XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación

Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
javo@une.net.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
cama@matematicas.udea.edu.co
Pedro Vicente **Esteban** Duarte
Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad Eafit
pesteban@eafit.edu.co
Colombia

Resumen

El presente artículo es producto de una investigación en la cual, a través del estudio de casos, se usó la teoría de Pirie y Kieren para indagar por la manera cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la noción de tasa de variación. De manera particular, este artículo presenta algunos elementos asociados a la evolución de la comprensión de dicha noción en los tres primeros estratos. Finalmente, se discute sobre la imposibilidad de determinar de manera "absoluta" las nociones y procedimientos asociados al *Primitive Knowing* y cómo, en el proceso de evolución de la comprensión de la tasa de variación, emergen ciertas nociones "incompletas" que requieren ser abordados y refinados.

Palabras clave: comprensión matemática, teoría de Pirie y Kieren, tasa de variación, proporcionalidad, *folding back*

1. La noción de tasa de variación en el estudio del concepto de derivada

La tasa de variación o razón de cambio ha sido un concepto que ha llamado la atención de diversos investigadores, en parte, porque se encuentra en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático; por ejemplo: la derivada (Cantoral, 2004; Dolores C. , 2007) y el concepto de función (Posada y Villa, 2006). Por otro lado, Tall (2009) resalta la importancia de abordar el estudio de conceptos del análisis matemático haciendo énfasis en los procesos dinámicos que subyacen a ellos, por ejemplo, las funciones y la derivada en relación con la variación y tasa de variación respectivamente.

La literatura internacional sobre el tema en mención, reporta que muchas de las dificultades asociadas al estudio de conceptos, como el de derivada, radica en una débil comprensión de los procesos de variación que subyacen a ellos; es así como Dolores (2007) señala que:

> La enseñanza del cálculo diferencial (CD) en el nivel medio superior, en muchos países enfrenta un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas […] son coincidentes, al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales de variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto (p.I).

Así mismo, otros investigadores reportan que el concepto de derivada está influenciado por el contexto en el cual se desarrolla su estudio; por ejemplo, la investigación Bingolbali, Monaghan, y Roper (2007) sugirió que los estudiantes de un curso de ingeniería mecánica conciben la derivada como una razón de cambio y ven las matemáticas como una herramienta, por tanto prefieren los aspectos de aplicación de conceptos como la derivada; en contraste con esto, el estudio establece que los estudiantes de Matemáticas se muestran proclives a su interpretación como tangentes.

Las causas por las cuales los estudiantes no alcanzan a comprender los aspectos variacionales asociadas a la derivada son de diversa índole. Por ejemplo, Çetin (2009) señala que en los cursos de cálculo, con frecuencia se favorece la manipulación de representaciones algebraicas para enseñar reglas que permitan esbozar la gráfica de una función; en ese sentido para este autor, mientras los estudiantes calculan la derivada de una función por medio de una expresión algebraica con la ayuda de las reglas de derivación, no alcanzan a hacerse conscientes de la importancia de interpretar la derivada como la tasa de variación instántanea de una función.

Por su parte Zandieh (2000) propuso un marco teórico para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre la derivada; con dicho marco, Zandieh discute y analiza sistemáticamente las preguntas relativas a la comprensión individual, su comparación con otras comprensiones, las estrategias de enseñanza, la efectividad de las prácticas pedagógicas y la evaluación de los materiales curriculares. En su trabajo, esta investigadora resalta el papel de la tasa de variación media e instantanea como un componente importante para la comprensión de la derivada.

Con base en los múltiples aspectos que desde la literatura se reportan, se desarrolló una investigación en la cual se indagó por el proceso de comprensión de la tasa de variación[1] como una manera de aproximarse al concepto de derivada; para ello, se adoptó como marco teórico *la teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren*. Los aspectos generales de esta teoría se describen en el siguiente apartado.

[1] La investigación se desarrolló en el marco del programa de Doctorado en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia-Colombia.

