LAS CREENCIAS DE LOS PROFESORES DE CALCULO. EL CASO DE LA DERIVADA Y SUS SIGNIFICADOS.

Miguel **Díaz** Chávez

Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México

Universidad Pedagógica Nacional. Unidad 151.

mdiaz310@gmail.com

Antonio **Rivera** Figueroa

Cinvestav

arivera@cinvestav.mx

RESUMEN

En este reporte documentamos las creencias que tiene el profesor de cálculo en México respecto a los significados de la derivada. Para su exploración diseñamos un cuestionario con problemas no rutinarios uno relacionada con el llenado de recipientes y otro relacionado con el análisis de funciones. Los argumentos nos permitieron categorizar sus creencias, determinar su fortaleza, coherencia y relaciones que individualmente establecen, las cuales internamente forman sistemas individuales a los que llamamos Sistemas de Creencias internamente coherentes (SCIC).

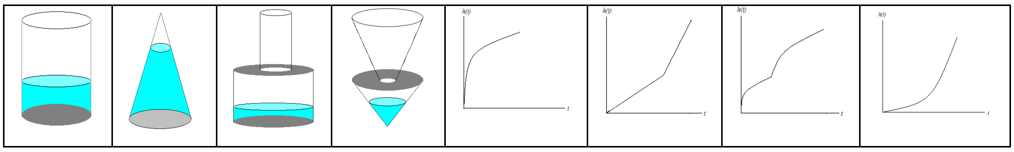
Palabras clave: Creencias, derivada, significados, profesores

INTRODUCCION

Uno de los problemas más graves que enfrenta la enseñanza del cálculo en México es la fuerte carga operativa (De la Peña, 2002). Esto margina la disertación de las ideas, contribuye muy poco a la construcción, a la comprensión del significado y deteriora la parte conceptual (Schoenfeld, 1985); particularmente sobre la derivada, concepto polisémico la comprensión es más complicada, ya que no es lo mismo aprender las técnicas de derivación, entender por qué una función es o no diferenciable o, entender sus significados. Esto no quiere decir que la enseñanza del cálculo en el bachillerato debe conducirse hacia una presentación rigurosa que desplace los significados, no. Pero la dirección depende del profesor, finalmente es él quien selecciona los temas de enseñanza y toma decisiones sobre la organización de la misma influido por sus creencias, concepciones y actitudes (Wilson & Cooney, 2002; Philipp, 2007; Sivunen & Pehkonen, 2009). Pero, ¿El profesor entiende y distingue entre la parte cualitativa, conceptual y el manejo de las ideas? ¿Cuáles son las creencias del profesor sobre esas ideas? La investigación al respecto, en el terreno del cálculo es muy poca (Moreno y Azcárate, 2003; García, *et.al.* 2006; Hähkiöniemi, 2006;). Explorar las creencias de los profesores tiene un gran potencial ya que informan acerca de su práctica. Su identificación, señalan MaaB & Schlöglmann (2009) en relación a los conceptos centrales de la matemática escolar permitiría cambiar y mejorar la enseñanza en las escuelas. Éste es el racionale de nuestra investigación que tiene como objetivo: Describir e interpretar las creencias del profesor de cálculo de bachillerato y las relaciones que establece entre ellas, sobre los significados de la derivada. Las preguntas que la orientan son: ¿Comprende el profesor de cálculo los significados de la derivada? ¿Percibe que ésta permite estudiar la razón de cambio instantánea? ¿Tiene claro el carácter puntual de la derivada?

