Cálculo diferencial e integral e a esfera:

Relações em uma análise histórico-epistemológica

Valdomiro Pinheiro **Teixeira Júnior**
SEDUC/PA - Secretaria de Estado de educação do Pará
Brasil
Jr3arq@yahoo.com..br
Otávio Augusto do Espírito Santo **Barros**
Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática (PPGECM / IEMCI / UFPA)
Brasil
otaviobarros@ufpa.br

Resumo

Este trabalho se iniciou a partir da atividade final da disciplina *Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria*, onde ao aprofundarmos nossos estudos percebemos questões relacionadas ao cálculo infinitesimal do *Princípio de Cavalieri*, o que nos levou a buscar as demonstrações da *Esfera*, a partir do Cálculo Diferencial e Integral e depois em uma pesquisa sobre a *Esfera* na história vemos em Arquimedes um estudo sobre este sólido. Com isto buscamos colaborar na questão do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Superior, utilizando a relação deste com a *Esfera*, a partir de uma análise histórico-epistemológica, não a entendendo no sentido do paralelismo onto-filogenético e sim que os conceitos matemáticos podem ser encontrados dentro da história de forma irregular e que a história deve ser analisada, de forma a nos oferecer diferentes situações para que a partir desta empreendamos na construção do conceito de forma didática.

Palavras-chave: análise histórico-epistemológica, cálculo diferencial e integral, princípio de Cavalieri, Arquimedes.

Introdução

Este trabalho se iniciou a partir da disciplina *Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria*[1] ministrada pelo Prof. Dr. Renato Guerra, no Instituto de Educação Matemática e Cientifica (IEMCI/UFPA). A atividade final da disciplina consistiu na elaboração de um texto produzido em conjunto pelos mestrandos que cursaram a disciplina. Este texto trouxe uma proposta de ensino a partir do conteúdo do capítulo 4 do livro “Medida e Forma em Geometria” de Elon Lages Lima para a Educação Básica.

O capítulo denominado “Volume” trata dos assuntos referentes ao título. Na disciplina conseguimos ver as relações entre álgebra, aritmética e geometria de uma forma mais profunda e neste trabalho os autores deste artigo trabalharam mais intensamente sobre os assuntos “Princípio de Cavalieri” e “Esfera” presentes no capítulo 4. Aprofundamos nossos

[1] Disciplina ministrada pelo Prof. Dr. Renato Borges Guerra, oferecida ao curso de mestrado do Programa de Pós – Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas no Instituto de Educação Matemática e Cientifica na Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA)

estudos e passamos a ver as questões relacionadas ao cálculo infinitesimal do *Princípio de Cavalieri*, o que nos levou a buscar as demonstrações dos sólidos, em particular da *Esfera*, a partir do Cálculo Diferencial e Integral e depois em uma pesquisa sobre o estudo da *Esfera* na história vemos em Arquimedes um estudo muito interessante sobre este sólido, o que nos fez perceber que ele iniciou alguns estudos também referentes ao infinito. Então buscamos colaborar no ensino de Cálculo Diferencial e Integral a partir da relação deste com geometria espacial, particularmente abordando a *Esfera*, passando por Arquimedes e Cavalieri, baseados em uma perspectiva crítica de análise histórico-epistemológica não a entendendo no sentido do paralelismo onto-filogenético e sim que os conceitos matemáticos podem ser encontrados dentro da história de forma irregular e que a história deve ser analisada, de forma a nos oferecer diferentes situações para que a partir desta empreendamos na construção do conceito de forma didática.

Uma análise histórico-epistemológica

Poderíamos dizer que o que faremos neste estudo é uma análise epistemológica da história da matemática, pois centrando-nos na questão do ensino do Cálculo Diferencial e Integral buscamos recortes históricos onde podemos perceber o surgimento deste assunto, a partir da geometria espacial, em particular com o conceito de *Esfera*[2], e assim buscamos analisá-lo. Porém cremos que isto não seja tão simples. Buscando fundamentar aquilo que entendemos por análise histórico-epistemológica da matemática ou pelo menos a análise que buscamos empreender, é necessário chamar a atenção para as perspectivas que têm sido usadas para o estudo desta questão.

