XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

Aplicação de uma metodologia de ensino do cálculo a várias variáveis: o caso do teorema de clairaut-schwarz

Francisco Regis Vieira **Alves**
Departamento de Matemática, Instituto Federal de Educação, Científica e Tecnológica do Ceará - IFCE
Brasil
fregis@ifce.edu.br
Hermínio **Borges Neto**
Universidade Federal do Ceará - UFC
Brasil
hermínio@ufc.br

Resumo

Neste trabalho discutem-se elementos relacionados ao ensino/aprendizagem de um teorema abordado nos cursos de Cálculo a Várias Variáveis - CVV, chamado de Teorema de Clairaut-Schwarz. O estudo de caso desenvolvido no Instituto Federal e Educação, Ciência e Tecnologia (IFCE), em 2010, com 15 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, objetivou a análise de uma intervenção que buscou descrever/analisar a aplicação da metodologia de ensino chamada de *Sequencia Fedathi* - SF. Antes da intervenção procedeu-se a um levantamento de investigações relativas ao ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV e à identificação de elementos didático-metodológicos explorados nos livros de CVV. Destacam-se as conclusões: (i) a exploração de um *software* assumiu papel decisivo na visualização/compreensão dos participantes, no que diz respeito às condições de validade do teorema; (ii) por meio da SF, estimulou-se o processo de transição do CUV para o CVV e (iii) evitou-se a abordagem algorítmica do CVV.

Palavras-chave: ensino de cálculo diferencial, metodologia, teorema de clairaut-schwarz.

Sobre o ensino do Cálculo

Os obstáculos relacionados ao ensino/aprendizagem de Cálculo em Uma Variável Real - CUV são considerados um tema importante para investigações desenvolvidas tanto no Brasil como no Exterior. Domingos (2003; 2009) apresenta resultados interessantes e algumas implicações para o ensino desta matéria que merecem atenção. Neste sentido, o autor adverte que *a implementação de uma concepção estrutural dos conceitos, abordando-os a partir da sua definição formal, causa algumas dificuldades em termos de compreensão* (2009, p. 367). Domingos aponta uma característica que se manifesta de modo proeminente no ambiente acadêmico. Tal característica diz respeito ao domínio e compreensão de definições matemáticas e acrescentamos, também, o domínio das demonstrações formais de teoremas do CUV.

Na academia as estratégias apresentadas aos estudantes recorrem de modo tímido à intuição; algumas exceções podem ser observadas na medida em que *desenvolvemos investigações que incidam sobre a utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem dos conceitos mais avançados* (DOMINGOS, 2003, p. 368). Encontramos, por exemplo, relatos de resultados empíricos que fornecem indicadores auspiciosos de um ensino de CUV baseado na aquisição conceitual amparada na *visualização* e no estímulo da formação de representações ou imagens mentais convenientes, à medida que estimulamos o raciocínio intuitivo do estudante.

Abordagens que privilegiam elementos desta natureza exigem esforço por parte do professor, o qual pode não conseguir romper velhos hábitos. Cruz (2000, p. 261) critica o papel da escola baseada em regras, entretanto, *a aprendizagem em Matemática é frequentemente baseada na utilização de imagens e o sentido da visualização adquire papel fundamental*. Deste modo, um ensino com ênfase na aplicação de regras e com um apelo recorrente ao raciocínio algorítmico precisa ser repensado. No ambiente acadêmico de nossa discussão, o quadro não é muito diferente, levando-se em consideração, ainda, a dificuldade do aluno em libertar-se de um treinamento que envolveu expedientes inadequados de aprendizagem durante toda etapa anterior.

No *locus* acadêmico, além do fato de que os estudantes deparam rituais de ensino semelhantes ao ensino escolar, alguns autores contestam a utilização de metodologias de ensino exploradas por matemáticos profissionais influenciados por concepções formalistas e que preservam a crença segundo a qual o conhecimento lógico-formal e o domínio das estruturas mais gerais são suficientes para garantir uma boa aprendizagem. Tal posicionamento é criticado há tempos pelos próprios matemáticos. Neste sentido, Kline (1977, p. 44) alertava para o fato de que um bom professor precisa conhecer seus estudantes. Ademais, *um bom professor deve possuir um conhecimento de problemas psicológicos que perturbam os estudantes*. Deve fornecer recomendações de como estudar. No caso do CUV a situação descrita requer vigilância e a condução de um ensino que mantenha o equilíbrio entre os aspectos formais e intuitivos dos conceitos pode ser efetivada por intermédio da escolha de uma boa mediação metodológica.

Transição interna do cálculo

Encontramos poucos estudos desenvolvidos com a intenção de compreender os processos de ensino/aprendizagem relativos aos conceitos do Cálculo a Várias Variáveis - CVV. De modo semelhante ao que autores analisam o momento de transição do ambiente escolar para o ambiente de aprendizagem de conceitos avançados, discutiremos o processo do que chamamos de *transição interna do CUV para o CVV*. Acrescentamos o termo “interna” relativo ao fato de que, nos cursos de graduação do Brasil, os estudantes geralmente entram em contato com o CVV no segundo ano de estudos acadêmicos, no decorrer de três ou quatro disciplinas de Cálculo.