METODOLOGIA, CUESTIONARIO Y PARTICIPANTES

La investigación es de corte cualitativo y por las unidades de análisis es un estudio de casos múltiples. Considerando los procedimientos elegimos la encuesta por ser altamente confiable. El instrumento que utilizamos fue un cuestionario cuyo diseño responde a la advertencia de Tirosh (2009) en el sentido de que el diseño de los instrumentos o herramientas de investigación confiables es uno de los retos que enfrenta la investigación en educación matemática en general. Además provocamos el diálogo entre pares, considerando que éste demanda de los interlocutores pruebas y refutaciones sobre sus argumentos (Lakatos, 10986). Este nos permitió probar la efectividad de la intervención en la creación, modificación y eliminación de las creencias en uno de los profesores. El cuestionario contiene dos problemas no rutinarios. El primero pide relacionar depósitos cilíndricos, cónicos o combinados (diecisiete) en los que se vierte agua a razón constante con gráficas que muestran cómo varía la altura que alcanza el agua en función del tiempo.



El segundo pide obtener la derivada de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0 \le x \le 1 \\ -\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 & 1<x \le \frac{13}{6} \\ 2x-\frac{7}{3} & \frac{13}{6}<x \le 4 \end{cases}$$

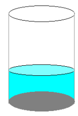
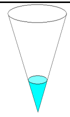
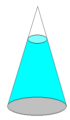
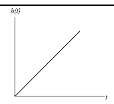
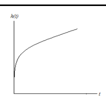
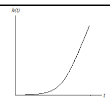
Este tipo de funciones modelan el llenado de recipientes combinados que se ensamblan con distinto radio y han sido utilizadas en otros estudios (Hirst, 1972; Hohensee, 2006). Los participantes fueron doce profesores que pertenecen a tres comunidades de enseñanza, cuatro ingenieros formados en un Instituto Politécnico, cuatro ingenieros formados en Universidades Públicas y cuatro profesores normalistas. En México no existe ninguna institución dedicado a la formación de profesores para la enseñanza de la matemática en el bachillerato. En cuanto a la experiencia en la conducción del curso de cálculo Roldán, Buendía, González, López y Camacho tienen mucha experiencia. Zedillo, Rosas, Matías y Zavala tienen mediana. En tanto Gutiérrez, Montoya y Elizarrás tienen escasa o nula.

MARCO TEORICO

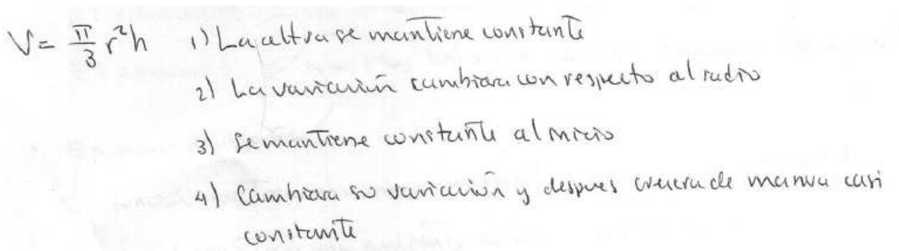
En este marco asumimos por principio de cuentas que las creencias existen en el sujeto y mantienen relaciones que dan lugar a un sistema, lógico para el portador (coherencia interna) y probablemente "ilógico para el investigador" (inconsistencia); la razón de ello es que las creencias por su gran carga psicológica desplaza a la "lógica". En este sentido tomamos las dimensiones de la metáfora de Green (1971) sobre las creencias: *fortaleza* (centrales o no centrales periféricas), *relaciones quasilógicas* (básicas o no básicas) y *agrupación en clusters*, y la teoría sobre coherencia de Thagard (2000) como referentes teóricos para describir, interpretar y entender éstos sistemas en lo individual y en las comunidades.

RESULTADOS

Pensando en que los profesores tienen formación matemática distinta uno puede plantear la hipótesis que las diferencias en las creencias serían significativas, la realidad muestra lo contrario. En relación al primer problema la generalidad tiene una buena percepción del fenómeno.