2. La teoría de Pirie y Kieren

La teoría para la evolución de la comprensión de Pirie y Kieren tiene sus orígenes en un enfoque constructivista para la comprensión matemática. En su publicación de 1994, Pirie y Kieren reconocen que su pensamiento se vio estimulado por la teoría biológica de la cognición en los sistemas auto-referenciados de Maturana y Varela (1980, 1987) y de Tomm (1989); así mismo, afirman que su teoría pretende elaborar en detalle la definición constructivista de la comprensión como un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento personal tal y como fue presentado por von Glaserfeld en 1987.

Pirie y Kieren (1994) describen la comprensión como un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de una reorganización de las estructuras del conocimiento. La teoría de Pirie y Kieren se constituye en una herramienta que actúa como un lente a través del cual puede observarse la compresión matemática de un individuo o de un grupo individuos.

La teoría Pirie y Kieren considera que la comprensión matemática de un individuo particular en tópico matemático específico, evoluciona a través de ocho estratos potenciales, los cuales se modelan en el diagrama de la Ilustración 1.

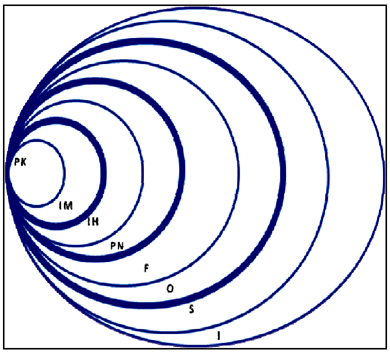


Ilustración 1. Representación diagramática de la Teoría de Pirie y Kieren.

El modelo representa los ocho estratos por medio de un conjunto de circunferencias con un punto en común. Cada círculo representa un estrato, el cual incluye los estratos precedentes y, a su vez, está incluido en los estratos subsecuentes. Estos estratos pretenden dar cuenta de las características *creciente e inacabada* de la comprensión matemática.

Para Pirie y Martin (2000), aunque este conjunto de circunferencias se muestra creciente hacia afuera, hacia estratos más abstractos y generales, la comprensión evoluciona de manera diferente; es decir, la evolución de la comprensión se produce mediante un movimiento continuo hacia atrás y adelante a través de niveles de conocimiento. Los caminos que pueden describirse para la evolución no son ni lineales ni unidireccionales.

Los estratos son denominados: Primitive Knowing (PK), Image Making (IM), Image Having (IH), Property Noticing (PN), Formalising (F), Observing (O), Structuring (S) e Inventising (I). Adicionalmente, la teoría de Pirie y Kieren presenta otras características, a saber: la fractalidad, los límites de falta de necesidad, el redoblando *(folding back)*, y la complementariedades de la acción y la expresión. Dado que el interés del presente artículo se centra en los tres primeros estratos, y en la característica del *folding back* se profundizará en estos aspectos y se sugiere al lector remitirse a los textos referenciados en la bibliografía para ampliar en las demás características de la teoría.

Estrato 1- PK. Conocimiento primitivo (Primitive Knowing)

El "conocimiento primitivo" hace referencia al conocimiento inicial, primordial o básico. Thom y Pirie (2006) afirman que con este término no se pretende transmitir ningún juicio en cuanto al nivel de sofisticación de las matemáticas o, de hecho, cualquier otro conocimiento que la persona posee. Este conocimiento está conformado por todo lo que una persona trae "en su mente" a la tarea actual; por ejemplo, sus experiencias en la situaciones reales, sus ideas y concepciones frente a la matemática y al concepto mismo. El adjetivo primitivo no significa que califica a este conocimiento como precario o en un nivel matemático bajo.

Estrato 2-IM. Construcción de la Imagen (Image Making)

Un primer momento en la evolución de la comprensión de un concepto se genera cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto (Thom y Pirie, 2006). Para Pirie y Kieren (1994) en este segundo estrato, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Thom y Pirie (2006) afirman que en este estrato se comienza la evolución de la comprensión al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física.

Estrato 3-IH. Comprensión de la Imagen (Image Having)

Pirie y Kieren (1992) afirman que las imágenes asociadas a una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera a las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. Para Pirie y Kieren estos objetos mentales han sido discutidos con los nombres de "concepto imagen", "marcos", "representación de estructuras de conocimiento" y "esquemas alternativos de los estudiantes". El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

Hasta este punto, los dos últimos estratos evocan el término "imagen" el cual, Pirie y Kieren (1994), usan para significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre algún tópico en particular, cualquier representación "mental", no necesariamente visual o pictórica. Esta teoría postula que, en la evolución de su comprensión matemática acerca de un tópico particular, un estudiante elabora, sostiene y extiende imágenes particulares.