Miguel e Miorim (2004, p. 69-149) apresentam cinco perspectivas. Aqui destacamos três: a perspectiva evolucionista linear, que tem sua base nos trabalhos de Ernst Haeckel (1834-1919), morfologista que defendeu que o "desenvolvimento psíquico da criança é uma repetição abreviada da evolução filogenética" (MIGUEL & MIORIM, 2004, p. 80); a perspectiva estrutural-construtivista operatória, desenvolvida por Jean Piaget e Rolando García no livro *Psicogênese e História das Ciências* de 1983, onde os autores estabelecem a equivalência entre a história e as etapas da psicogênese e a perspectiva evolutiva descontínua, desenvolvida por Gaston Bachelard que defendia que o desenvolvimento histórico do pensamento científico se deu em um progresso descontínuo. Segundo Miguel (2004) Bachelard utilizou o "pressuposto recapitulacionista que estabelece um paralelismo entre os níveis filogenéticos de sua história epistemológica e os psicogenéticos de seus supostos aprendizes da atualidade" (p. 90).

Estas três perspectivas, estão baseadas, no paralelismo onto-filogenético, também chamado princípio recapitulacionista ou princípio genético. Segundo Miguel e Miorim (2004) o paralelismo onto-filogenético é o termo usado para sintetizar o "estabelecimento de vínculos entre a filogênese e a psicogênese do conhecimento matemático" (p. 73). A filogênese trata da produção sócio-histórica do conhecimento no passado e a psicogênese é a produção ou apropriação pessoal desse conhecimento no presente e estas formas de análise da produção do conhecimento são vistas como semelhantes, ou seja, "a filogênese recapitula a ontogênese".

Nessa versão pedagógica, todo indivíduo, em sua construção do conhecimento, passaria por estágios que a humanidade teria passado. Segundo, Brolezzi (2004):

> A crítica a essas perspectivas se baseia em grande parte na consideração de que seria ilegítima a tentativa de espelhar, no âmbito escolar, semelhanças entre a

[2] Quando nos referirmos a *Esfera* neste trabalho estamos lidando com a questão do Volume.

> seqüência histórica (e eventualmente os obstáculos encontrados nessa marcha) e a forma de abordar o conteúdo na sala de aula. (p. 2)

A perspectiva Evolucionista Linear é, das perspectivas aqui apresentadas, a mais simplista, mas a que melhor resume o que queremos mostrar aqui, pois considera que a evolução do conhecimento matemático se deu de forma linear e que neste sentido é possível observar na história a matemática se desenvolvendo de forma completamente regular. Bachelard (1996) afirmou que "a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro" (p. 28). Essa concepção fez com que os educadores matemáticos não utilizassem, inicialmente, a noção de obstáculo epistemológico e buscaram colocá-la na aprendizagem, chamando-os de obstáculos didáticos. Porém, consideramos que a matemática passou por problemas como as outras ciências e que seu desenvolvimento foi irregular e devemos a partir desta concepção buscar as diferentes situações em que certos conceitos surgiram.

Não nos interessa neste trabalho relacionar questões filogenéticas a questões psicogenéticas, ou qualquer relação do tipo, nem a partir do desenvolvimento histórico, isto é, baseados nos eventos de que dispomos apresentar problemas que discordam da estrutura matemática que já possuímos e também não tencionamos apresentar a história como uma alternativa motivacional ao ensino. Pode-se entender que estas questões podem fazer parte daquilo que propomos, porém destacamos que nossa intenção é apresentar a epistemologia da matemática a partir de eventos históricos (no sentido da produção matemática) e em como certos conceitos já estavam presentes em determinados conteúdos.