Una variable (forma)					
					

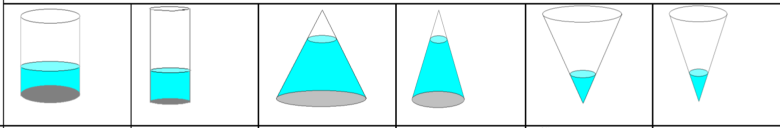
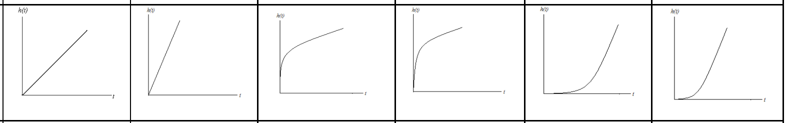
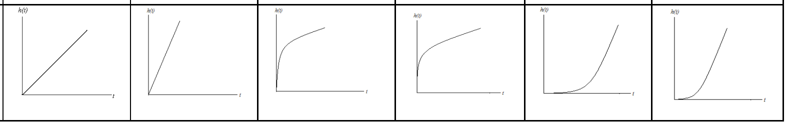
Todos asocian correctamente recipiente cilíndrico-recta y recipiente cónico-curva, en este último no todos. La mayoría utiliza argumentos visuales o geométricos como Rosas



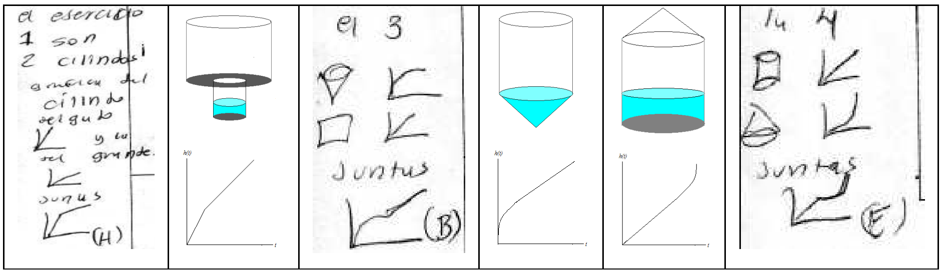
Físicos como López quien habla de rapidez y velocidad:

López: Primero que nada se considero que las gráficas tienen dos ejes *t* y *h(t)*, es decir, *t=tiempo; h(t)=velocidad o rapidez de llenado*. Para el primer ejercicio se aprecia que como la figura es un cilindro es constante la velocidad y el tiempo de forma igual por lo que se presenta la función de una recta, que es la respuesta C. En el ejercicio dos es un cono donde la base está en la parte superior, por lo que la rapidez en un inicio es bastante alta, conforme va pasando el tiempo la velocidad del llenado se hace lenta y la gráfica que se apega a esta es la opción A. En el ejercicio tres es un cono donde inicia a llenarse la parte de la base (ancha) por lo que el llenado es lento y conforme pasa el tiempo se llena más rápido porque el recipiente se hace más angosto, respuesta B.

Para cuando se cambia el radio de los recipientes sus respuestas muestran el avance en la ruta cognitiva, perciben la relación directa que existe entre la inclinación de la recta y la variación en el radio, establecen la relación funcional pendiente de la recta-radio de la base, una función de la forma $f(t)=f'(t)t$. Para el caso de los recipientes cónicos, todos los profesores excepto Zavala, Rosas y Elizarrás establecen asociaciones incorrectas.

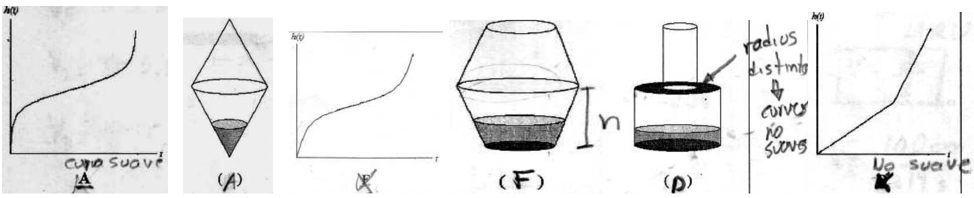
	Dos variables (forma y radio)
	
Zavala	
Rosas y Elizarrás	

Los tres identifican la curva como la gráfica que modela pero no logran asociar la concavidad correspondiente. En particular en los conos asentados sobre su vértice Zavala tampoco percibe la rapidez con la que varía la altura en los recipientes cuando *t→0*. Para la tercera actividad, en el caso de recipientes cilíndricos ensamblados todos los profesores establecen la asociación correcta y coherente recipiente-línea quebrada, inclusive cuando estos se componen de una sección cónica, recipiente-curva suave. Para López representó la síntesis de las dos actividades anteriores.



