Possibilidades Didático-Pedagógicas do Software Geogebra no Estudo do Conceito de Integral

Andriceli **Richit**
Universidade Estadual Paulista
Brasil
andricelirichit@gmail.com

Adriana **Richit**
Universidade Federal da Fronteira Sul & GPIMEM
Brasil
adrianarichit@gmail.com

Ricardo **Scucuglia** Rodrigues da Silva
University of Western Ontario & CAPES & GPIMEM
Brasil
rscucugl@uwo.ca

Mauri Luís **Tomkelski**
Colégio Estadual Prof. Mantovani & Colégio Marista Medianeira
Brasil
mauriluis@gmail.com

Resumo

O uso de diferentes tecnologias na abordagem de conceitos matemáticos possibilita uma abordagem qualitativamente diferente para conceitos matemáticos diversificados, devido à possibilidade de ampliar a investigação matemática envolvendo representações gráficas, geométricas e algébricas. Nessa perspectiva, consideramos que o uso pedagógico das tecnologias, como o software GeoGebra por exemplo, favorecem a investigação e a experimentação matemática. Do mesmo modo, entendemos que incorporar os recursos tecnológicos na abordagem de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada e relacionada a abordagens algébricas. Destacamos, portanto, a relevância com relação às articulações envolvendo múltiplas representações no processo de pensamento matemático. Assim, esta oficina tem por objetivo explorar o conceito de Integral em uma perspectiva de investigação matemática com o apoio do software GeoGebra.

Palavras-chave: tecnologias, conceito de integral, software gráfico, educação matemática, representações gráficas.

Introdução

Neste artigo, inicialmente, contextualizamos um panorama no qual buscamos apresentar alguns estudos que enfocam a investigação de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e o uso de tecnologias[1]. Neste cenário enfatizamos perspectivas nas quais os processos de experimentação com tecnologias e visualização são significativos para a produção de conhecimentos matemáticos. Ou seja, buscamos apresentar pesquisas, as quais sugerem que a utilização de alguns recursos informáticos propicia elementos fundamentais para pensar matematicamente. Contudo, reconhecemos que esta não é uma condição pedagógica suficiente. Conhecer os recursos específicos da tecnologia utilizada e criar atividades de caráter investigativo, baseado nestes recursos, são condições necessárias para aprendizagem matemática com tecnologias. É nessa perspectiva que a oficina aqui proposta busca (a) propiciar aos participantes familiarização com alguns recursos do software GeoGebra e (b) engajá-los em um contexto de investigação sobre o conceito de Integral a partir do uso do GeoGebra.

Cálculo Diferencial e Integral: Desafios e Possibilidades no contexto das Tecnologias Digitais

O Cálculo Diferencial e Integral caracteriza-se como umas das grandes realizações da humanidade, cujas ideias foram desenvolvidas há aproximadamente 350 anos. Ao longo desses três séculos, o estudo de Cálculo foi enriquecido por novas metodologias, apresentação de abordagens teóricas e pelas estruturas da opinião de gerações sucessivas, principiando com as concepções originais de Leibniz e Newton sobre infinitesimais e limites. Atualmente temos uma variação de métodos formais modernos, a partir de abordagens intuitivas que caminham para abordagens numéricas, simbólicas e gráficas, culminando nas teorias que vão desde a análise formal do épsilon-delta, que “expulsam” infinitesimais, à análise não padronizada. O resultado é uma larga escala de pontos de vista a respeito de como o Cálculo deve ser concebido e ensinado (TALL, SMITH e PIEZ, 2008).