Característica del Redoblado (folding back)

Pirie y Kieren (1992) afirman que cada uno de los ocho estadios de comprensión se encajan uno en el otro, pero siempre permitiendo un acceso a todos los estadios anteriores. Consideran la evolución de la comprensión de una persona con respecto a un tema, como un movimiento de avance y retorno entre actividades de los diferentes estadios. A este proceso de adelantar y retroceder los autores lo denominan *Folding Back* (*Redoblado).*

Para Pirie y Kieren (1991), el redoblado es una de las características más importantes de la teoría, ya que representa un aspecto dinámico y no monodireccional de la comprensión. Pirie y Kieren (1994) creen que cuando un estudiante se enfrenta con un problema, que no se puede solucionar de inmediato, éste puede necesitar volver a un estrato interno de comprensión, de este modo, el redoblado permite la reexaminación de la comprensión en un estrato de una forma mucho más enriquecida a la presentada cuando se trabajó inicialmente en ese estrato. Pirie y Martin (2000) agregan que el resultado de este *folding back* es que el individuo es capaz de extender su actual comprensión (inadecuada o incompleta) mediante reflexión y luego reorganizar sus construcciones iniciales del concepto, o incluso en caso que sean insuficientes, generar y crear nuevas imágenes para abordar el problema. Sin embargo, ahora la persona tiene un grado de auto-consciencia el cual ha sido informado por las operaciones del estrato externo. De esta manera, la actividad realizada sobre el estrato interno no es idéntica a la realizada inicialmente, sino que la persona, efectivamente, ha construido una comprensión más "fina" en el estrato interno para extender su comprensión en el estrato externo (Pirie y Martin, 2000).

Pirie y Kieren (1991, 1994) resaltan la importancia del *Redoblado* para promover la evolución de la comprensión; afirman que de esta forma, el avance se presenta doblando de nuevo hasta que repetidamente se reconstruya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona y, de esta manera, extienda la comprensión del estrato externo.

En su artículo Pirie y Martin (2000) ofrecen una mirada a uno de los aspectos del *folding back* al que ellos denominan *collecting*. Según estos investigadores el *collecting* ocurre cuando el estudiante sabe lo que necesita para solucionar un problema y que su comprensión es insuficiente para evocar ese conocimiento. El proceso de *folding back to collect* implica la recuperación de conocimientos previos para un propósito específico y volver a verlo o leerlo de nuevo a la luz de las necesidades de las actuales acciones matemáticas. De este modo, para Pirie y Martin (2000), el *collecting* no es simplemente un acto de evocación, sino que tiene el efecto de "engrosamiento" o "refinamiento" de la comprensión. Este *folding back to collect* es retomado nuevamente por Martin (2008) para proponer una extensión de la teoría de Pirie y Kieren.

3. El estudio

Conforme fue mencionado anteriormente, este estudio indaga por la manera cómo se desarrolla el proceso de compresión de la noción de tasa de variación. Responder a un *"cómo se desarrolla un proceso…"* demandó de los investigadores una inmersión detallada y profunda en el estudio del fenómeno de comprensión. De ese modo, se seleccionó el ***estudio de casos*** como método de investigación; ya que, en palabras de Goldenberd (2007), a través de una inmersión profunda y exhaustiva de un objeto delimitado el estudio de caso posibilita la penetración en la realidad social no necesariamente lograda con un análisis estadístico.

Para Yin (2009), aunque no existe una fórmula que permita elegir el estudio de casos como método en una investigación, si es cierto que dicha elección debe estar en coherencia con la(s) pregunta(s) de investigación. Este autor agrega que las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por el estudio de casos como método de investigación. Así mismo, Yin (2009) establece un estudio de caso como una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo, con profundidad en su contexto real de existencia; especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes.

