeniería encuentre un sentido más explícito a su proceso de su formación matemática; en repetidas ocasiones le comentamos a nuestros profesores, que si el sentido del estudio del cálculo se reduce a resolver ejercicios de entrenamiento para las evaluaciones, realmente es un contrasentido, en este intento hemos implementado la estrategia que tiene como eje central los núcleos generadores de conceptos y formas de actuación, tal estrategia se alimenta de las situaciones problema y del uso sistemático de la tecnología, hemos elegido el software Wolframalpha, porque tiene servicio online de libre acceso, lo que le permite al estudiante utilizarlo fuera del campus universitario.

La nivelación en paralelo es un elemento muy significativo ya que permite contextualizar los conocimientos previos necesarios para avanzar en la solución de los problemas asociados a los procesos de formación matemática del ingeniero, muy vinculados a las propiedades geométricas de los modelos matemáticos objeto de estudio.

Por las limitaciones de espacio no ha sido posible exponer en detalle todos los desarrollos, solo hemos indicado cómo introducir los conceptos básicos del límite asociados a los comportamientos asintóticos en las fracciones racionales, la temática que continua tiene un particular interés ya que se trata del análisis de los comportamientos asintóticos en las composiciones con la función exponencial y la función logarítmica y la eventual aparición de discontinuidades de salto finito.

El otro aspecto importante a destacar es el relacionado con los infinitésimos equivalentes y las fórmulas de aproximación que de ellos se derivan.

La observación detallada de la estructura de las unidades de estudio, puede dar una idea del desarrollo completo de los cursos. En el trabajo no hemos hecho referencia a las diversas formas de organizar la actividad cognoscitiva de los estudiantes (Puig, 2006) que va encaminada a incrementar su rol protagónico en el proceso, sobre todo en lo que tiene que ver con la realización de los laboratorios, la estructura de los instructivos y el respectivo informe que deben rendir los estudiantes.

Otro aspecto a destacar es el uso de un mismo modelo en diferentes instancias de análisis a medida que avanza el desarrollo del curso, como es el caso de las funciones compuestas de exponenciales con racionales, en un primer momento solo se analizan puntos de corte y comportamientos asintóticos, para más adelante analizar puntos críticos, inflexiones y concavidades, para poder finalmente completar el análisis del comportamiento de las funciones lo que le da una unidad a todo el contenido del curso.

Lo que presentamos no es un trabajo concluido, está algo alejado del enfoque tradicional de los textos más establecidos; estamos más que convencidos sobre la necesidad de perfeccionar esta propuesta, con los aportes y experiencias de nuestros profesores y estudiantes.

Bibliografía y referencias

Arjanguelsky, C. I. (1980). El proceso docente en la Escuela Superior, sus regularidades fundamentales y métodos. Moscú. Ed. La Escuela Superior. En idioma ruso.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E.Fennema y T. Romberg (Eds). Mathematics classrooms that promote understanding (pp19-32). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates,Inc.

Gallego Badillo Rómulo (1999). Competencias cognoscitivas. Un enfoque epistemológico, pedagógico y didáctico. Cooperativa editorial Magisterio. ISBN: 958-20-0514-9. Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Gnedenko, B. V. (1981). La educación matemática en los Centros de Educación Superior (CES). Moscú. Ed. La Escuela Superior. En idioma ruso.

Kudriavsev, L.D. (1980). La matemática contemporánea y su enseñanza. Editorial Ciencia (Nauka). En idioma ruso.

Majmutov, M.I. (1983). La enseñanza problémica. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

Morin, Edgar. (2001). Introducción al pensamiento complejo. ISBN: 84-7432-518-8. Editorial Gedisa España.

Pidkasisty, P.I. (1980). La actividad cognoscitiva independiente de los escolares en la enseñanza. Investigación teórico-experimental. Ed. Pedagogía. Moscú. En ruso.

Puig Portal J. E. (1984). Activación de los procesos cognoscitivos de los estudiantes de ingeniería, durante el estudio de las disciplinas matemáticas. Resumen de la tesis doctoral. Editorial de la Universidad Pedagógica estatal de Moscú. En idioma ruso.

Puig Portal, J.E. (2000). Sobre regularidades del caos y creatividad en educación: Reflexiones. Memorias del Primer Congreso Internacional de Pensamiento Complejo. Universidad Externado de Colombia. Bogotá Colombia. (Soporte en CD)

Puig Portal J. E. (2006). Ambientes de aprendizaje centrados en los estudiantes. Revista electrónica. Investigación e Innovación en la Enseñanza de las Ciencias. Vol 1 No 1 2006 pags. 78-84.ISSN 1909-1230

Shamova, T. I. (1982). Activación del aprendizaje de los escolares. Moscú. Editorial Pedagogía. En idioma ruso.