De acordo com Tall, Smith e Piez (2008), de todas as áreas da matemática acadêmica, o Cálculo tem sido alvo principal do interesse e investimento no uso da tecnologia. Iniciativas no mundo inteiro têm trabalhado nesse sentido e criado softwares gráficos para explorar conceitos de Cálculo, como os CAS Mathematica[2], Maple[3], Derive[4], Theorist[5] e Mathcad[6], entre outros. Além disso, esses autores dizem que tais iniciativas surgiram por diversos motivos, tais como a

[1] Por tecnologias estamos nos referindo às tecnologias de informação e comunicação, bem como a tecnologia informática, tais como softwares, simuladores, *applets*, etc.
[2] Disponível em <http://www.wolfram.com/products/mathematica/newin7>, acessado em jan. 2011.
[3] Disponível em <http://www.maplesoft.com/>, acessado em jan. 2011.
[4] Disponível em <http://www.sciencecentral.com/site/501660>, acessado em jan. 2011.
[5] Disponível em <http://www.livemath.com/>, acessado em jan. 2011.
[6] Disponível em <http://www.ptc.com/products/mathcad/>, acessado em jan. 2011.

insatisfação dos estudantes frente à abordagem tradicional do Cálculo e, também, pelo fato da tecnologia estar acessível nos espaços educacionais e formativos.

No que diz respeito à abordagem tradicional do Cálculo, Morelatti (2001) aponta que a aprendizagem do Cálculo tem sido ao longo dos anos um problema para estudantes de cursos universitários da área das Ciências Exatas. Esta disciplina é bastante conhecida por seu alto índice de reprovação e evasão e, talvez, por este motivo, além de contar com pouca simpatia dos alunos, causa-lhes certa apreensão em relação à disciplina e uma expectativa negativa, predispondo-os, assim, ao insucesso. Morelatti (2001) pontua, ainda, que a metodologia utilizada pela maioria dos docentes desta disciplina prioriza a "aula expositiva (centrada na fala do docente), e os conceitos são apresentados aos estudantes como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a menor preocupação de torná-los significativos para o estudante".

Entretanto, durante os anos 1980, surgiu entre muitos matemáticos uma crescente preocupação com a qualidade da aprendizagem dos alunos no Cálculo. Isto conduziu ao movimento da Reforma do Cálculo nos Estados Unidos, propondo a integração da tecnologia como uma maneira de tornar os conceitos mais significativos para um maior número de estudantes. Diversos países, cada um ao seu modo, trabalharam para integrar a tecnologia em seus programas de aprendizagem e na cultura deles. Por exemplo, revisões periódicas do currículo na França voltaram à atenção para o uso da tecnologia na transição à matemática universitária (ARTIGUE, 1990) e, na Grã-Bretanha, a Associação de Matemática (1992) centrou-se no uso de computadores em sala de aula (TALL, SMITH e PIEZ, 2008).

Com essas perspectivas, as mudanças atinentes ao ensino de Cálculo ancoradas no movimento da Reforma do Cálculo sugerem: i) mudança no foco do ensino de Cálculo, atentando para ideias fundamentais ao invés de enfatizar regras, técnicas e procedimentos; ii) mostrar a importância e aplicação do Curso de Cálculo em diversas áreas do conhecimento bem como no campo de Educação Matemática e iii) introdução das tecnologias da informação e comunicação no currículo de Cálculo (FRID, 1994, *apud* REGO, 2005).

Porém, ao sugerirmos que o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo necessita ser modificado de acordo com o que propõe a Reforma do Cálculo, não estamos sugerindo que os cursos de Cálculo devam simplesmente ser modernizados no sentido de utilizar calculadoras gráficas, computadores, softwares ou quaisquer recursos das tecnologias informáticas de representação gráfica. Entendemos que em um curso moderno de Cálculo, os CAS (Computer Algebra System) ou demais recursos tecnológicos não transformarão estudantes com grandes dificuldades em matemática em grandes matemáticos, mas estes podem proporcionar melhores entendimentos acerca dos conceitos estudados.

De acordo com Miskulin, Escher e Silva (2007), a implementação de atividades que levem em conta a utilização de recursos tecnológicos, resgata a exploração de conceitos matemáticos por meio de uma abordagem metodológica diferenciada que auxilia no processo de exploração, visualização e representação do conceito matemático.