Acreditamos que os conteúdos matemáticos não foram formados na mesma ordem que vemos atualmente, eles passaram por processos complexos ou nem sequer se encaixam em qualquer tipo de processo. Logo, ver a história de uma forma pontual serviria como motivador ou como algo lúdico, mas entendemos que o conteúdo seria melhor compreendido a partir de uma análise epistemológica que visitasse a história e os fatos em que pode se observar determinado objeto matemático. Brolezzi (2004) produziu um artigo muito interessante em que defende a utilização da história da matemática às avessas. Em certo ponto ele defende que

> O papel da história fica bem definido por mostrar uma das propriedades fundamentais da rede: a metamorfose. Entretanto, pensamos ser necessário contrapor uma concepção linear evolutiva da matemática com uma visão que inverta o sentido da história, pois isso revelaria uma multiplicidade de caminhos para a construção de significados no ensino – particularmente no ensino superior. (p. 4)

É a história da matemática e o conteúdo matemático trabalhando conjuntamente, em como determinado conteúdo se deu na história ou nas histórias e em como a história se deu a partir do conteúdo, não no sentido de como a história da sociedade aconteceu, mas aqui entendemos em como a história interna da matemática se deu a partir de certas descobertas (ou criações?).

A história pode revelar possibilidades pedagógicas que superem as dificuldades encontradas por professores e estudantes de graduação em matemática. Nossa análise histórico-epistemológica defende principalmente a utilização de variadas situações onde ocorreu a aplicação de um conceito ou conteúdo matemático na história, visando principalmente a reflexão sobre estas situações ou experiências. Neste estudo não estamos lidando com o desenvolvimento histórico-epistemológico de um conceito, mas das relações de certos conteúdos e em como eles se formaram mutuamente. É claro, que, querendo ou não, estamos trabalhando com conceitos, porém diferenciamos, para que não seja esperado deste trabalho, a análise de um determinado conceito em si.

O assunto no qual nos deteremos é visto principalmente no Ensino Superior. Se há contestações sobre a utilização da história da matemática no Ensino Básico, estas não existem quando se refere ao ensino superior e o princípio recapitulacionista é colocado como fundamento de praticamente todas as abordagens da história para este nível de ensino.

Brolezzi (2004) utilizando Grabiner (1983) revela que as motivações do Cálculo não estavam na Física, mas na própria Matemática, no estudo dos resultados de Euclides, Arquimedes, Cavalieri, Fermat, Descartes e Barrow. Brolezzi (2004) complementa:

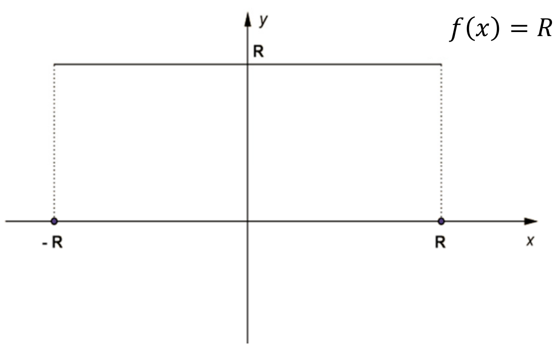
> A idéia é que os conceitos matemáticos mais complexos não tenham surgido de uma natural prolongação do senso comum, mas sim de uma criação peculiar que não se mostre, mesmo aos seus criadores, todo o seu potencial de aplicação, nem todos os problemas de sua fundamentação. Segundo Grabiner (1983), os conceitos matemáticos são primeiro usados, depois descobertos, explorados e desenvolvidos, para somente ao final serem definidos. (p. 9).

Consideramos necessário um conhecimento maior da origem e do desenvolvimento dos conceitos referentes ao Cálculo diferencial e Integral e acreditamos que relacioná-lo à geometria espacial facilitará, de forma abrangente e significativa, o desenvolvimento do ensino do cálculo nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Destacamos que apesar de estarmos apontando o tempo todo que este estudo é em favor do ensino do cálculo entendemos que também é em favor da geometria espacial, em particular do ensino da *Esfera*. Um conteúdo colabora para o outro e a história vem mostrar estas relações.

Relações entre o Princípio de Cavalieri e o Cálculo a partir do estudo da esfera

Nossa análise se inicia pela demonstração do volume da *esfera* a partir do Principio de Cavalieri aplicado no Cálculo Diferencial e Integral. A estratégia que utilizaremos é a seguinte: em um eixo cartesiano, utilizando o gráfico de uma função f faremos a construção de um *cilindro* de raio 2R, em seguida a partir de uma função g, inserimos neste *cilindro* dois *cones*, o volume que é a diferença entre o *cilindro* e os dois *cones* chamaremos de $Volume\ S(Vs)$. Este sólido é uma construção importante, pois é a partir dele que iremos generalizar o cálculo do volume de uma *esfera*. Comecemos a seguir.