Os exemplos mais emblemáticos relacionados a tal "transição" dizem respeito à mudança de notações simbólicas características do sistema representacional do CUV e do CVV. De fato, quando consideramos funções do tipo $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ ou $w = f(x,y,z)$, os estudantes devem se familiarizar com habilidades específicas e particulares para cada um dos casos. Basta notar que o processo de derivação no primeiro caso, dependendo da conveniência ou preferência do autor do livro, o mesmo pode ser denotado por $\frac{d}{dx}[y], \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x f(x), f'(x)$ ou $D_x y$.

No segundo caso, temos a derivada em relação à variável 'x' denotada por: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)_{y=cte}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]_{y=cte}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]$. Enquanto isso, no caso de funções em três variáveis reais, cujos gráficos estão contidos no $\mathbb{R}^4$, denotamos a derivada em relação à 'x' por $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \left.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right|_{y=cte, z=cte}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z)]$.

Neste momento, o aluno pode deparar as primeiras complicações conceituais. Com efeito, no primeiro ano de universidade, o estudante aprende que, quando avaliado num ponto, o símbolo $f'(x_0)$ representa o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ pertencente ao plano $\mathbb{R}^2$; entretanto, adaptando esta forma de raciocínio no contexto do CVV, qual dos dois números reais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ será o coeficiente angular de uma reta tangente? E tangente a que objeto? Como se comporta o gráfico de $z = f(x,y)$?

A situação pode se complicar caso requisitemos ao aprendiz interpretar a seguinte expressão $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$. Note-se que discutimos aspectos relacionados à interpretação geométrica da noção de derivada, todavia, tal noção, tanto no CUV como no CVV, está intimamente relacionada com outra noção que chamamos de limite. Basta observar as definições: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$.

Por outro lado, para a discussão de um teorema matemático, sob determinadas condições e hipóteses, apresentamos as *derivadas mistas*, que são denotadas agora por: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\Delta x}$ ou $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta y}$. E para efeito da análise no contexto do que nomeamos de *transição interna do Cálculo*, com ênfase nos aspectos geométricos e analíticos dos conceitos envolvidos no teorema de Schwarz (LIMA, 2009) ou teorema de Clairaut (RANDOLPH, 1969), nos restringiremos a funções do tipo $y = f(x,y)$. Tal escolha nos possibilitará uma atenção especial relativa aos aspectos geométricos envolvidos. Vale observar ainda alguns trabalhos interessantes no exterior (WU & YU, 2008) que introduzem módulos laboratoriais de plataforma Java com a intenção de estimular hábitos de aprendizagens relacionados com os conceitos complexos de continuidade e diferenciabilidade, explorando a visualização dos conceitos do CVV. Na figura 1 divisamos algumas construções particulares destes autores conduzidos por uma mediação didática.

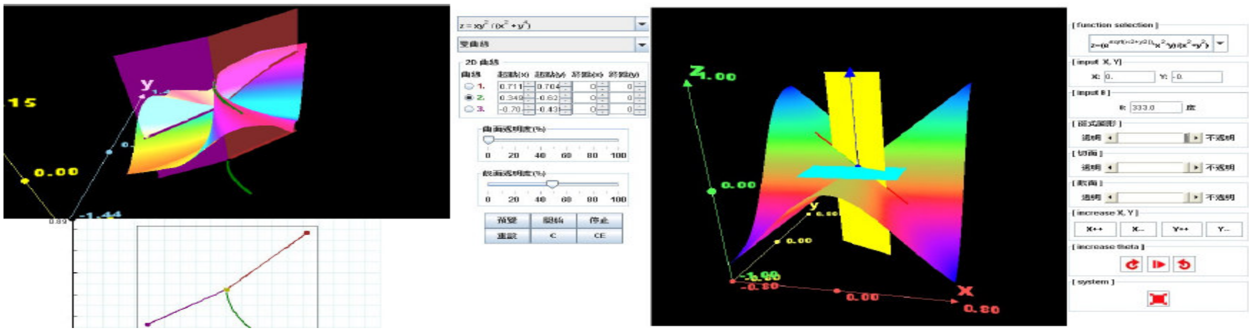


Figura 1: Plataforma Java desenvolvida em Wu & Yu (2008) para exploração didática do CVV.

Para concluir esta seção, apresentamos um trecho referente ao livro de Lima (2009), em que podemos divisar todas as condições necessárias e suficientes para a verificação do resultado previsto pelo teorema que chamaremos daqui para frente de Teorema de Clairaut- Schwarz.

Teorema 3. *Seja* $f: U \to \mathbb{R}$ *tal que existem* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *em todos os pontos de* U*. Se as funções* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: U \to \mathbb{R}$ *são contínuas, então a derivada* $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ *existe em todos os pontos de* U *e vale* $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$.