Assim, considerando a natureza dinâmica do Cálculo, acreditamos que esta característica dificilmente seja trabalhada em um ambiente tradicional de ensino, no qual priorizam-se estudos de natureza algébrica, onde o foco das atividades centra-se na busca de soluções para os problemas apresentados, expressas por fórmulas fechadas e técnicas específicas para resolução de determinados problemas. Nesse sentido, entendemos que o computador propicia um contexto de investigação para o aprendizado matemático, como sugerem vários autores, assim como

> [...] o computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes para aprender Matemática, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente computacional. Do tipo de atividades propostas, das relações que for estabelecida com o computador, da frequência no uso e da familiaridade no uso e da familiaridade que se tenha com ele (Villarreal, 1999, p.362).

Ademais, ao utilizarmos a Informática no âmbito educacional, o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, elaboração de conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros.

Scucuglia (2006) aponta que o processo de experimentação e investigação é mais evidente em contextos que se fazem presentes recursos informáticos e que, além disso, a utilização de tais recursos pode redefinir a abordagem tradicional dada aos conceitos de Cálculo. A este respeito, o autor supracitado evidencia que

> Pautando-se nessa abordagem de caráter experimental, condicionada por potencialidades das tecnologias informáticas, estudantes podem investigar temas matemáticos com base em argumentações que privilegiam as inferências abdutivas, isto é, um enfoque que potencializa a abordagem dos conceitos a partir desses diversos tipos de inferências (p.109).

Além disso, a utilização de um software permite ao estudante explorar ativamente determinado conceito ao invés de escrever cálculos meramente processuais, sem compreendê-los. Igualmente, possibilita uma abordagem completamente diferente para a aprendizagem, marcando a transição entre a ação física (interação do estudante com a tecnologia) e a representação matemática.

Diante disso, entendemos que aulas de Cálculo pautadas no formalismo, onde o professor escreve e o aluno copia – o aluno apenas memoriza de maneira mecânica os exercícios, os conceitos ou demonstrações –, não possibilitam que o estudante seja capaz de atribuir significado mais amplo (além do aspecto algébrico, o geométrico) ao conceito de Cálculo. Desse modo, entendemos o uso de tecnologias na aula de Cálculo propicia ao estudante desenvolver outras habilidades, além de lidar com equações, com exercícios e com uma simbologia própria do Cálculo (JAVARONI, 2007; BARBOSA, 2009).

Assim, a importância que o uso das tecnologias tem assumido no currículo do ensino de Cálculo, pode ser verificada no crescente número de pesquisas que vem sendo desenvolvidas, contemplando o ensino de Cálculo articulado ao uso das tecnologias desses recursos. Para melhor compreendermos como os recursos das tecnologias têm sido introduzidos, e utilizados nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo, retrataremos a seguir, algumas pesquisas que abordam esta temática. A literatura de pesquisa a qual nos remetemos será considerada para evidenciar este ponto de vista, essencialmente no que diz respeito ao fato de que abordagens bem planejadas, utilizando recursos das tecnologias podem produzir “ganhos” [7] consideráveis nos processos de ensinar e aprender Cálculo.

A partir do panorama apresentado compreendemos que a transição entre a ação física (representada por interações de estudantes com diversos recursos informáticos), e a representação matemática tem fornecido suporte para ideias, as quais têm potencial tanto para serem usadas em aplicações do Cálculo, quanto para o desenvolvimento da teoria formal, colaborando, assim, com os processos de aprendizagem dos estudantes.

Em alguns estudos, como o de Scucuglia (2006), a transição referenciada acima pôde ser evidenciada. Esse autor discutiu, no referido trabalho, como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Nesse trabalho, ao explorar exemplos de funções polinomiais com o comando de integração definida da Calculadora Gráfica, as estudantes estabeleceram conjecturas sobre o TFC antes mesmo da sua formalização matemática. Nessa abordagem o autor propôs que, inicialmente, fossem utilizadas notações mais simplificadas envolvendo os programas da calculadora gráfica antes que uma simbologia mais formal (padronizada pela matemática acadêmica) fosse discutida por eles. Igualmente, o autor sugere que esta abordagem possibilitou o engajamento gradativo das estudantes em discussões matemáticas dedutivas a partir de resultados obtidos experimentalmente com as atividades propostas na pesquisa.