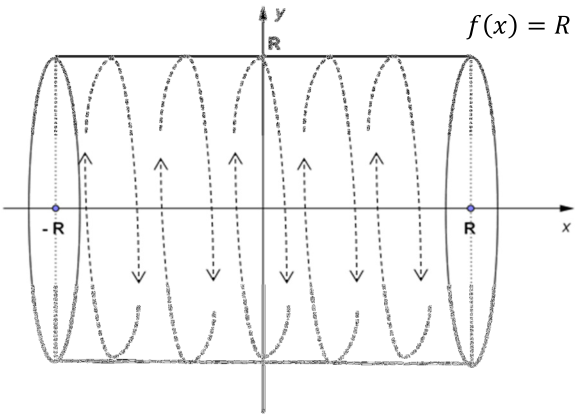
Construímos um cilindro reto (eixo perpendicular as bases) de raio R e altura 2R. Para esta construção primeiramente tomemos uma função constante do tipo $f(x) = R$, sendo que esta função é continua no seguinte intervalo $-r \leq x \leq r$.



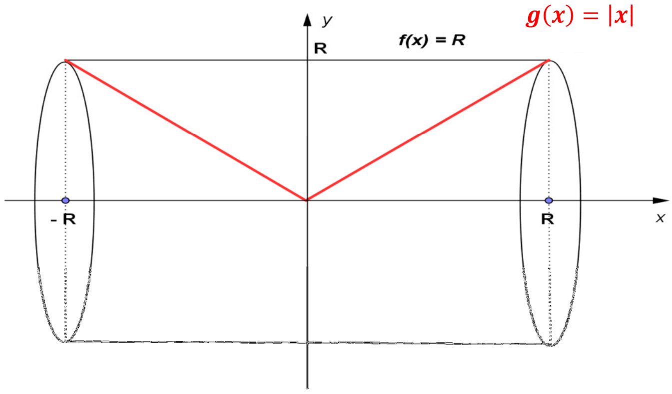
Lembrando que no Cálculo Diferencial e Integral[3] dado uma f contínua em $[a, b]$, seja S o sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$. O volume deste sólido será $Volume\ de\ S = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$. Neste sentido para a construção do *cilindro* faremos uma rotação da função $f(x) = R$ em torno do eixo x que resulta:

$$Volume\ do\ cilindro\ (V_c) = \pi \int_{-R}^{R} [f(x)]^2\, dx$$

$$V_c = \pi \int_{-R}^{R} R^2\, dx$$

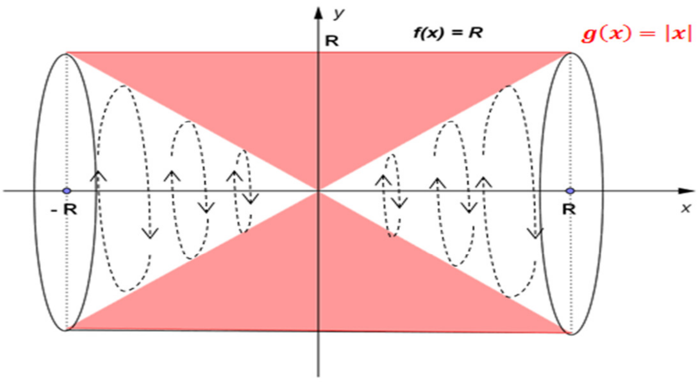


Neste cilindro construímos dois cones, ambos com base raio **R** e altura **R**. Para esta construção tomaremos uma função $g(x) = |x|$



E faremos uma rotação em torno do eixo x. A rotação produz dois *cones* equivalentes. O sólido formado pela diferença entre o *cilindro* e os dois *cones* chamaremos de *sólido S* que corresponde a arte em vermelho da próxima figura:

[3] A demonstração completa desta propriedade pode ser encontrada em Guidorizzi (2001 p. 400).