El siguiente dialogo muestra el cambio de las creencias respecto a lo que es una curva suave a partir de la solución de esta tarea

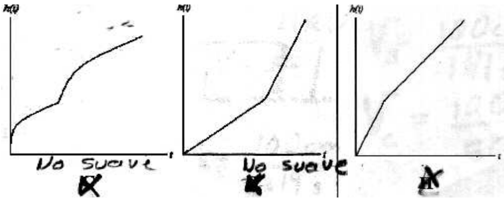
Gaby: Pero ahora en éstas, o sea por ejemplo aquí da curva suave porque esta base es igual a la otra, y aquí también y aquí también (señalando algunas gráficas correspondientes a los recipientes que se unen con el mismo radio).



Gaby: Entonces donde cambia la forma donde se unen. Digamos este cilindro flaquito y esta parte grande, la curva ya no es suave

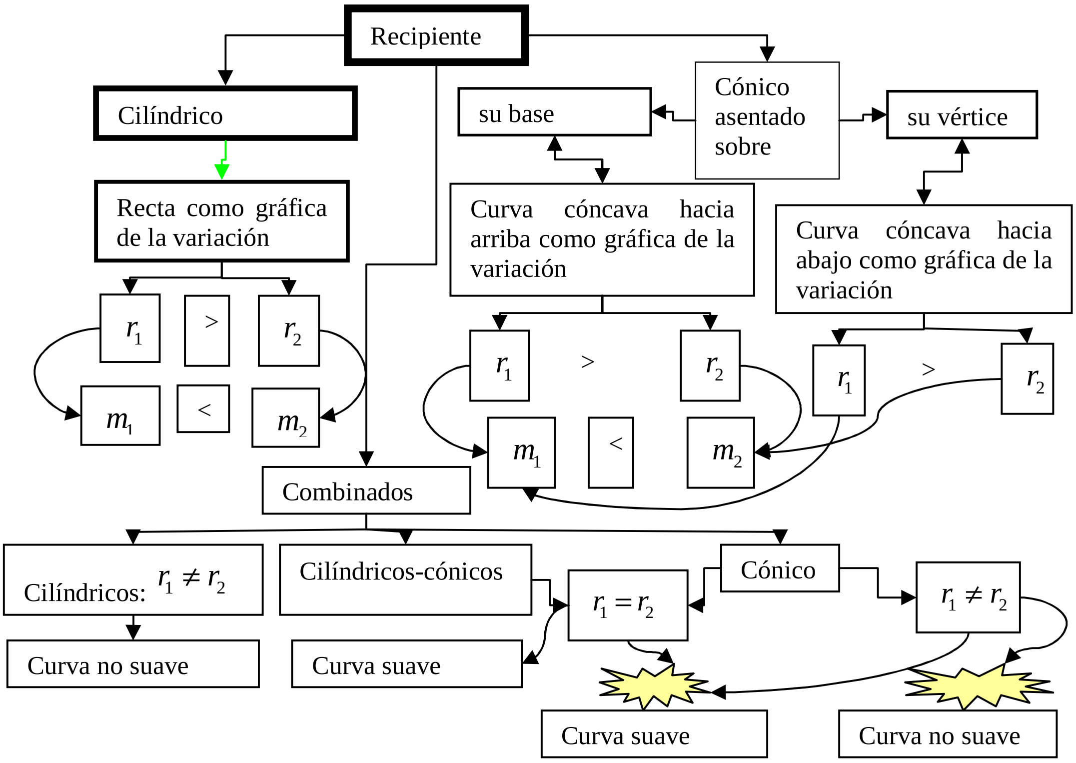
Roldán: Y esta no, es la curva que no es suave…