O autor trabalhou na perspectiva de experimentos de ensino, e umas das atividades desenvolvidas consistia em encontrar os valores das Integrais Definidas nos intervalos dados, utilizando o comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83. Assim, as estudantes calculavam o valor das Integrais com relativa facilidade.

Contudo, durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes tiveram algumas dificuldades em encontrar o valor da Integral no intervalo [a,b]. Assim, a intervenção e mediação do pesquisador se fizeram necessárias para que as estudantes chegassem ao resultado.

Após várias conjecturas as estudantes chegaram à conclusão de que o valor da Integral da função $y = 2x$ para o intervalo [a,b] era $b^2 – a^2$. Assim, seguindo o mesmo raciocínio, as estudantes encontraram a integral para as funções $y = 3x^2$ e $y = 4x^3$ com maior facilidade nos intervalos mencionados anteriormente.

Na sequência do experimento de ensino, Scucuglia (2006) buscou comparar juntamente com as estudantes cada valor encontrado para a Integral, no intervalo dado com a função de origem. Por exemplo, apontou que para a função $y = 2x$, o valor da integral era $b^2 – a^2$. Destarte, buscou fazer as estudantes perceberem tais padrões. Ao final da atividade, as estudantes conjecturaram que a Integral de uma função f(x) em um intervalo [a,b] era “F aplicada em b menos a F aplicada em a”.

A interação entre as estudantes e o pesquisador e as diferentes mídias utilizadas no desenvolvimento da atividade exibida aponta que a coordenação de diferentes mídias na abordagem de conceitos de Cálculo traz, também, possibilidades para o entendimento e compreensão, e mais ainda, para a formalização de conceitos matemáticos (SCUCUGLIA, 2006).

[7] Modos alternativos na busca de solução de problemas.

Já Barbosa (2009) investigou como o coletivo formado por alunos-com-tecnologias produz conhecimento acerca da função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica. Com esta investigação, a autora evidenciou que a produção do conhecimento dos alunos envolvidos (alunos ingressantes no Curso de Matemática da UNESP – Rio Claro), acerca de função composta e regra da cadeia, ocorreu por meio de elaborações de conjecturas, formuladas durante o processo de visualização potencializado pelas TIC. Tais conjecturas foram confirmadas ou refutadas, levando-se em conta o entrelaçamento das representações múltiplas, que permearam todas as atividades e um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, no qual o ser humano transforma e é transformado pelas mídias em um processo interativo.

Como mencionado no parágrafo anterior a investigação conduzida por Barbosa (2009) focava o estudo da regra da cadeia. Assim, uma das duplas envolvidas na atividade proposta iniciou a investigação plotando no software Winplot os gráficos das funções f(x) = x^2 e g(x) = 3x. Na sequência plotaram os gráficos de f'(g(x)) e (f(g(x)))'. Para evitar confusões em suas investigações e explorações, os estudantes resolveram esconder os gráficos de f e g e deixar apenas os gráficos de f'(g(x)) e (f(g(x)))'.

Quando interrogados sobre a relação existente entre esses gráficos um dos estudantes respondeu que f'(g(x)) era um terço de (f(g(x)))'. O estudante, observando o gráfico, percebeu que embora as funções plotadas fossem distintas, estas tinham uma relação como ele mencionou anteriormente. No entanto, ele complementou seu raciocínio observando a tabela que ele havia completado no decorrer da atividade.

A realização dessa atividade evidencia a importância das representações matemáticas e a possibilidade de transitar entre essas diferentes representações para compreender os conceitos, como a atividade realizada por Barbosa nos sugere. O estudante enunciou a regra da cadeia a partir da observação dos gráficos e da tabela que continha a derivada de g.

As representações matemáticas e sua coordenação possibilitam um maior entendimento, e compreensão dos conceitos matemáticos. Este aspecto é evidenciado por Farias (2007) em sua dissertação de mestrado. A autora realizou um estudo epistemológico, em uma perspectiva Semiótica, das representações matemáticas mediadas por softwares educativos. Para tanto buscou investigar e ressaltar as diferentes formas representativas de conceitos matemáticos, e suas dimensões didático-pedagógicas no Ensino de Cálculo, sendo estas essenciais à formação inicial do futuro professor de Matemática.