En este estudio participaron cuatro estudiantes que se designaron con los seudónimos de Alexandra, Marcela, Estefanía y Cristina, las cuales estaban matriculadas en un programa de ingeniería en una universidad estatal. Las estudiantes fueron seleccionadas entre un grupo de 37 estudiantes de un curso de pre-cálculo atendiendo a que, durante el desarrollo del curso ellas habían evidenciado interés, motivación y mayor grado de continuidad en su proceso educativo. Adicionalmente estas cuatro estudiantes mostraron actitudes favorables para la participación en las actividades de clase y habilidades para comunicar de manera oral y escrita sus diversas inquietudes y avances en sus comprensión, lo cual está en coherencia con los planteamientos de la Teoría de Pirie y Kieren, para quienes una interpretación de la comprensión matemática sólo es posible a través de las diferentes manifestaciones externas que los estudiantes puedan evidenciar.

Las fuentes que se usaron para la obtención de la información fueron: *la observación-participante*, *documentos, cuestionarios y entrevistas.* Dichas fuentes estuvieron presentes en dos fases: en la primera ellas se hizo un reconocimiento de las diversas características del contexto; y en la segunda fase, se determinaron las diferentes maneras en que las estudiantes consiguieron aproximarse a la comprensión de la tasa de variación; en esta segunda fase se incorporó un conjunto de cuatro situaciones, a saber: Triángulo inscrito, la velocidad y la aceleración, la descarga de un archivo, y análisis de la función tasa de variación.

Paralelamente a la recolección de los datos, se hizo un primer acercamiento a ellos. Este tipo de análisis ha sido sugerido por Creswell (2008) y, para el caso de esta investigación, permitió obtener un “sentido general” de la información y ofreció ciertos lineamientos en la estructuración de las actividades que continuarían en la intervención. Al finalizar el proceso de recolección de los datos, se continuó con el proceso de organización y clasificación de la información; los diarios de campo y los documentos fueron duplicados y digitalizados, las entrevistas transcritas y los videos fueron analizados por el equipo de investigación, generando una matriz de códigos asociados a los diferentes aspectos de la teoría de Pirie y Kieren. El paso a seguir consistió en generar un conjunto de categorías individuales en los cuales se daba cuenta de los elementos de la comprensión de cada una de las estudiantes teniendo en cuenta *los niveles de comprensión*, *los elementos involucrados en la evolución de la comprensión*, y *la relación con otros conceptos matemáticos*; posteriormente se hizo una categorización de segundo orden por medio de la triangulación de los elementos que surgieron en la categorización individual. Finalmente, se escribieron y se discutieron los resultados con el colectivo de investigación.

Conforme fue presentado anteriormente, el presente artículo se centra en los elementos que describen la evolución de la comprensión de la tasa de variación en los tres primeros niveles, particularmente se discute cómo en dicha evolución aparecen nociones “incompletas” de otras nociones relativas a la proporcionalidad.

4. Elementos que influyen en la comprensión de la tasa de variación

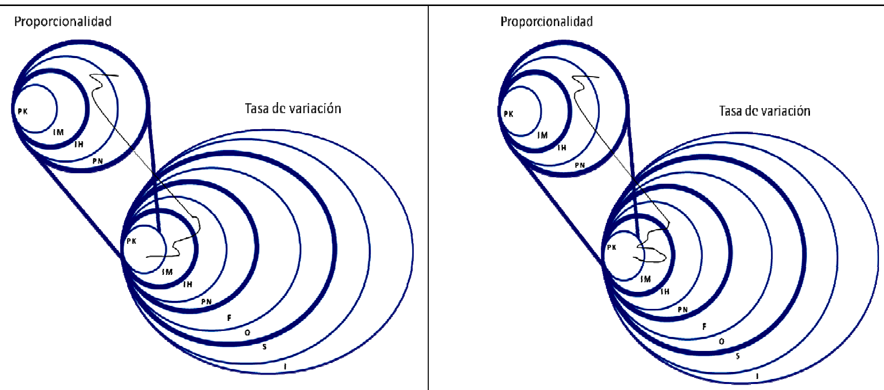
Conforme fue presentado en el marco teórico, la Teoría de Pirie y Kieren sugiere que el proceso de comprensión de un tópico o concepto matemático debe tener en cuenta el conjunto de nociones, procedimientos y herramientas los cuales se convierte en el punto de partida de la comprensión. Para el presente estudio, se inició el proceso investigativo una vez las estudiantes habían abordado, junto a los demás compañeros del curso, las temáticas de proporcionalidad y funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Así mismo, otras temáticas fueron abordadas como por ejemplo: operaciones con polinomios, expresiones racionales, potenciación radicación, ecuaciones, y fracciones parciales.