Figura 2: Enunciado do teorema de Clairaut-Schwarz, proposto em Lima (2009, p. 149).

Na figura 3 exibimos as derivadas de duas funções. É possível prever as dificuldades enfrentadas pelos estudantes com o objetivo de verificar analiticamente as condições do teorema acima (figura 2), além de que sua demonstração formal envolve conhecimentos avançados em Análise no $\mathbb{R}^n$, que são incongruentes para um curso de licenciatura em Matemática.

$$f := \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = -\frac{6x^2 y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^4 y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f := \frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2 y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Figura 3: O software *Maple* fornece derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem de duas funções.

Concluímos esta seção, salientando a importância da exploração de contraexemplos no ensino de Cálculo, apesar de que, na prática, a atividade de identificação deles no CVV exige esforço e envolve maior complexidade do que no caso do CUV, além de resultados que não podem ser readaptados a um novo contexto de estudo. De fato, no CUV, se uma função $f(x)$ admite derivada $f'(x)$, *a fortiori* a mesma deve ser contínua. Por outro lado, encontramos exemplos de funções $g(x,y)$ que possuem as derivadas $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$, todavia sequer são contínuas, consequentemente, não diferenciáveis, como no caso da função $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Aspectos da metodologia de ensino

Em 2010, ao decorrer da disciplina Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis, buscamos estruturar e aplicar uma abordagem de ensino para o teorema de Clairaut-Schawrz, que proporcionasse romper com determinadas limitações e entraves que dificultam a *transição do CUV para o CVV* em uma licenciatura em Matemática do IFCE. Nesta ocasião, referendamos nossas escolhas didático-metodológicas a partir da proposta metodológica de ensino chamada de *Sequencia Fedathi* – SF, desenvolvida no Estado do Ceará por Borges Neto *et al* (2001).

O passo inicial do trabalho consistiu no levantamento de livros didáticos de CVV (LEITHOLD, 1982; LIMA, 2009; FREDON. MAUMY-BERTRAND & BERTRAND, 2009; RANDOLPH, 1969) que discutem o teorema de Clairaut-Schwarz. Na etapa seguinte, categorizamos e destacamos as características que se mostraram mais relevantes para nossas análises: (i) livros que exploram apenas aspectos lógico-formais do teorema incompatíveis com um curso de licenciatura; (ii) livros que adotam uma abordagem intuitiva e promovem a *transição do CUV para o CVV*; (iii) livros que promovem condições eficazes para a compreensão da validade ou não-validade da aplicação do teorema e (iv) livros que preservam e fortalecem o caráter algorítmico dos conceitos em detrimento de seus aspectos geométricos.

No sentido também de antever problemas no ensino do CVV, realizamos o levantamento de autores de livros e estudos empíricos (PINTO, 1998; DOMINGOS, 2003; HENRIQUES, 2006) que nos apontaram dificuldades no ensino/aprendizagem do CUV. Com base nestes elementos, estruturamos os níveis de ensino previstos na *Sequencia Fedathi* do seguinte modo:

Nível 1 Tomada de posição – apresentação do problema ou de um *teorema*. Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema relacionada com teorema de Clairaut-Schawrz para o grupo de alunos, que devem possuir meios de atacar o mesmo. Em nosso caso, apresentamos as questões exibidas no anexo 1. Desenvolvemos estratégias que se apoiaram em habilidades, resultados e argumentos conhecidos pelos sujeitos no curso inicial de CUV com a intenção de readaptá-los e reutilizá-los no contexto de resolução de problemas do CVV.

Nível 2 Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Destinado à discussão e debate, envolvendo os elementos *professor-alunos-saber*. Nesta etapa, o computador assume papel essencial, na medida em que explicita determinadas dificuldades relacionadas com a verificação direta das hipóteses previstas no teorema (figuras 2 e 3).

Nível 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Nesta etapa, confrontamos as estratégias intuitivas (baseadas na visualização, exploração e manipulação de objetos no computador) constituídas com base na análise geométrica dos objetos (tarefa impraticável no ambiente lápis/papel) e o modelo lógico-formal característico do CUV e do CVV (figuras 2 e 10).