Com este estudo, a autora sugere que ao explorarmos o universo das representações, agregamos valores à constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática. Além disso, aponta a importância de conscientizar estudantes/professores da perspectiva semiótica implícita à abordagem de transitar entre várias representações matemáticas no processo de investigação e interpretação de conceitos, por meio da utilização de softwares adequados à disciplina, proporcionando a estes novas formas de abordagem dos conteúdos e permitindo um maior grau de compreensão.

Essa coordenação e mobilidade das representações matemáticas podem ser evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade envolvendo o conceito de continuidade de função empreendido por Farias (2007) junto aos estudantes engajados em sua pesquisa. A atividade consistia em avaliar a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 \; se \; x \le 1 \\ 2x - 3 \; se \; x > 1 \end{cases}$. Como proposto na atividade, os estudantes iniciaram a discussão sobre a continuidade da função afirmando que esta era contínua. Contudo, logo perceberam que a referida função era definida por partes e dependia de um parâmetro k, o qual iria interferir na continuidade desta função.

Na sequência da atividade os estudantes plotam o gráfico, e lançam mão do recurso "animação" do software Winplot, para visualizar o que haviam conjecturado a respeito do parâmetro k.

Notamos que antes dos estudantes plotarem o gráfico de f, a maior parte deles havia afirmado que a mesma era contínua. Contudo, ao utilizarem o comando "animação" do Winplot e variar o parâmetro k, os estudantes puderam perceber que apenas para k= –2 a função tornava-se contínua.

Por meio da visualização os estudantes verificaram que para k = –2 a função tornava-se contínua, e que o limite da função supracitada era igual a – 1. Para comprovar o que haviam observado, os estudantes utilizaram-se de outra forma representativa (a algébrica) para justificar os resultados visualizados no Winplot.

Após a investigação e exploração por meio do software Winplot as dúvidas dos estudantes foram esclarecidas. Além disso, por meio da coordenação das representações matemáticas (gráfica e algébrica), puderam refletir sobre o conceito de Continuidade de uma Função, e repensar sobre "o engano" que inicialmente haviam cometido a respeito da continuidade da mesma. Atividades como estas são comumente trabalhadas na maioria dos cursos de Cálculo, mas sem a abordagem tecnológica, ao mesmo tempo que a abordagem dada (algébrica) acaba deixando muitas lacunas em seus estudos.

É nesse contexto que, entendemos que as tecnologias propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados. Além disso, o professor de Cálculo tem aí uma possibilidade de tornar a abordagem de certos conceitos significativa para os estudantes, gerando novas compreensões em função da ampliação das formas de interação aluno-conteúdo, comparando-se com estratégias metodológicas clássicas, que priorizam a abordagem estática do conteúdo. Assim, nas palavras de Richit, Richit e Tomkelski (2009),

> a criação de ambientes de aprendizagem, baseados no uso de tecnologias, pode propiciar distintas abordagens para o conteúdo matemático, contribuindo com a construção do conhecimento dos estudantes. Nesse sentido, cabe ao professor proporcionar aos estudantes tais cenários de aprendizagem, pois é uma forma de privilegiar os diferentes estilos e ritmos de aprendizagem dos alunos (p.6).

Encaminhamentos Metodológicos da Oficina

Esta oficina será desenvolvida em laboratório de informática. Primeiramente, explicitaremos os encaminhamentos da oficina e faremos uma apresentação comentada de cada um dos menus do software GeoGebra. Na sequência realizaremos uma atividade de familiarização com os recursos do referido software. Posteriormente à atividade de familiarização, serão desenvolvidas atividades enfocando o conceito de Integral, tendo como suporte para o desenvolvimento destas o software GeoGebra. Salientamos que as atividades que serão desenvolvidas nesta oficina foram elaboradas pela primeira autora do artigo para o desenvolvimento do curso de extensão, que constituiu o contexto de sua pesquisa de mestrado intitulada *"Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais"*, defendida em 2010. Em seguida serão distribuídas atividades envolvendo o conceito de Integral, as quais serão realizadas pelos participantes, auxiliados pelos ministrantes da oficina.