Gaby: O sea, la C, la D y la H, mmmm



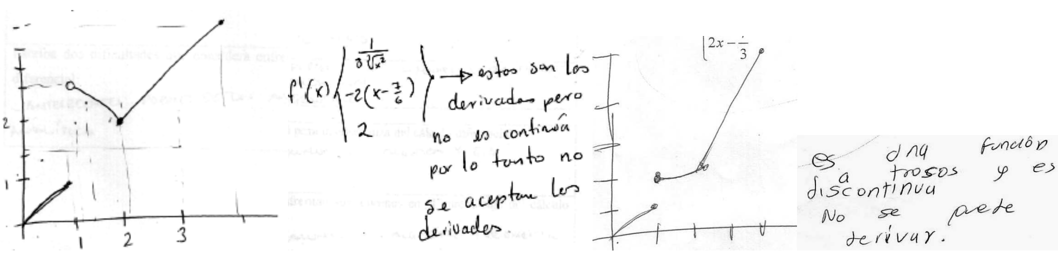
Roldán: Pues físicamente no son suaves en donde se unen son de áreas distintas

El siguiente cuadro muestra la red de conceptos.

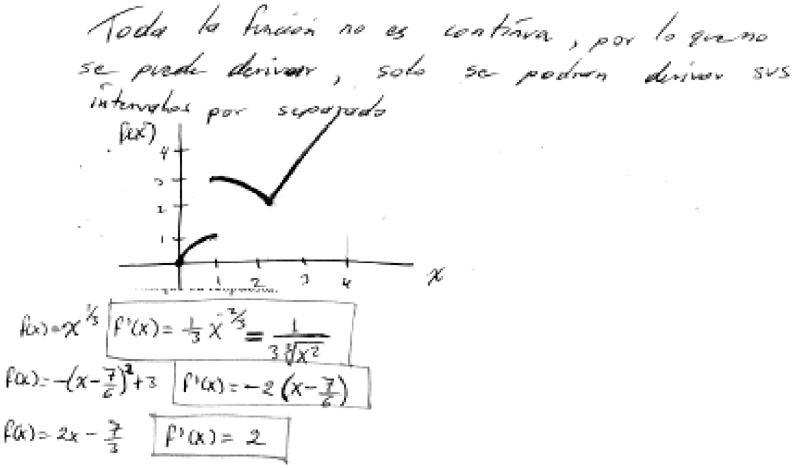


Redes de creencias en el problema de asociación recipiente- gráfica.

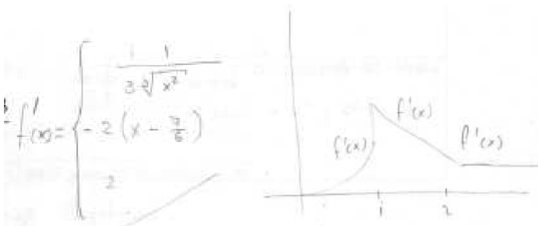
En la tarea de calcular la derivada de la función definida por piezas la mayoría aunque percibe las características singulares en cuanto a la continuidad de la función y su relación con la diferenciabilidad de la misma, obtienen fórmulas a partir de las fórmulas con las que está definida la función mediante el uso de las técnicas de derivación, desdeñando lo que la visibilidad de la gráfica les proporciona. Buendía y López dibujan, derivan y desaparecen los intervalos de definición.



Cedillo se aproxima un poco a un razonamiento correcto pero hace lo mismo:



Otros como Montoya aplican las reglas de derivación y bosquejan inclusive la "derivada de la función"



Así la tarea de obtener la derivada se reduce a obtener otras fórmulas a partir de las fórmulas que definen la función. Esta es una creencia muy fuerte. El diálogo de Roldán muestra también esta creencia fuerte pero mediante el dialogo, llega a la relación continuidad-suavidad de la curva-diferenciabilidad

Roldán: Pero los criterios de que sea derivable una función es que…sea continua ¿no? Es el primer criterio ¿no? Este…¿Por el límite o? …(silencio) Como en mis clases nunca llego a éstas…de mis clases de la universidad yo no recuerdo escalona…este, por partes. Yo no recuerdo funciones por partes, porque los maestros yo creo que eran tramposos, no recuerdo que me hayan puesto una por partes; entonces este…debe de ser continua…

Guía: No sé.