El desempeño de las estudiantes en estos contenidos había sido sobresaliente para dos de ellas, mientras que para las otras dos había alcanzado un nivel satisfactorio. Adicionalmente, en el inicio del trabajo de campo se desarrolló un cuestionario que incluía cinco situaciones en las cuales la tasa de variación podría reconocerse en ambientes gráfico, algebraico o tabular. Con base en la confrontación entre los documentos producidos por las estudiantes y una discusión grupal, se pudo determinar algunos elementos que hicieron parte del *Primitive Knowing* de las estudiantes. Dichos elementos se presentan a continuación:

- Reconocimiento e interpretación de la tasa de variación constante, situaciones contextualizadas, así mismo en funciones representadas gráfica, tabular y algebraicamente.
- Reconocimiento de la dependencia entre cantidades de magnitud.
- Buen desempeño algebraico.
- Reconocimiento gráfico de funciones no lineales.
- Reconocimiento de la tasa de variación media en contextos donde se interpreta como velocidad; así mismo, cuando se presenta en una representación tabular.

En el desarrollo de las actividades pudo observarse cómo la comprensión de la tasa de variación evolucionó en los estratos iniciales de manera diferente en cada estudiante. En la ilustración 2 se usa el diagrama de la teoría para describir la manera en la que la comprensión de las estudiantes evolucionó del *Primitive Knowing* hasta el *Image Having* y su posterior *folding back* hacia su *Primitive Knowing* en conceptos de la proporcionalidad.

En este proceso inicial de comprensión, las estudiantes construyeron imágenes para la tasa de variación como: *cociente (IM)*, *comparación de dos estados (IH) y razón (IH)*.



Estefanía | Alexandra

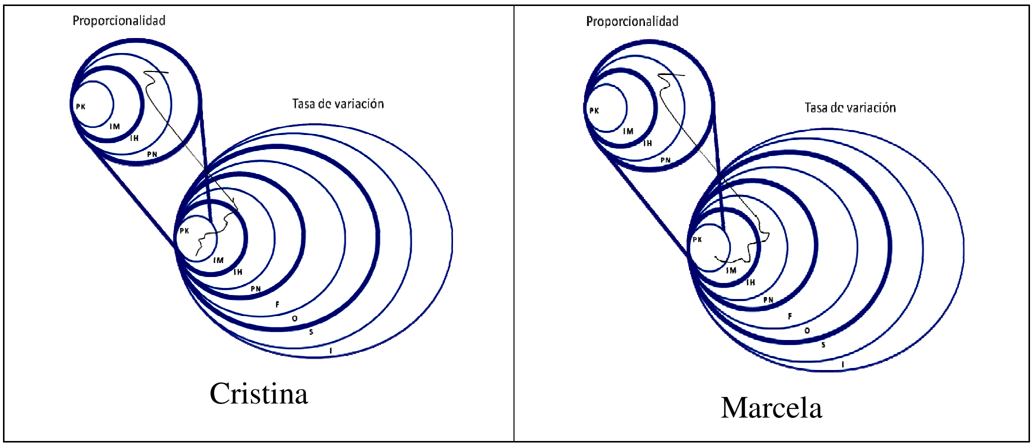


Ilustración 2. Evolución de la comprensión en los niveles iniciales

Como se mencionó anteriormente, el reconocimiento de la tasa de variación constante, para el caso de las funciones lineales, fue un elemento clave que se identificaba en diferentes formas de representación. Sin embargo, ese no fue el caso de funciones en las cuales la tasa de variación no era constante; ante este hecho, se desarrolló con las estudiantes un procedimiento con el que se pudo analizar discretamente los cambios de la tasa de variación media de la gráfica (**Ilustración 3**).