O volume do *sólido S*, será calculado pela diferença do volume total do *cilindro* pelo volume dos dois *cones*.

$$Volume\ do\ Sólido\ S\ (V_s) = Volume\ do\ Cilindro(V_c) - Volume\ dos\ cones(V_{co})$$

$$(V_s) = (V_c) - (V_{co}) \quad \text{(I)}$$

Como dito anteriormente o volume do *cilindro* é dado pela seguinte expressão:

$$V_c = \pi \int_{-R}^{R} R^2\, dx$$

E o volume dos dois cones será dado analogamente ao feito com o volume do cilindro, $\pi \int_{-R}^{R} [g(x)]^2\, dx$. Neste sentido para a construção dos cones faremos uma rotação da função $f(x) = |x|$ em torno do eixo x que resulta:

$$Volume\ dos\ cones = \pi \int_{-R}^{R} [g(x)]^2\, dx$$

$$V_{co} = \pi \int_{-R}^{R} |x|^2\, dx$$

Ressaltamos que a função $|x|^2$ e $(x)^2$, possuem uma construção equivalente, que em nosso trabalho não despertará grandes análises e assim trabalharemos com a seguinte equivalência: $|x|^2 = (x)^2$. Assim:

$$V_{co} = \pi \int_{-R}^{R} (x)^2\, dx$$

Retomemos em (I):

$$(V_s) = (V_c) - (V_{co})$$

$$V_s = \pi \int_{-R}^{R} R^2\, dx - \pi \int_{-R}^{R} (x)^2\, dx$$

$$V_s = \pi [R^2 x]_{-R}^{R} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$V_s = \pi [R^2 x]_{-R}^{R} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$V_s = \pi[R^2R - R^2(-R)] - \pi\left[\frac{R^3}{3} - \frac{(-R)^3}{3}\right]$$

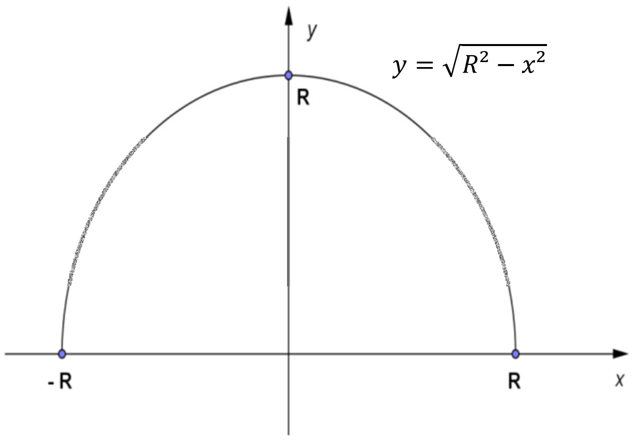
$$V_s = \pi[R^3 + R^3] - \pi\left[\frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3}\right]$$

$$V_s = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$

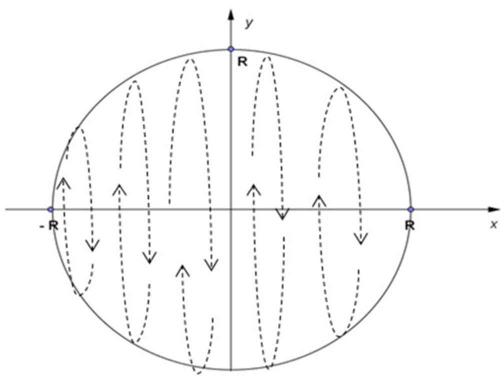
$$V_s = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Encontramos até aqui o volume do *solido S*, que foi construído como a diferença de um *cilindro* (de base raio R e altura 2R) e dois *cones* (cada um com altura R e raio de base igual a R). Queremos demonstrar que este *sólido S* possui o mesmo volume que uma *esfera* de raio R e assim definir a equação do volumes de uma *esfera* em função de seu raio R . Passaremos então para a construção da esfera de raio R, utilizando os conceitos do Calculo Diferencial e Integral.