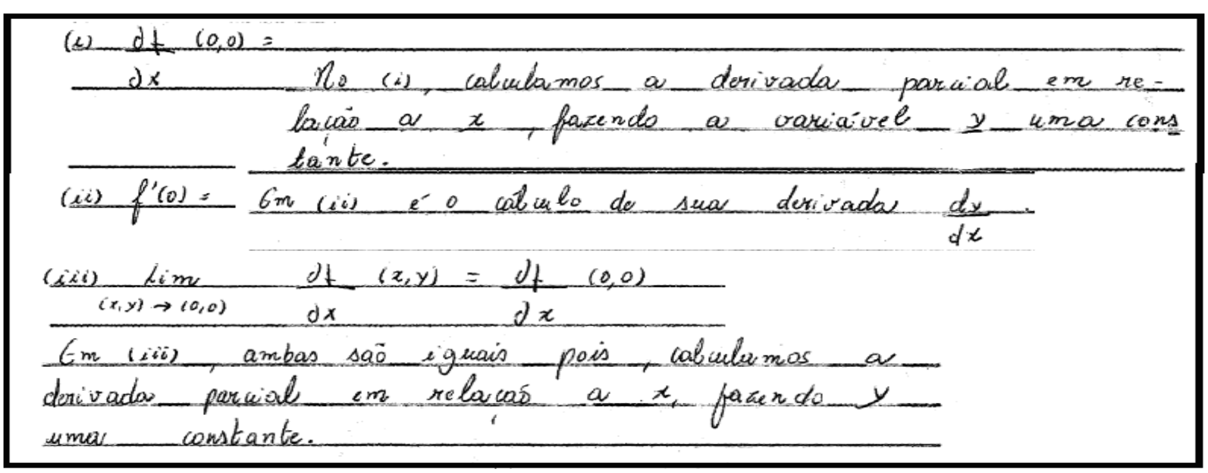
Nível 4 Prova – apresentação e formalização do modelo matemático e ser ensinado. Aqui, a didática do professor determina em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber*. E em nosso caso, diz respeito às condições formais em que temos a *comutatividade das derivadas mistas*. Destacamos que as argumentações dos alunos são revistas, sendo identificados os elementos que podem causar maior incompreensão a eles. Destarte, os limites de validade do teorema são discutidos e efetivamos uma análise lógico-matemática dos contraexemplos apresentados pelos livros consultados, sobretudo os elementos negligenciados pelos autores de livros supracitados.

Descrição dos procedimentos de desenvolvimento do estudo

Elencamos as seguintes funções que exploramos durante a intervenção: $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $h(x,y)=xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. Participaram das atividades 15 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa mediante um *estudo de caso* (BOGDAN & BIKLEN, 1994). O trabalho efetivo com os estudantes se desenvolveu durante quatro encontros em sala de aula, com duração de duas horas cada uma. Eles receberam listas de atividades (anexo A) relacionadas com a noção de *derivadas mistas* (teorema de Clairaut-Schwarz), inclusive enunciados diferentes do mesmo teorema matemático. Os sujeitos participantes foram orientados no sentido de que inicialmente o trabalho seria individual e o acesso aos gráficos no computador dos objetos discutidos nas listas foi livre. Na próxima seção, discutimos trechos das *entrevistas semiestruturadas* desenvolvidas ao decorrer das seções.

Discussão e análise dos dados

Como antevemos nas etapas iniciais de desenvolvimento do estudo, os estudantes manifestaram dificuldades para interpretar os conceitos estudados no CUV em um novo contexto característico do CVV. Por exemplo, na figura 4, o aluno 3 tentou distinguir/comparar as simbologias $f'(0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. A dificuldade diagnosticada, neste como em outros casos, relaciona-se com a interpretação conceitual das simbologias. Por exemplo, no primeiro caso, o aluno 3 analisou $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ e interpretou como a taxa de variação $\dfrac{dy}{dx}$. Os estudantes manifestam incompreensões no entendimento do símbolo zero '0' que comparece no par ordenado $(\underset{\substack{\textit{aproximação}\\ \textit{do ponto}}}{0}, \underset{\text{valor constante}}{0})$ que, no caso da derivada parcial em relação a 'x', o primeiro símbolo denota uma aproximação. Segundo a construção formal da derivada, obtemos a declividade de uma reta tangente à curva $z=f(x,0)$.


(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=$ No (i), calulamos a derivada parcial em relaão a x, fazendo a variável y uma constante.

(ii) $f'(0)=$ Em (ii) é o cálculo da sua derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Em (iii), ambas são iguais pois, calculamos a derivada parcial em relacaõ a x, fazendo y uma constante.

Figura 4: O aluno 3 descreveu e diferenciou determinadas notações no ambiente de estudo do CVV.

A seguir apresentamos um trecho da entrevista *semiestruturada* realizada com o aluno 2 que investigou a função $f(x,y)$ com base nas representações fornecidas pelo computador.

Pesquisador: Como você analisa o comportamento do limite das derivadas de primeira e de segunda ordem dessa função $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$? Observando seu comportamento no computador, o que podemos inferir?

Aluno 2: *As derivadas de segunda ordem têm que ser contínuas para comutarem...as mistas...mas a derivada parcial...a gente analisa aqui...a função tem que existir...se a gente redefinir....a gente pode pegar por partes...estes limites....*

Pesquisador: Pode tomar por partes este limite? Para verificar sua existência? Tomar uma fração e depois tomar a outra fração.... E no caso da derivada $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\dfrac{2\,x^2\,y}{x^2+y^2}-\dfrac{2\,x^2\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$?

Aluno 2: *Sim pega uma fração e depois pega a outra fração....mas eu pego primeiro a fração com sinal de menos...e..depois....toda.*

Pesquisador: Não vai demorar muito esse método analítico? Temos aí na tela do computador.... oito frações (figura 5).... O limite disso aqui tudo existe? Algum teorema do Cálculo em Uma Variável Real pode ser aplicado aqui nesse caso?