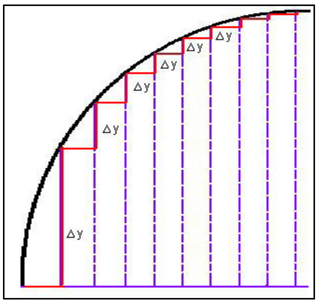


Ilustración 3. Mecanismo para el análisis discreto de la variación

En una sesión de trabajo posterior, las estudiantes se comprometieron con el desarrollo de una situación "Rectángulo Inscrito" diseñada en el software GeoGebra. En la situación, se presenta un rectágulo inscrito en un cuadrado y cuya área varía con respecto al movimiento del punto E (ver Ilustración 4). En el primer momento de la situación, las estudiantes hicieron un reconocimiento de las variables y observaron una correlación entre ellas.

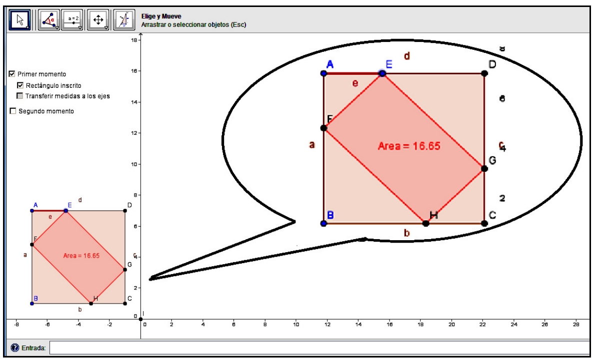


Ilustración 4. Momento 1 de la situación "Rectángulo inscrito"

Las estudiantes rápidamente observaron que el área del rectángulo dependía del valor del segmento AE. Al indagar por las características de tal dependencia, se dio el siguiente diálogo:

Investigador : *¿Cómo es esa dependencia?*[hubo un momento de silencio y algunos gestos que indicaron que las estudiantes no habían comprendido la pregunta], *Pues…, ¿cómo cambian estas dos cantidades?*

Alexandra : *Cuando el segmento aumenta, el área aumenta*

Investigador : *¿Siempre aumenta?*

Alexandra : *Siiii,¿nooo?* [el tono de la voz reflejaba duda]

Cristina : *No, sólo hasta la mitad*

Investigador : *Y ¿qué pasa en la mitad?*

Cristina : *Baja de nuevo*

Investigador : *Entonces, ¿cómo es el comportamiento de esas dos cantidades?*

Alexandra : *Directa e inversamente proporcional* [con una de sus manos realiza un gesto de cómo sería la gráfica, representado una especie de "V" invertida]

Investigador : *¿Están seguras?*

Se observa en el diálogo que, a pesar de haber construido el "procedimiento de triángulos" para analizar el comportamiento de la tasa de variación en los casos de funciones no lineales, la nociones de proporcionalidad directa e inversa siguen emergiendo, como una manera describir la correlación directa o inversa entre cantidades.

Ante esta pregunta hubo un momento de silencio, ninguna de las estudiantes se atrevió confirmar lo que decía Alexandra, pues la pregunta del profesor parecía informar que algo de lo que dicha estudiante había dicho no era cierto. Ante esta situación, el investigador propuso a las estudiantes, activar la opción *"transferir medidas a los ejes"* la cual representa sobre eje de las abscisas la medida del segmento AE, en las ordenadas el área y el punto L es el punto de coordenadas de estos dos valores el cual deja "rastro" a medida que se desplaza el punto E (Ver Ilustración 5)