Apresentação e Desenvolvimento das Atividades

As atividades que seguem apontam encaminhamentos para a abordagem do Conceito de Integral e de Função, a partir do uso de recursos tecnológicos.

1 – Objetivos:

– Investigar propriedades, noções e conceitos envolvendo Integral de Funções.

– Relacionar por meio da visualização a área de gráficos com o Conceito de Integral com o apoio do Software GeoGebra.

2 – Atividades envolvendo o Conceito de Integral com o Software GeoGebra

Atividade 1 – Calculando a área da região limitada por uma função e o eixo x: Introduzindo a ideia de Integral

1) Observe o gráfico a seguir: (Embora o gráfico esteja construído, construa-o no GeoGebra).

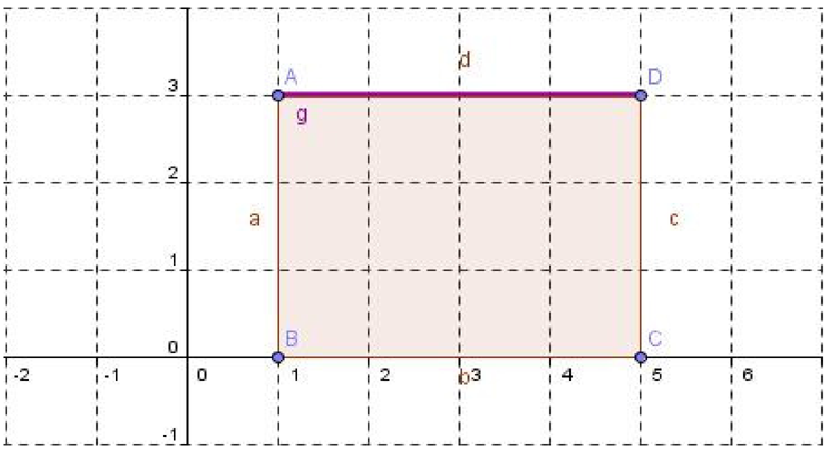

Figura 1: Representação gráfica gerada no software

2) Defina a função e o domínio que o gráfico assume.

____

____

3) Calcule a área limitada pela função e o eixo x no intervalo em que a função está definida. (Dica: Faça como na atividade 1)

____

4) Seria possível calcular essa área de uma outra maneira?

5) Qual procedimento você utilizaria?

Atividade 2 – Calculando a área da Função Exponencial

1) Seja a função $f(x) = e^{-x}$.

2) Construa seu gráfico no GeoGebra e explore propriedades (cor e estilo). (Para construir o gráfico de *f*, digite no campo de entrada f(x) = e^(-x). **OBS:** A letra **e** é obtida na janela localizada ao lado direito do campo de entrada do GeoGebra).
3) Insira um ponto qualquer sobre *f*. (Para inserir um ponto, clique no ícone **Ponto** e selecione a opção *Novo ponto*.

4) No campo de entrada digite: integral[f,0,x(A)].

5) Selecione a função mover, clique em cima do ponto A e arraste-o até que a área calculada assuma valor igual a 1. (Para uma melhor visualização do gráfico, clique com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica). Feito isso, deverá aparecer a seguinte janela:

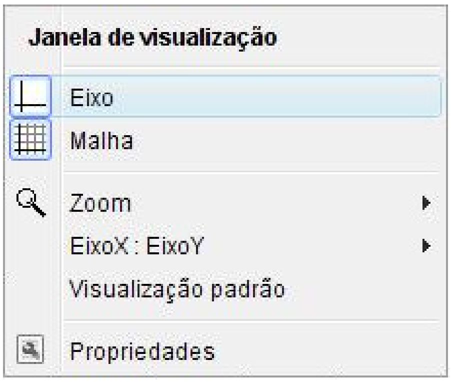

Figura 2: Menu *Janela de visualização* do GeoGebra

Em seguida clique na opção EixoX:EixoY e selecione a opção 100:1).