Aluno 2: *Sim... Mas as derivadas primeiras todas tem que ser contínuas...não....não necessariamente....pode ser ou pode não ser... por que nessa segunda aqui tem uma indeterminação...quando* $y\to 0$.

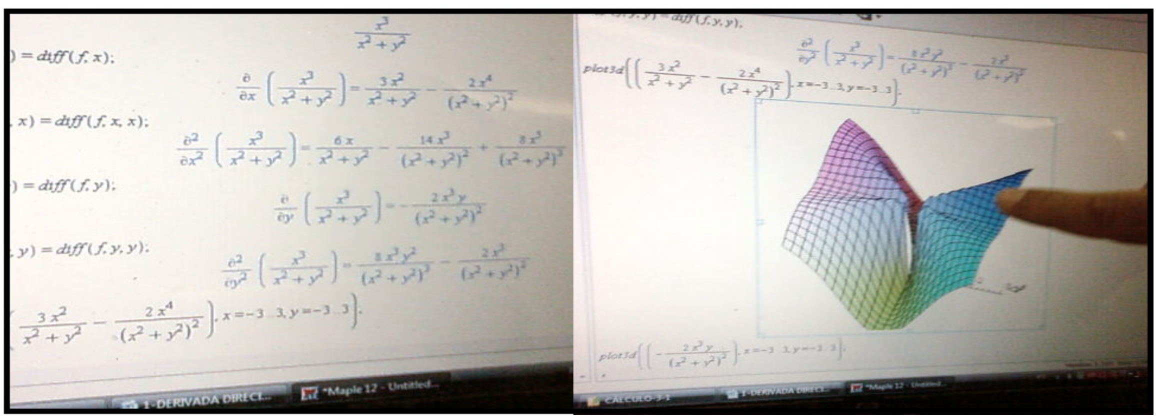


Figura 5: O aluno 2 analisou visualmente e analiticamente a continuidade da 1ª derivada da função.

No trecho (nível 1) acima, identificamos a tentativa de emprego de alguns teoremas do ambiente do CUV, como do tipo $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)+\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)$. Salientamos que, no nível 2 da *Sequência Fedathi*, o aluno 2 tentou efetivar o exame analítico da continuidade das derivadas de 1ª e 2ª ordem. Nos próximos trechos, exibimos os dados colhidos em entrevista com o aluno 4. Nestas tarefas, estimulamos os estudantes a aplicar estratégias para a verificação da existência de limites para o caso das derivadas requeridas no teorema (figura 2).

Pesquisador: O limite existe na origem? É continua a derivada parcial de 1ª ordem?

Aluno 4: *Quando eu tiver calculando aqui esta derivada... quando* $y \to 0$*....ai vai dar o limite...de...vai ficar* $\frac{2x^4}{x^4}$*....ai eu elimino* x^4 *...vai ficar...fica* $\frac{2}{0}$ *que é uma indeterminação...*

Pesquisador: Mas indeterminação nessa segunda fração da derivada de 1ª ordem? Dá para dizer com certeza? Mas por que esta cancelando ai? Pelo gráfico de $g(x, y)$ podemos concluir algo?

Aluno 4: *Sim...indeterminação nessa segunda..fração....se de uma indeterminação na segunda...já morre...Não muito por que é de cabeça....dá muito trabalho...não...Para os dois são iguais...chamei de* $\Delta x = \Delta y$ *...pode....mas* $\Delta x \to 0$*...assim* $\frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2} \to \frac{1}{2}$*...Isso...o gráfico dela 'parece uma onda'...*

Acima percebemos o emprego de metáforas para explicar/caracterizar o comportamento da superfície. Cruz (2000) destaca a exploração de metáforas no ensino de Cálculo com vistas à produção de conhecimento e, em nosso caso, observamos que a própria comunicação entre os estudantes se tornou mais frequente no sentido de significar/interpretar os dados observados.

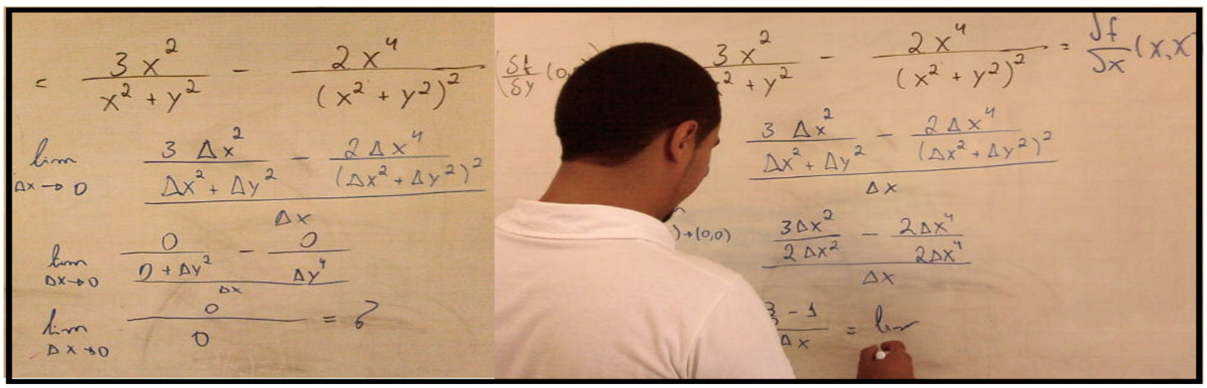


Figura 6: O aluno 4 recorreu aos argumentos analíticos para a verificação da existência e continuidade das derivadas e a confirmação das informações obtidas com a visualização dos gráficos das mesmas.