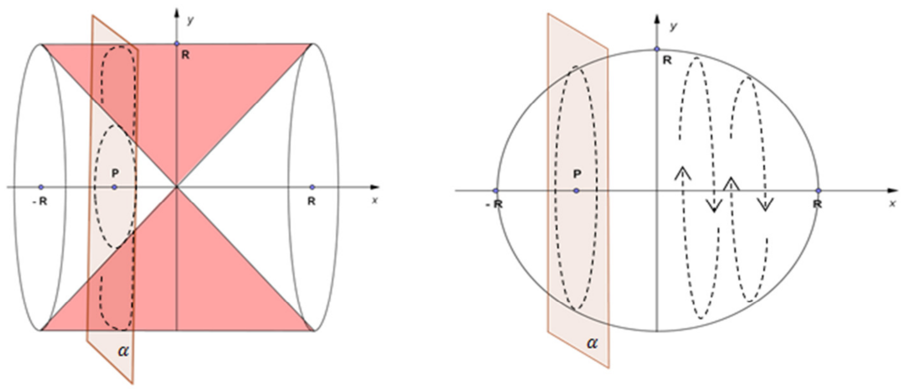
Dada a seguinte função $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, definida abaixo no intervalo $-R \leq x \leq R$, que corresponde a um semicírculo de raio R conforme a figura abaixo:



Faremos uma rotação em torno do eixo x que resulta em uma esfera de raio R.



Para esta demonstração, usaremos o Principio de Cavalieri[4]: "*Consideremos dois sólidos A e B no plano cartesiano, ambos com a mesma altura, em um ponto P qualquer no eixo x, coincidente nos dois sólidos, seccionamos estes sólidos por um plano α, se área formada pela intercessão do plano com os sólidos forem iguais, então o volume dos dois sólidos serão iguais"*. A seguir teremos o *cilindro* anterior de altura 2R, e raio da base é igual a R e uma *esfera* com a mesma altura e raio igual a R. Ou seja temos aqui dois sólidos de mesma altura e que iremos secciona-los por um plano α. Este plano será paralelo ao eixo y e perpendicular ao eixo x, a base do *cilindro* e passara por um ponto p qualquer. Na *esfera*, este plano α à seccionará passando também pelo ponto P e será perpendicular ao eixo x.



Queremos provar que a área seccionada na *esfera* é equivalente a área do *solido* S. Logo:

Área solido S (A_s) = Área do cilindro (A_c) – área seccionada no cone (A_{co})

A área do *cilindro* é um circulo de raio R, logo sua área é:

$$A_c = \pi R^2$$

A área do *cone* é um circulo de raio $g(p)$, logo sua área é:

$$A_{co} = \pi[g(p)]^2$$

$$A_{cone} = \pi|p|^2$$

$$A_{cone} = \pi(p)^2$$

Logo a área do *sólido S* fica definida da seguinte maneira:

$$A_{Solido\ s} = \pi R^2 - \pi(p)^2$$

$$A_{Solido\ s} = \pi(R^2 - p^2) \qquad \text{(I)}$$

A área que o plano α secciona na *esfera* (A_E) é um circulo de raio $h(p)$, logo:

$$A_E = \pi[h(p)]^2$$

$$A_E = \pi\left[\sqrt{R^2 - p^2}\right]^2$$

[4] Bonaventura Cavalieri (1598 —1647) foi um sacerdote jesuíta e matemático italiano, discípulo de Galileu. A partir de suas considerações ele desenvolveu um método que foi utilizado durante cinqüenta anos e que foi substituído pelo Cálculo Integral. A teoria de Cavalieri permitiu-lhe determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas.

$$A_E = \pi(R^2 - p^2) \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II) demonstramos que área do *sólido S* é equivalente a área da *esfera* S, logo pelo Principio de Cavalieri, o *solido S* e a *esfera* E possuem o mesmo volume, logo o volume da *esfera* é dado por:

$$Volume\ da\ esfera\ = \frac{4\pi R^3}{3}$$

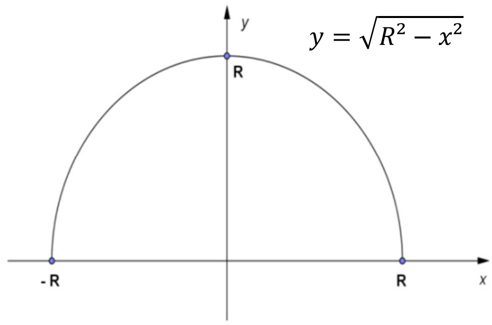
Relações entre o Teorema de Arquimedes e o Cálculo a partir do estudo da esfera