6) Agora, no menu **Opções,** selecione a opção **Arredondamento** e mude o número de casas decimais de duas para cinco. O que acontece com o valor da área calculada que aparece na janela gráfica ou algébrica do GeoGebra?

7) Novamente na janela geométrica, clique na opção **Deslocar eixos.** Em seguida, clique em cima do gráfico e arraste-o para a sua esquerda até aparecer no eixo x o número 13.

8) Ainda na janela geométrica, selecione a opção mover e arraste novamente o ponto A, até que ele fique entre os números 12 e 13, e depois pare.

9) O que aconteceu com o valor da área calculada?

10) Amplie o gráfico em torno do ponto A até que seja visível a distância que existe entre o gráfico da função e o eixo x. (Para ampliar o gráfico, proceda como no item 5, clicando com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica selecionando a opção EixoX:EixoY e depois a opção 1000:1)

11) Se for resolver o limite $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx$, qual será o valor encontrado?

12) Como é possível existir um espaço entre a função e o eixo x e a área calculada ser igual a 1?

As atividades apresentadas são breves exemplos dos contextos de investigação matemática sobre o conceito de integral, que serão desenvolvidas na oficina aqui proposta e evidenciam as possibilidades pedagógicas advindas do uso de tecnologias na abordagem de conceitos matemáticos em relativos ao Cálculo Diferencial e Integral e outros campos da matemática acadêmica.

Considerações Finais

A literatura em educação matemática sugere que o software GeoGebra vem se popularizando como um recurso didático e pedagógico bastante pertinente tanto na formação inicial como continuada de professores de matemática, tal como propõe Richit (2010) em sua pesquisa de mestrado.

Além de buscarmos nos apropriar das potencialidades dos recursos deste software, consideramos que um dos pontos fundamentais reside no *design* das atividades criadas e investigadas. O caráter investigativo de atividades emerge quando buscamos (a) propor questões “abertas”, ou seja, que possibilitem uma diversidade de justificativas e que outras questões surjam a partir delas e (b) enfatizar a articulação de múltiplas representações a partir da experimentação e visualização.

Devemos, também, buscar ir além dos processos de pensar *sobre* tecnologias e *sobre* atividades para nos apropriarmos dos processos de pensar *com* tecnologias e *com* atividades investigativas. Esse nos parece um dos grandes desafios para aprender matemática com tecnologias. Mas estes desafios pedagógicos, além de cognitivos, são também sociais. É nesse sentido que a formação de comunidades de interesse – como esta que se constitui localmente nesta oficina – é fundamental para aprendizagem. Atualmente, tais comunidades vêm coerentemente se constituindo a partir de interações em ambientes virtuais, principalmente na formação continuada de professores de matemática, conforme destaca Richit (2010).

Bibliografia e Referências

ARTIGUE, M. Enseigner autrement les mathématiques em deug A Premiere Anée, Principes ET Realisations. IREM de Lille, Frande, 1990.

BARBOSA, S.M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.** 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

FARIAS, M.M.R. **As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica**: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de matemática. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

JAVARONI, S.L. **Abordagem geométrica**: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

MISKULIN, R.G.S.; ESCHER, M.A.; SILVA, C.R.M. A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do Maple em Cálculo Diferencial. **Revista de Educação Matemática**, v. 10, p. 29-37, 2007.

MORELATTI, M. R. M. **Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

REGO, R.M. **Uma abordagem alternativa de ensino de Cálculo utilizando infinitésimos.** 233 f. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

RICHIT, Adriana. **Apropriação do Conhecimento Pedagógico-tecnológico em Matemática e a Formação Continuada de Professores**. 2010. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

RICHIT, Adriana; RICHIT, Andriceli; & TOMKELSKI, M. L. Multi-Representações Matemática com o Software GeoGebra na Abordagem de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EBEM, 13., Jequié, BA. **Anais...**, 2009

RICHIT, Andriceli. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais.** 243 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.** 145 f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

TALL, D; SMITH, D.; & PIEZ, C. **Technology and Calculus**. In M. Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume I: Research Syntheses, (2008f). 207-258.

VILLARREAL, M.E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e] Tecnologias Informáticas.** 378 f. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.