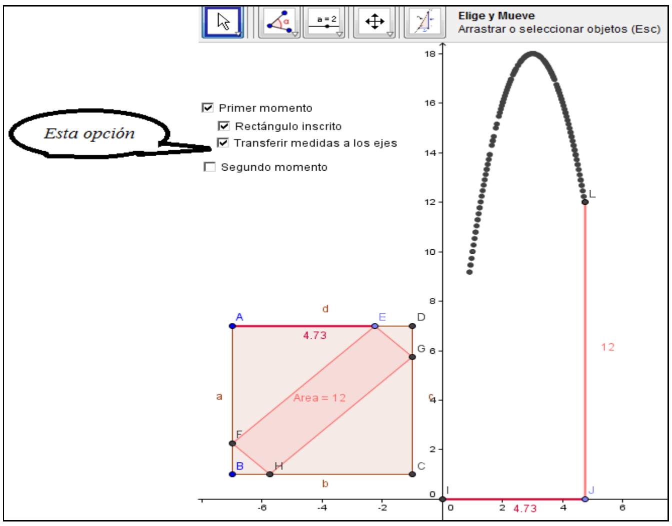


Ilustración 5. Transferencia de medidas a los ejes en la situación 1

En el momento en que las estudiantes observan la secuencia de puntos obtenida por el rastro del punto L, de inmediato tanto Alexandra como Marcela afirman "*una cuadrática*" ante esta afirmación el investigador solicita argumentos del porqué de una función cuadrática, para lo cual Cristina se apoya en la forma de la gráfica y Marcela en el hecho que la gráfica representa la función área y que como tal, debe ser una cuadrática. Ante ello, el investigador sugiere el reconocimiento de las variables y les solicita usen el rectángulo para determinar la expresión algebraica del área. Nociones del teorema de Pitágoras, variables, área, entre otros; surgieron sin ningún tipo de inconveniente para determinar que la expresión del área está dada por la expresión $A(x) = 2x(6 - x)$.

Una vez confirmado que la función correspondía a una cuadrática, el investigador retoma la discusión sobre la proporcionalidad, generándose el siguiente diálogo:

Investigador : *Entonces,¿sí es directamente proporcional?*
Marcela : *No,*
Investigador : *¿Por qué?*

Simultáneamente responden Marcela y Alexandra

Marcela : *Porque no es lineal*
Alexandra : *Porque es cuadrática*
Investigador : *Entonces ¿cómo analizamos la tasa de variación?*
Alexandra : *Con los triangulitos de la última vez* [refiriéndose al procedimiento descrito en la sesión anterior]

Según lo descrito anteriormente, las estudiantes a pesar de encontrarse en el estrato 3 (IH) evocaron de nuevo algunos elementos del estrato 1(*Primitive Knowing*). En el caso de Alexandra, estos elementos surgen como manifestación de un aprendizaje "arraigado" que la estudiante tiene de la proporcionalidad, en el cual ha sobre-generalizado (extendido) a campos en el cual no es aplicable; dichos elementos se continuaron presentando en otras situaciones posteriormente. En el caso de Marcela, Estefanía y Cristina estos elementos de proporcionalidad fueron inducidos por las verbalizaciones de Alexandra. Este aspecto de "volver" a un estrato precedente es equiparable con la característica del *folding back* de la teoría de Pirie y Kieren, el cual se observa de manera diferente entre las estudiantes; para el caso de Marcela, Cristina y Estefanía, fue un *folding back no intencional producida por un colega* (Martin, 2008), pero en el caso de Alexandra, el *folding back* fue producido por *ella misma* (Martin, 2008) provocado a su vez por una imagen previa que la estudiante posee de la proporcionalidad en la cual sólo tiene en cuenta las correlaciones entre las cantidades y no las características de producto o razón constante.

Otro aspecto que emergió en la comprensión de la tasa de variación también está asociado con una comprensión "incompleta" de los elementos de la proporcionalidad. Con el ánimo de promover la identificación de algunas regularidades para el comportamiento de la tasa de variación, el investigador propuso a las estudiantes comenzar a calcular tasa de variación en intervalos cercanos a $x=2$. Generándose así el siguiente diálogo:

Investigador : *¿Cuál es la tasa de variación entre 1 y 2?*
Estudiantes : *Seis*
Investigador : *¿Y entre 1,5 y 2?*
Estudiantes : *Cinco*
Investigador : *Ok, entonces sin usar la herramienta del GeoGebra, ¿cuál sería la tasa de variación entre 1 y 1,5?*
Cristina, Estefanía y Alexandra : *Uno*
Investigador : *¿Por qué uno?*
Alexandra : *Porque entre uno y dos fue seis, ahora entre uno con cinco y dos es cinco,*

o sea que en el anterior debe ser uno… ¿no?
Investigador : *Verifíquenlo en el software*

Las estudiantes verificaron en el software y encontraron que ese valor era siete. Con sorpresa, las estudiantes evocaron su conocimiento de la proporcionalidad en busca de una justificación para este hecho; pero no consiguieron encontrarlo. Este episodio pone en evidencia que las experiencias que las estudiantes tuvieron en el aprendizaje de la proporcionalidad, no fueron suficientes para desvirtuar algunos aspectos del razonamiento aditivo que parecía prevalecer sobre su compresión de estos tópicos.