Outra demonstração do volume da esfera é dada pelo seguinte teorema:

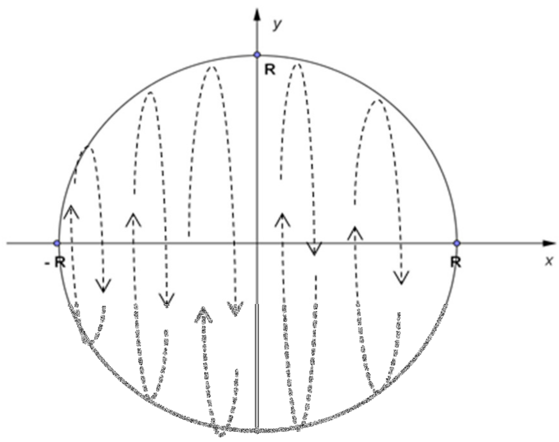
"Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao circulo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera"

O teorema acima é atribuído a Arquimedes e a partir do Cálculo Diferencial e Integral faremos construções dos sólidos: *esfera* e *cone;* que demonstrarão a validade de seu teorema e que também mostrará as relações deste com a demonstração feita pelo Princípio de Cavalieri. Iniciaremos com a construção da esfera e o cálculo generalizado de seu volume.

Dada a seguinte função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, definida abaixo no intervalo $-R \leq x \leq R$, que corresponde a um semicírculo de raio R conforme a figura abaixo:



Faremos uma rotação em torno do eixo x que resulta em uma esfera de raio R.



Para o cálculo do volume desta *esfera* utilizaremos a seguinte propriedade: no Cálculo Diferencial e Integral dado uma f continua em $[a, b]$, seja S o solido obtido pela rotação em torno do eixo x, limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$. O volume deste sólido será

$Volume\ de\ S = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$. O volume da *esfera* então ficará determinado da seguinte maneira:

$$V_E = \pi \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2 - x^2}\right]^2 dx$$

$$V_E = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 dx$$

$$V_E = \pi \left[xR^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

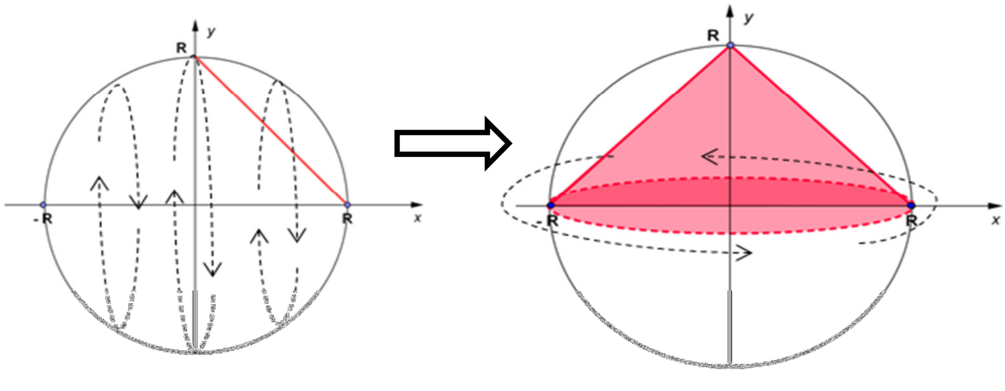
$$V_E = \pi \left[RR^2 - \frac{(-R)^3}{3}\right]$$

$$V_E = \pi \left[R^3 + \frac{R^3}{3}\right]$$

$$V_E = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Encontramos até aqui o volume da esfera. Passaremos então ao Cálculo do Volume do *Cone* com base igual ao circulo máximo da *esfera* e altura igual ao raio da *esfera*, conforme o Teorema de Arquimedes. Nosso objetivo é mostrar que o volume da *esfera* é quatro vezes o volume deste *cone*, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral. Para a construção de um *cone* em um plano cartesiano a partir da rotação em torno do eixo y, utilizaremos os seguintes conceitos de Cálculo Diferencial e Integral: dada uma função $f(x) > 0$, continua no intervalo $[a, b]$, com $a > 0$. Obteremos o volume desta função tomando o intervalo $a \le x \le b$ e $0 \le y \le f(x)$. O volume obtido pela rotação desta função em torno do eixo y é dado pela seguinte formula[5]: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

Na figura a seguir mostraremos a construção do *cone* no circulo máximo – que corresponde ao centro do eixo cartesiano o eixo x de medida R – da esfera anterior. Suponhamos a seguinte função $f(x) = -x + R$, e em seguida aplicaremos uma rotação em torno do eixo y.