Nos níveis 2 e 3 da *Sequência Fedathi* proporcionamos a comparação dos resultados baseados entre os argumentos intuitivos com os argumentos formais. No que segue, exibimos a argumentação do aluno 4 (figura 7). Note-se a interpretação dinâmica dos conceitos envolvidos.

Pesquisador: Vamos ver o gráfico da função $h(x, y)$ é contínua pelo gráfico? É aquela função...Você pode me explicar seu comportamento geométrico?

Aluno 4: *É contínua...por o limite aqui ta tendendo a zero...todos os valores...aqui..todas as imagens...estão descendo...indo para um único ponto...aqui...estão descendo...mas ai..aquela indeterminação lá..atrás no limite....mas não vai ser contínuas mesmo não...não estão tendendo a zero...olha aqui...pelo gráfico não dá para ter certeza não...*

Pesquisador: Não é contínua a função $f(x, y)$? Você mudou de opinião? Quer fazer aquelas contas? Você disse que ia separar e depois mudou de ideia em separar este limite?

Aluno 4: *Não...mas vendo por aqui...depende do ângulo de observação...não vai ser contínua mesmo não..esta subindo..todas estão subindo para cá...não estão tendendo a zero....*

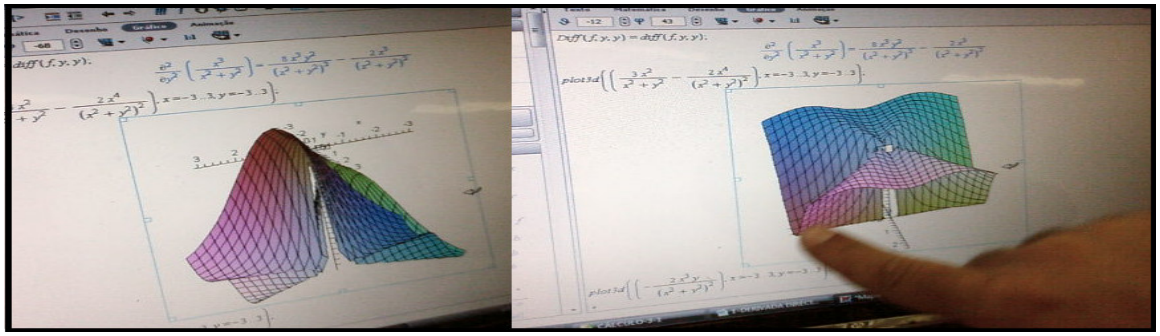


Figura 7: O aluno 4 investigou por meio da visualização a continuidade da derivada de 1ª ordem.

Encontramos alguns estudantes (alunos 12, 14 e 15) que manifestaram dificuldades nas relações conceituais estabelecidas entre a função inicial e a sua derivada, como exemplificamos na figura 8. De fato, no CUV, quando o estudante considera as funções $y = f(x)$ e $y = f'(x)$, a função inicial deverá ser diferenciável e, portanto, contínua; todavia, os estudantes, como conclusão de um debate em sala de aula (nível 3), exibiram a função $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ que concluíram tanto pelo seu gráfico como analiticamente se tratar de uma função descontínua. A dúvida surgiu ao momento da investigação do comportamento de suas derivadas. Observaram que existem $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = +\infty = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$. Fora da origem, explorando o *software* Maple, obtiveram que: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ *e* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Na inspeção da derivada mista de $g(x,y)$, os alunos analisaram a expressão, empregando estratégias do CUV em $\frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$.

Cálculo III

CONTINUIDADE

a) f f' f''

Se $f(x)$ é contínua, temos que $f'(x)$ pode ou não ser contínua. Da mesma forma é válido para $f'(x)$ em relação a $f''(x)$.

b) f f' f''

Se $f''(x)$ é contínua, $f'(x)$ terá que ser contínua pois se temos $P_0(X_0, Y_0) \in f'(x)$, Necessariamente este ponto terá de pertencer a $f''(x)$.
Ou seja, Como o lim de $f''(x)$ $\exists$, temos que, se os pontos $f'(x) \supset f''(x)$, logo o lim $f'(x)$ também existirá. Da mesma forma acontece de $f'(x)$ em relação a $f(x)$.

Figura 8: O aluno 15 tentou caracterizar/compreender as relações conceituais do CUV (nível I).