Roldán: Deben ser unidas suavemente y para que sean unidad suavemente nos debe dar la misma pendiente en el valor que yo estoy considerando, que en este caso es uno y en éste, para estas dos es trece sextos. Entonces voy a sustituir la derivada…de todas en el número…Bueno de las dos primeras en el número uno,…en el número uno la primera me queda uno

CONCLUSIONES

El profesor tiene una "comprensión" cualitativa de la razón de cambio la cual independiente de algún significado de la derivada. El concepto de diferenciabilidad de la función está encapsulado. La asociación coherente en todos los casos obedece más a su buena *percepción* que al análisis desde la disciplina, ya que los argumentos que ofrece obedecen más a su creer y a su sentir. Esto se confirma en el segundo problema donde el profesor simplemente aplica las técnicas, sin atender los intervalos de definición de la función. Cree que toda función definida por fórmulas debe tener una derivada definida por otra fórmula. La investigación nos permite afirmar que las creencias sobre los significados de la derivada son independientes de la formación del profesor y de su experiencia, están en dos clusters separados, el de los conceptos y otro el de las percepciones ambos incompatibles. Sin embargo esto no evita que el profesor esté seguro de la coherencia entre los elementos que hace intervenir. En este sentido el profesor y el sujeto en general tiene un sistema de creencias internamente coherente (SCIC). Una conclusión secundaria tiene que ver con el diseño de situaciones didácticas que además de exhibir las creencias de los sujetos, proporcionan información precisa para diagnosticarlas y diseñar el tratamiento adecuado, la intervención mediante el dialogo, para eliminar, modificar o crear ciertas creencias. Roldán ilustra esta situación ya que compartía inicialmente tanto la fortaleza, las relaciones quasilógicas y hasta en los clusters de las creencias. La intervención posibilito su modificación.

DISCUSION

Esta investigación obliga a reflexionar acerca de la separación entre las creencias del profesor y el conocimiento y al mismo tiempo conduce a la pregunta ¿Debemos atender primero el diseño de situaciones didácticas novedosas o la competencia matemática del profesor?

Referencias

De la Peña, J. A. (2002). Algunos Problemas de la educación en matemáticas en México. México: Siglo XXI editores.

García, L. Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 85-116.

Green, F. T. (1971). The activities of teaching. New York: McGraw-Hill.

Hähkiöniemi, M. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior*. *25*(2), 91-184.

Hirst, K. E. (1972). Derivatives and tangents. *Educational Studies in Mathematics*. *4,* 209-305

Hohensee, C. (2006). Students' thinking about domains of piecewise functions. In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz and A. Méndez, (Eds.) *Proc. 28th annual meeting of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 586-593). Merida, México: PME.

Lakatos, I. (1986). Pruebas y Refutaciones. Madrid, Alianza.

Maaß, J. & W. Schlöglmann (Eds.) (2009). Beliefs and Attitudes in Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno, Moreno, Mar y Azcarate, Gimenez, Carmen. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias, 21*(2), 265-280.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics Teachers' beliefs and affect. En Lester, F. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. USA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Sivunen, M. & Pehkonen, E. (2009). Finnish Elementary Teachers' Conceptions on Problem Solving in Mathematics Education. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.) *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education* (pp. 75–86). Rotterdam: Sense Publishers.

Thagard, P. (2000). Coherence in thought and Action. Cambridge MA: MIT

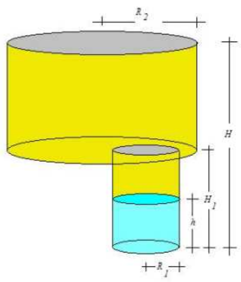
Tirosh, D. (2009). What do we know about mathematics teacher education? What evidence do we have? What comes next? *Journal Mathematics Teacher Education, 12*(2), 83-87.