[5] Nosso objetivo é construir o sólido e calcular seus volumes a partir das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral a demonstração completa desta propriedade pode ser encontrada em Guidorizzi (2001, p. 406).

O volume do cone será dado pela seguinte formula: $Vc = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$, onde $f(x) = -x + R$, logo:

$$Vc = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

$$Vc = 2\pi \int_{-R}^{R} x(-x + R)dx$$

$$Vc = 2\pi \int_{-R}^{R} -x^2 + xrdx$$

$$Vc = 2\pi \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 r}{2}\right]_{-R}^{R}$$

$$Vc = 2\pi \left[\frac{-2R^3 + 3(-R)^2 R}{6}\right]$$

$$Vc = 2\pi \left[\frac{-2R^3 + 3(-R)^2 R}{6}\right]$$

$$Vc = 2\pi \left[\frac{-2R^3 + 3(-R)^2 R}{6}\right]$$

$$Vc = 2\pi \left[\frac{R^3}{6}\right]$$

$$Volume\ do\ cone = \frac{\pi R^3}{3}$$

Pelo teorema: "*Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao circulo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera*". E comparando o volume da esfera definido anteriormente temos que:

$$Volume\ da\ esfera = 4\ .Volume\ do\ cone$$

$$Volume\ da\ esfera = 4\ .\frac{\pi R^3}{3}$$

Conclusão

Este trabalho buscou mostrar uma análise pela via histórica interna da matemática, ou seja, não consideramos contextos sociais ou biografias. Apresentamos o conceito como algo que aparece em alguns momentos da história e que é em determinado momento formalizado para esta ciência e também de forma didática, ou seja, este desenvolvimento não ocorre de forma seqüenciada e sim a sequencia hoje vista na matemática foi produzida ao longo do seu desenvolvimento, porém, *a posteriori* da gênese de determinados conteúdos, sendo que muitos deles é praticamente impossível saber onde e como nasceram. Acreditamos que deve haver uma variedade de situações históricas que demonstram a apresentação de determinado conceito, objeto ou conteúdo, o que também não deixa de ser uma visão que só temos devido aos conhecimentos que já possuímos.

Nossa proposta não busca somente uma visão mais ampla da história, tanto que entendemos que estamos usando somente exemplos, neste caso o exemplo da *esfera* a partir de dois estudos realizados na história (Cavalieri e Arquimedes), aplicados no Cálculo Diferencial e Integral.

Consideramos que um entendimento de Cálculo Diferencial e Integral para compreender matematicamente a *esfera* ajuda a obter uma compreensão de uma forma mais ampla e a partir dos estudos sobre ela, se tem uma possibilidade de acesso as noções de cálculo infinitesimal, como demonstramos a partir dos estudos de Arquimedes e do Princípio de Cavalieri. Não incorremos no risco de dizer que eles iniciaram os estudos sobre estes tipos de cálculo, mas sua forma diferenciada colaborou neste sentido, até por que acreditamos que as noções de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes por toda a história, só necessitamos buscar, para assim ampliarmos o entendimento sobre este assunto e desta forma colaborar no ensino desta assunto.

Bibliografia e referências

Bachelard, G. (1996). A formação do espírito científico: contribuições para a psicanálise do conhecimento. Tradução: Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto.

Brolezzi, A. C. (2004) . Epistemologia e História da Matemáticas: anotações para uma História às Avessas. Apresentação de Trabalho/Seminário. Recuperado em: http://www.nilsonjosemachado.net/20070316.pdf.

Guidorizzi, H. L. (2001). Um curso de Cálculo. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC.

Miguel, A. e Miorim, M. A. (2008). História na Educação Matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Miguel, A. (2005). Contribuição crítica à discussão acerca da participação da história e da epistemologia da matemática na investigação em educação matemática. Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 71-107, jan./jun.