Considerações e recomendações

A ocorrência de mudanças e exigências conceituais drásticas no momento de transição da escola para o ambiente acadêmico tem sido objeto de interesse em muitas investigações, entretanto, o mesmo não se pode afirmar com respeito ao período de *transição interna* que o aluno de graduação experimenta relativo às disciplinas de Cálculo no 2º ano de estudos.

Assim, concebemos e aplicamos a metodologia de ensino chamada de *Sequência Fedathi*, com a intenção de evitar também determinados aspectos observados nos livros de CVV e outros relatados em estudos empíricos que podem atuar de forma negativa com relação ao aprendizado dos estudantes de um curso de licenciatura. Um dos aspectos identificados no estudo diz respeito à diversidade por parte dos autores na apresentação da demonstração formal e do enunciado de teorema de Clairaut-Schwarz. E desde que nosso estudo se caracterizou como intervenção em um curso de Licenciatura de Matemática; assumimos a não-essencialidade do conhecimento da referida demonstração, uma vez que ela é fundamentada nos conteúdos de Análise no $\mathbb{R}^n$ (LIMA, 2009), disciplina não obrigatória em cursos de licenciatura no Brasil.

Salientamos que, nos níveis 1 e 2 da *Sequência Fedathi*, estimulamos os estudantes à exploração de estratégias de teoremas aprendidos no contexto do CUV para o contexto do CVV, como, por exemplo, situações do tipo em que deparavam a necessidade de analisar expressões como $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(f_x^1(x,y)\pm f_x^2(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x^1(x,y)\pm\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x^2(x,y)=f_x^1(0,0)\pm f_x^2(0,0)$ (figuras 5 e 6). Outro fato observado diz respeito ao caráter predominantemente algorítmico dispensado pelos livros didáticos de CVV consultados. Mostramos um caso (figura 9), que não podemos declarar como exceção o 'padrão' de exercício resolvido pelos autores Wrede & Spiegel (2010). Nem no enunciado do problema abaixo e nem nas conclusões, os autores da obra fazem menção explicita à falta de continuidade de algumas das derivadas (de 1ª e 2ª ordem) requeridas no teorema Clairaut-Schwarz. Destacamos ainda a pouca clareza, a concisão e a brevidade das notações empregadas ($f_x(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$, $f_{xx}(0,0)$) na verificação do contraexemplo.

Let $f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Compute (a) $f_x(0,0)$, (b) $f_y(0,0)$, (c) $f_{xx}(0,0)$ (d) $f_{yy}(0,0)$, (e) $f_{xy}(0,0)$, and (f) $f_{yx}(0,0)$.

(a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$ (b) $\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0}{k}=0$

If $(x,y)\neq(0,0)$, $f_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}\right)\right\}=xy\left(\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

$f_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}\right)\right\}=xy\left(\dfrac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+x\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

Then

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$ (e) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{-k}{k}=-1$

(d) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0}{k}=0$ (f) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

Note that $f_{xy}\neq f_{yx}$ at $(0,0)$. See Problem 6.13.

Figura 9: Exemplos de tarefas propostas por livros de CVV (WREDE & SPIEGEL, 2010, p. 151).

Por fim, vale observar com base em nossa intervenção e a perspectiva de alguns autores consultados (FERRARI, 2003; GUERRIER, 2005; HENRIQUES, 2005), constatamos a manifestação das dificuldades dos estudantes de modo recorrente nos momentos em que se necessitava aplicar estratégias no contexto do CVV, nas quais, os sujeitos não conseguiram identificar de modo explícito a necessidade dos saberes constituídos a partir do CUV (níveis 1 e 2). Este entrave é uma consequência do ensino que não privilegia a '*transição*' do CUV para o CVV. Na proposta didático-metodológica que desenvolvemos, defendemos um movimento dialético, tanto das ideias, estratégias e simbologias do CUV, que devem ser adaptadas ao novo contexto do CVV, como também estratégias e conceitos do CVV que podem ser explorados no ensino do CUV, com destaque em suas interpretações geométricas no $\mathbb{R}^3$.

Na aplicação da *Sequência Fedathi*, divisamos a oportunidade de fortalecer este processo dialético, atentando para o fato de que o caráter de abstração dos conceitos do CVV (como o seu sistema de representação) dificulta o seu entendimento; aliás, *a complexidade da abstração em Matemática concorda com a complexidade intrínseca do ensino de conceitos matemáticos complexos* (FERRARI, 2003, p. 1229). Então, assumimos a importância em pesquisas futuras desta natureza da promoção de um ensino intuitivo e menos algorítmico (figura 9). E, como evidencia Cruz (2000, p. 283), seria desejável *complementar o pensamento algorítmico e a visualização aproveitando-se das novas tecnologias*. Deste modo, o professor terá também a oportunidade de atuar no campo da *motivação dos estudantes* (KLINE, 1977, p. 45) na medida em que trabalha em parceria com a intenção de superar os entraves fornecidos pelo CVV.