Wilson, M. & Cooney, J. (2002). Mathematics Teacher Change and Development. The Role of Beliefs. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner, (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anexo

Llenado a razón constante de un recipiente compuesto por dos cilindros verticales de radios distintos

Consideremos dos cilindros ensamblados como muestra la figura



El volumen del recipiente esta dado por:

$$V(h)=\begin{cases}\pi R_1^2 h & \text{si } 0\le h\le H_1\\ \pi R_1^2 H_1+\pi R_2^2(h-H_1) & \text{si } H_1<h\le H\end{cases}$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{dV}{dt}=\begin{cases}\pi R_1^2\dfrac{dh}{dt} & \text{si } 0\le h<H_1\\ \pi R_2^2\dfrac{dh}{dt} & \text{si } H_1<h\le H\end{cases}$$

Como $\frac{dV}{dt}=G$ tenemos que la velocidad con la que sube el nivel del agua $\frac{dh}{dt}$, es::

$$\frac{dh}{dt}=\begin{cases}\dfrac{G}{\pi R_1^{\,2}} & \text{si } 0\le h<H_1\\[2mm] \dfrac{G}{\pi R_2^{\,2}} & \text{si } H_1<h\le H\end{cases}$$

Su gráfica es de la siguiente forma:

Resolviendo la ecuación diferencial tenemos que la función altura esta dada por:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{Gt}{\pi R_1^2}+C_1 & \text{si } 0\le t\le T_1\\[2mm] \dfrac{Gt}{\pi R_2^2}+C_2 & \text{si } T_1\le t\le T\end{cases}$$

Donde T_1 y T son los tiempos que tardan en llenarse el cilindro inferior y el recipiente completo respectivamente. Si consideramos que $h(0)=0$, entonces $C_1=0$. Si como sabemos $h(T_1)=H_1$ entonces $T_1=\dfrac{\pi R_1^{\,2}H_1}{G}$. Si este valor lo sustituimos en la expresión inferior obtenemos C_2:

$$C_2=H_1-\frac{R_1^2H_1}{R_2^2}=H_1\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)$$

Sustituyendo obtenemos la expresión para $h(t)$:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{Gt}{\pi R_1^2} & \text{si } 0\le t\le\dfrac{\pi R_1^2H_1}{G}\\[2mm] \dfrac{Gt}{\pi R_2^2}+H_1\left(1-\dfrac{R_1^2}{R_2^2}\right) & \text{si } \dfrac{\pi R_1^2H_1}{G}\le t\le T\end{cases}$$

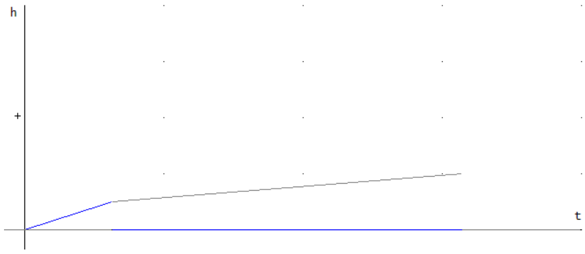
Para calcular el tiempo total de llenado hacemos $h(T)=H$ en la última expresión y obtenemos:

$$T=\frac{\pi}{G}\left(HR_2^2-H_1R_2^2+H_1R_1^2\right)$$

Sustituyendo este valor en la última expresión obtenemos:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{Gt}{\pi R_1^2} & \text{si } 0\le t\le\dfrac{\pi R_1^2H_1}{G}\\[2mm] \dfrac{Gt}{\pi R_2^2}+H_1\left(1-\dfrac{R_1^2}{R_2^2}\right) & \text{si } \dfrac{\pi R_1^2H_1}{G}\le t\le\dfrac{\pi}{G}\left(HR_2^2-H_1R_2^2+H_1R_1^2\right)\end{cases}$$

La gráfica de esta función tiene el siguiente aspecto:


h
t