5. Discusión y conclusiones

A través de esta investigación se pudo apreciar que, como observadores e investigadores, no fue posible determinar de manera absoluta el *Primitive Knowing* de nuestros estudiantes, y, tal como lo afirman Thom y Pirie (2006), es posible construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través unas acciones físicas, verbales o escritas. Los datos presentados en este documento dan cuenta que, aunque los estudiantes han estudiado algunos conceptos previamente, no siempre alcanzan a comprender todos los aspectos involucrados en ellos. De esa manera, aspectos "incompletos" o "imprecisos" van emergiendo en la comprensión de otros conceptos relacionados con los primeros.

En el caso de esta investigación, se observó cómo en la comprensión de la tasa de variación se involucran nociones como: variable, funciones, límites, proporcionalidad, entre otros; y, como se muestra en este artículo, algunas nociones "imprecisas" de la proporcionalidad emergen y de manera reiterada a pesar de haber sido estudiadas y creerse "superadas" previamente. Este tipo de aspectos emergentes plantean la necesidad de profundizar en los aspectos didácticos que podrían ocasionar dicho surgimiento reiterado, así como las posibles maneras de abordarlas y modificarlas.

El caso de Alexandra evidencia que existen estudiantes en los cuales hay aspectos "arraigados" y que se muestran como producto de una sobre-generalización de las propiedades de la proporcionalidad. Así mismo, tales aspectos se evidencian como un acto de *folding back* y que necesitan en ocasiones ser abordados y refinados para posibilitar la evolución de la comprensión. Estos elementos, confirman una vez más los planteamientos que Cavey y Berenson (2005) puntualizan acerca de la naturaleza compleja del proceso del *folding back* señalando que no todos los actos de redoblado son necesariamente efectivos para la extensión de la comprensión matemática, y que, por tanto, la efectividad del redoblado depende tanto de la estructura del contexto como del aprendiz.

Cabe anotar que el "procedimiento de triángulos" para estudiar el comportamiento de la noción de tasa de variación se desarrolló en un ambiente gráfico y respondiendo a la necesidad de describir algunas características de esta noción en funciones no lineales. En el caso de los episodios descritos anteriormente, tanto Alexandra como sus compañeras estaban estudiando algunos comportamientos presentados entre cantidades de una situación de movimiento particular (sin gráficos), y sólo hasta cuando el software sugirió un ambiente gráfico (no lineal), Alexandra consiguió evocar nuevamente dicho "procedimiento de triángulos" y revertir sus argumentos a favor de la proporcionalidad. Estos elementos sugieren profundizar en la discusión de cómo la comprensión matemática requiere de la coordinación de diferentes representaciones y, a su vez, en el papel de la visualización proporcionada por los software educativos como elementos mediadores en la evolución de dicha comprensión.

6. Bibliografía

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivate and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Techology , 38* (6), 763-777.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17*, págs. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Cavey, L., & Berenson, S. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior* (24), 171–190.

Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *PRIMUS , 19* (3), 232-244.

Creswell, J. W. (2008). *Educational Research. Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* New Jersey: Pearson, Prentice Hall.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Goldenberd, M. (2007). *A arte de pesquisar.Como fazer pesquisa qualitativa en Ciências Sociais.* Rio de Janeiro: Record.

Martin, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior , 27*, 64-85.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1992). Creating constructivist enviroments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics , 23* (5), 505-528.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1991). Foldind Back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 15)*, *3*, pp. 169-176. Assisi.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics , 26* (2/3), 165-190.

Pirie, S., & Martin, L. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal , 12* (2), 127-146.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. J. Schoenfeld, & J. Kaput (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS* (Vol. 8, págs. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.