Bibliografia e referências

Bogdan. Robert. & Biklen. Sari. (1994). Investigação qualitativa em Educação. Portugal: Editora Porto.

Borges Neto. Hermínio et al, (2001). A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, *XV EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional Do Nordeste*, São Luis, 590-609.

Cruz. Inês. Carmen. P. (2000). Analisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos (tesis de doctoral). Laguna: Universidad de la Laguna.

Domingos. Antonio. (2009). Learning advanced mathematical concepts: the concept of limit. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Lyon: ERIC, 2266-2275.

Domingos. Antonio. (2003). Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no início do superior (tese de doutoramento). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Ferrari. Píer. Luigi. (2003). Abstraction in Mathematics. *Philosophical Transaction of The Royal Society*. v. 358, 1225-1230. doi: 10.1098/rstb.2003.1316

Fredon. Daniel., Maumy-Bertrand. Myriam. & Bertrand. Frederic. (2009). Mathématique et analyse en 30 fiche. Paris: Dunod.

Guerrier, V. D. (2005). Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématiques (habilitation de recherche), Lyon: Université Claude Bernard Lyon I.

Henriques, Afonso. (2006). L´enseignement et l´apprentissage des integrales multiples: analyse didactique integrant l´usage du logiciel maple (thèse de Doctorat), Grenoble: Université Joseph Fourier.

Kline. Morris. (1977). Why the professor Can´t Teach: mathematics and the dilemma of University Education. New York: St. Martin Press.

Leithold. Louis. (1982). O Cálculo com geometria analítica. São Paulo: Harbra. 2º edição.

Lima. Elon. Lages. (2009). Curso de Análise. v. 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e

Aplicada. 11º edição.

Randolph. John (1969). Calculus and Analytic Geometry. California: Publishing Company.

Pinto, Marcia. F. (1998). Students' understanding of real analysis. (Thesis of doctor of philosophy), Warwick: University of Warwick.

Wrede. Robert. & Spiegel. Murray. R. (2010). Schaum´s outline: advanced calculus. New York: Mc-Graw Hill.

Wu. Szu-Hui. & Yu. Chi-Jer. (2008). Visually assisted learning in multivariable calculus: the cases of continuity and differentiability. *Proceedings of International Conference of computers in Education*. Taiwan: National Central University, 925-932.

Apêndice A

Na sequência apresentamos as questões exploradas ao decorrer da intervenção.

Questão (1). Identificar, interpretar, diferenciar as simbologias $f\,'(0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0)$.

Objetivos. Identificar possíveis incompreensões dos estudantes com respeito às notações empregadas do CUV e do CVV, e que podem comprometer a *transição interna* (nível 1).

Questão (2): Analisar, com base no gráfico exibido pelo computador, o comportamento das seguintes funções $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $h(x,y) = xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. Decidir em quais casos teremos funções contínuas na origem e investigar as condições do teorema.

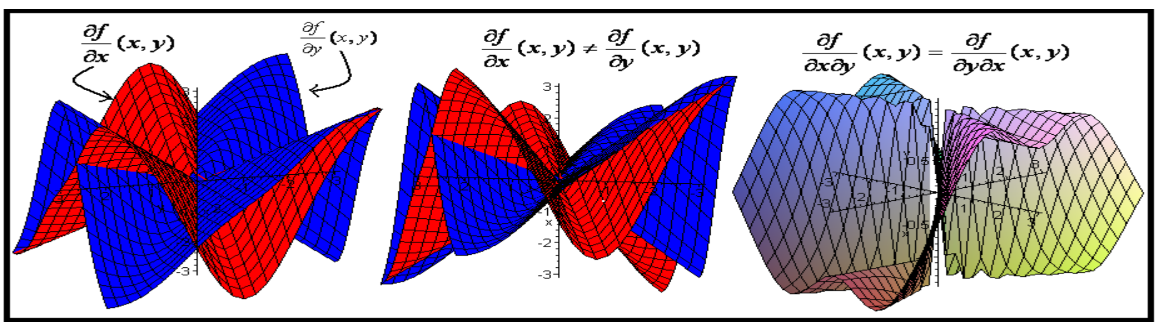


Figura 10: Identificação visual das propriedades das derivadas parciais e mistas no nível 2 da SF.

Objetivos. Desenvolver habilidades matemáticas baseadas na visualização dos conceitos do CVV a partir das representações geradas pelo computador, evitando, assim, a algoritmização.

Questão (3). Analisar, com base no gráfico exibido pelo computador, as condições do teorema de Clairaut-Schwars para cada uma das funções acima. Temos algum contraexemplo?

Objetivos. Explorar as hipóteses para a verificação do teorema (níveis 3 e 4 da SF).

Questão (4). Efetuar analiticamente a verificação das condições do teorema de Clairaut-Schwarz (figura 2) para cada uma das funções $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$.

Objetivos. Identificar/analisar/justificar formalmente em que condições ocorrerá ou não a tese do teorema. Os argumentos formais são adaptados aos objetivos de um curso de licenciatura.